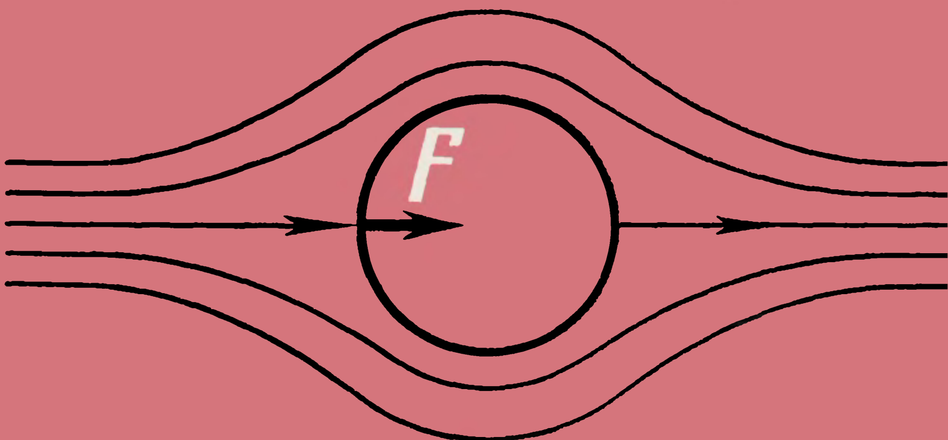
Физика

Библиотечка физико-математической школы

Б. Ю. КОГАН

РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ



$$F = C\rho v^2 R^2$$

Физика Библиотечка физико-математической школы

Б. Ю. КОГАН

РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1968

531.7
К 57
УДК 53.081 5 (075.2)

Физика

Библиотечка физико-математической школы

Редактор серии
Я. А. Смородинский

2 3 1
68—67

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Эта книжка входит в физическую серию библиотечки физико-математической школы. Задача серии — рассказать школьникам (а вместе с ними и тем, кто не перестал интересоваться основами физики) о явлениях природы с точки зрения физиков.

Современная физика очень быстро развивается: современная техника эксплуатирует все более глубокие и тонкие свойства вещества. Интерес к физике продолжает расти, понять же физику становится все труднее и труднее. Много лет идет спор о том, как надо учить физике в школе. Вряд ли он когда-нибудь кончится. Кажется, и нельзя придумать такую стабильную схему, которая отразила бы живую науку. Поэтому, кроме учебника, школьник должен получать информацию из более динамических источников.

Физическая серия библиотечки физико-математической школы посвящена этой цели. По замыслу, она должна включать в себя книжки по разным вопросам физики, написанные с разных точек зрения и адресованные читателям с различной подготовкой. Если опыт будет удачным и книжек станет много, то библиотечка даст возможность узнать о многих вещах, не написанных в учебниках. Лучшие из книжек будут дополняться и издаваться вновь; новые книжки позволят держать читателя в курсе современных успехов науки и, что еще более важно, рассказать о новых применениях старых принципов. Некоторые книжки будут состоять из задач. Время покажет, будет ли опыт удачным.

Для его успешного развития важно, чтобы за этой серией — физической — появились книжки биологической, химической, а может быть, и других серий. Наука не может развиваться изолированно, и представлять себе, что делается в других ее ветвях, крайне полезно.

Я. Смородинский

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Физические величины, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни и в научных исследованиях, измеряются в определенных единицах. Например, мы говорим: дом имеет длину 20 *м*, комната — площадь 30 $м^2$, вода — температуру 60° С. Символы *м*, $м^2$, °С указывают на единицы, в которых измерены перечисленные величины, и одновременно указывают на характер этих величин — длина, площадь, температура.

Желая сказать, что длина измеряется в *м*, а площадь — в $м^2$, иногда говорят, что размерностью длины является *м*, а размерностью площади — $м^2$. В этом же смысле говорят, что объем имеет размерность $м^3$, скорость — *м/сек* и т. п.

С размерностями физических величин приходится встречаться не только при измерениях, но и при вычислениях. Так, вычисляя площадь или скорость, мы пишем

$$3м \times 5м = 15м^2,$$

$$\frac{100\,м}{5\,сек} = 20\,\frac{м}{сек}\,.$$

Эти примеры показывают, что, совершая математические действия с физическими величинами, мы производим их не только над числами, но и над размерностями. В связи с этим ясно, что сложение двух физических величин возможно только в том случае, когда их размерности одинаковы. Например, можно говорить о сумме

$$2\,м + 3\,м$$

или

$$2\,кг + 3\,кг,$$

но, очевидно, не имеет смысла говорить о сумме

$$2\,м + 3\,кг.$$

Столь же очевидно, что если имеется какое-нибудь соотношение, связывающее физические величины, то размерности его левой и правой частей должны быть одинаковыми. Например, можно писать

$$3\ м \times 5\ м = 15\ м^2$$

или

$$3\ м > 2\ м,$$

но нельзя писать

$$3\ м \times 5\ м = 15\ м$$

или

$$3\ м > 2\ кг.$$

Высказанные соображения могут оказаться полезными для проверки равенств, полученных при решении той или иной задачи. Так, если левая часть некоторого равенства имеет размерность *м*, а правая — *м/сек*, то можно утверждать что это равенство неверно.

Однако анализ размерности может быть использован не только для контроля над выкладками, но, как мы сейчас увидим, и для вывода некоторых соотношений. Рассмотрим два простых примера.

1. Пусть требуется вычислять площадь круга. Так как она вполне определяется величиной радиуса, то

$$S = f(R), \tag{1}$$

где $f(R)$ — функция, подлежащая определению. Но так как R измеряется в *м*, а S — в $м^2$, то задача сводится к разысканию математической операции, «превращающей» метры линейные в метры квадратные. Кроме того, ясно, что существует только одна операция такого рода — возведение в квадрат. Отсюда заключаем, что искомая зависимость имеет вид

$$S = CR^2, \tag{2}$$

где C — некоторое отвлеченное число, не зависящее от R (постоянный безразмерный коэффициент). Таким образом, пользуясь только соображениями о размерности длины и площади, мы сумели установить характер зависимости S от R. И хотя нам не удалось решить задачу полностью (для этого надо доказать, что $C = \pi$), однако мы получили некоторый содержательный результат: нашли, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса.

2. Найдем ускорение точки, равномерно движущейся по окружности. Так как это ускорение зависит только от скорости v и радиуса R, то

$$a = f(v, R), \qquad (3)$$

где $f(v, R)$ — неизвестная функция двух аргументов.

Так как v имеет размерность *м/сек*, R — размерность *м* и a — размерность *м/сек*^{2}, то задача сводится к отысканию такой математической операции над символами *м/сек* и *м*, в результате которой получается «дробь» *м/сек*^{2}. С этой целью образуем произведение

$$(м/сек)^{\alpha} м^{\beta}$$

и посмотрим, при каких значениях α и β выполняется соотношение

$$(м/сек)^{\alpha} м^{\beta} = м/сек^2.$$

Записывая это соотношение в виде

$$м^{\alpha+\beta}/сек^{\alpha} = м/сек^2,$$

приходим к выводу, что числа α и β должны удовлетворять условиям

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha = 2,$$

откуда

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1.$$

Следовательно, операция, которую мы ищем, имеет вид

$$(м/сек)^2 м^{-1},$$

и поэтому зависимость (3) выражается равенством

$$a = Cv^2R^{-1},$$

или

$$a = C\frac{v^2}{R}, \qquad (4)$$

где C — некоторое постоянное число. Таким образом, анализ размерностей позволил найти искомую зависимость с точностью до постоянного коэффициента.

Приведенные примеры могут служить простейшей иллюстрацией метода размерностей. В дальнейшем мы рассмотрим этот метод более подробно, а сейчас вернемся к соображениям, которыми пользовались при выводе равенств (2) и (4). На первый взгляд эти соображения кажутся очевидными и бесспорными. Однако более строгое рассмотрение показывает, что не все здесь обстоит так просто.

Начнем с вопроса о размерностях левой и правой частей равенства. Мы считали, что эти размерности должны быть одинаковыми и поэтому, вычисляя площадь круга, утверждали, что правая часть равенства (1) должна иметь размерность *м*². Но почему, собственно, эта размерность не может быть иной? Почему площадь круга не может выражаться, например, формулой

$$S = R^3, \qquad (5)$$

в которой левая часть имеет размерность *м*², а правая — *м*³? Ведь символы S и R обозначают не предметы, а числа, а так как зависимость между числами может быть любой, то можно допустить, что она выражается и равенством (5). Дело станет еще менее ясным, если мы учтем, что число S представляет отношение площади круга к площади некоторого квадрата (со стороной 1 *м*), а число R — отношение длины радиуса к длине некоторого отрезка (протяженностью 1 *м*). Но тогда числа S и R можно рассматривать как «отвлеченные», и зависимость (5) станет тем более допустимой.

Далее, когда во втором примере мы искали зависимость a от v и R, то считали, что она имеет вид

$$a = f(v, R) = Cv^{\alpha}R^{\beta},$$

т. е. является степенно́й. Но почему она не может быть какой-нибудь иной, например, тригонометрической или логарифмической? Правда, могут сказать, что выражения вида $\sin v$ или $\lg R$ не имеют смысла, ибо совершенно не ясно, как понимать размерности sin *м/сек* и lg *м*. Однако это возражение нельзя считать убедительным, так как символ sin *м/сек* непонятен точно в такой же степени, в какой и символ *м/сек*. В самом деле, почему операцию

$$20\ м + 5\ сек$$

мы считаем не имеющей смысла, а операцию

$$\frac{20\ м}{5\ сек}$$

допустимой? Ведь мы здесь делим 20 метров не на 5 *частей*, а на 5 *секунд*, а это представляется столь же непонятным, как, скажем, деление 20 яблок на 5 апельсинов.

Кроме того, почему, например, в задаче о площади круга мы считали, что число S зависит *только* от числа R? Ведь можно допустить, что S зависит не только от R, но и *от единиц, в которых измеряются* S *и* R. Иначе говоря, можно допустить, что когда R измеряется в *м*, а S — в *м*^{2}, зависимость $S = f(R)$ будет одной, а когда R измеряется в *см*, а S — в *см*^{2}, эта зависимость будет другой. Аналогичное замечание можно сделать и относительно зависимости $a = f(v, R)$, рассмотренной во втором примере.

Наконец, что, вообще, мы понимаем под размерностью физической величины? В предыдущем изложении мы пользовались этим понятием, не давая ему точного определения. Однако ясно, что обоснованное применение метода размерностей возможно только после того, как дано четкое определение самому понятию «размерность».

Перечисленные вопросы будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 2. МЕТОД РАЗМЕРНОСТЕЙ

1. Об измерении физических величин. Методы, которыми мы пользуемся при физических измерениях, весьма разнообразны. В некоторых случаях они очень просты — например, при измерении длины с помощью линейки, а в других — требуют применения сложных и точных приборов. Иногда эти измерения являются прямыми, например, при отсчете времени по числу ударов метронома, а иногда — косвенными, например, при измерении напряжения вольтметром. Но как бы ни измерялась физическая величина, мы, прежде всего, должны точно знать, что понимаем под ее *мерой*.

Иногда говорят, что измерить физическую величину — значит, найти ее отношение к единице измерения (или сравнить ее с единицей измерения). Однако такое определение нельзя считать ясным, ибо не понятно, что значит «отношение физической величины к единице ее измерения». Если это означает отношение двух чисел, то нужно знать, что под этими числами понимается, т. е. что понимается под числом, измеряющим физическую величину (а именно это мы и хотим определить). Если же под отношением двух физических величин понимается отношение двух однородных «качеств», то это еще более непонятно. В действительности дело обстоит сложнее, и ответить на вопрос, что мы понимаем под мерой физической величины, можно лишь для каждой физической величины в отдельности.

Действительно, вспомним, например, как мы определяем понятие длины. Под длиной отрезка, как известно, понимается число, показывающее, сколько раз в этом отрезке укладывается другой, принятый за единицу измерения. В данном случае мы вводим меру физической величины с помощью непосредственного откладывания единицы масштаба. Аналогично вводится понятие интервала времени· под величиной этого интервала понимается число, показывающее, сколько раз в нем укладывается интервал, принятый за единицу измерения времени. Однако если рассматривать такую физическую величину как скорость, то дело будет обстоять совершенно иначе. Как известно, под скоростью понимается отношение

$$v = \frac{s}{t} \tag{6}$$

(имеется в виду скорость равномерного движения). В данном случае мы под мерой физической величины понимаем не число, показывающее, сколько раз в ней укладывается некоторая единица измерения, а число, получаемое с помощью равенства (6). (Говорить, что скорость одного движения «укладывается» несколько раз в скорости другого, очевидно, нельзя, так как это просто непонятно). Аналогично обстоит дело и с ускорением — под мерой этой величины понимается отношение

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

а также с силой, под мерой которой понимают произведение

$$F = ma$$

(при общепринятом способе измерения).

Мы видим, что мера физической величины вводится в разных случаях по-разному. Поэтому, желая дать общее определение, можно сказать, что под мерой физической величины мы понимаем число, которое характеризует эту величину *в количественном отношении*. Что касается способа, которым вводится эта характеристика, то он может быть любым, например, экспериментальным (как при введении меры длины), или математическим (как при введении меры скорости).

2. Основные и производные величины. Измеряя длину, мы можем выражать ее в метрах, сантиметрах, дюймах и т. п.

Выбор этой единицы зависит только от нас и является совершенно произвольным. Точно так же, измеряя время, мы можем выражать его в минутах, секундах и т. п. При этом единица времени никак не связана с единицей длины. Поэтому изменяя единицу длины, мы не обязаны изменять единицу времени, и, наоборот, изменяя единицу времени, можем оставить неизменной единицу длины. Это обстоятельство выражают словами: длина и время — величины *основные*.

Помимо длины и времени, основной величиной является также и масса, ибо массу можно измерять в *г*, *кг*, и т. п. независимо от того, в каких единицах измеряются длина и время. В противоположность этому, такая величина, как скорость, уже не будет основной, ибо мера скорости зависит от единиц, в которых измеряются другие физические величины. Например, если измерять длину в метрах, а время — в секундах, то первая космическая скорость будет выражаться числом 7900 (метров в секунду); но если длину измерять в километрах, а время — в часах, то эта скорость будет выражаться числом 28 440 (километров в час). Мы видим, что *число, измеряющее скорость, зависит от единиц, в которых измеряются другие величины* — длина и время. Физическая величина, мера которой зависит от масштаба измерения других величин, называется *производной*. Следовательно, скорость есть величина производная.

Производной величиной будет, очевидно, и ускорение, а также сила (если измерять ее произведением ma). Еще одним примером производной величины может служить площадь. Действительно, если измерять длину не в метрах, а, скажем, в дециметрах, то площадь каждой фигуры будет выражаться числом в сто раз бо́льшим. Следовательно, мера площади зависит от меры другой физической величины — длины.

Заметим, что вопрос *о том, является ли данная величина* основной, зависит только от того, как мы вводим ее меру (а не от природы этой величины). Например, если силу измерять произведением ma, то она будет величиной производной; но если измерять ее величиной деформации некоторого эталонного динамометра, то она станет величиной основной (подобно длине, времени и массе). Аналогичное замечание можно сделать и относительно массы: при обычном способе измерения она является величиной основной, но если измерять ее отношением F/a, то она будет величиной производной (а сила — основной).

Рассмотрим в связи с этим вопрос об измерении площади. Вообразим, что в качестве единицы измерения этой величины мы берем не квадрат со стороной, равной единице, а какой-нибудь эталонный квадрат *произвольной* величины. Тогда единица измерения площади окажется не зависящей от единицы измерения длины, и изменение последней никак не повлияет на меру площади. В этом случае площадь будет такой же основной величиной, как и длина.

Мы видим, что при одном способе измерения физической величины она может быть основной, а при другом — производной. В § 7 этот вопрос будет рассмотрен более подробно.

3. Размерность физической величины. Рассмотрим какую-нибудь производную величину, например, скорость. Выбрав определенные единицы измерения, получим

$$v = \frac{s}{t}.$$

Пусть теперь единицы длины и времени изменяются таким образом, что числа, выражающие s и t, увеличиваются: первое в λ раз, а второе в τ раз. Тогда в новых единицах:

$$s' = \lambda s, \quad t' = \tau t,$$

$$v' = \frac{s'}{t'} = \frac{\lambda s}{\tau t} = \frac{\lambda}{\tau} \cdot \frac{s}{t},$$

$$v' = \frac{\lambda}{\tau} v, \tag{7}$$

где штрихами обозначены новые меры величин s, t, v. Мы видим, что если мера длины увеличивается в λ раз, а мера времени в τ раз, то мера скорости возрастает в λ/τ раз. Этот факт выражают словами: «скорость имеет размерность L/T» и записывают в виде равенства

$$[v] = \frac{L}{T},$$

или

$$[v] = LT^{-1},$$

в котором $[v]$ обозначает размерность скорости, а символами L и T обозначены длина и время.

В общем случае можно дать следующее определение размерности.

Пусть имеются основные величины A, B, C и производная величина P. Предположим, что в результате изменения масштабов, в которых измеряются величины A, B, C, их числовые значения становятся бо́льшими: для величины A — в α раз, для величины B — в β раз, для величины C — в γ раз. Пусть числовое значение величины P увеличивается вследствие этого в π раз. Тогда, если

$$\pi = \alpha^l \beta^m \gamma^n,$$

то говорят, что *величина P имеет размерность $A^l B^m C^n$ относительно величин A, B, C* (или *в системе* ABC). Этот факт записывают в виде равенства

$$[P] = A^l B^m C^n, \tag{8}$$

в котором символ $[P]$ обозначает размерность величины P.

Формула (8) показывает, как мера величины P зависит от мер основных величин A, B, C. Она называется *формулой размерности*. (Конечно, число основных величин может быть и не равно трем.)

Рассмотрим несколько простых примеров.

1. Размерность *площади*. Если единицу длины сделать в λ раз меньшей, то мера длины увеличится в λ раз, а мера площади — в λ^2 раз. Следовательно,

$$[S] = L^2.$$

2. Размерность *объема*. Рассуждая точно так же, придем к выводу, что

$$[V] = L^3.$$

3. Размерность *ускорения*. Пусть единицы длины и времени изменяются таким образом, что мера длины увеличивается в λ раз, а мера времени — в τ раз. Тогда, в старых единицах,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

а в новых —

$$a' = \frac{\Delta v'}{\Delta t'} = \frac{(\lambda/\tau)\,\Delta v}{\tau \Delta t} = \frac{\lambda}{\tau^2} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(с учетом равенства (7), связывающего v' с v). Следовательно,

$$a' = \frac{\lambda}{\tau^2} a,$$

откуда

$$[a]=\frac{L}{T^2}=LT^{-2}.$$

4. Размерность *угла*. Угол измеряют отношением

$$\varphi=\frac{l}{R},$$

где l — длина соответствующей дуги, а R — радиус. Если изменить единицу длины, то числа l и R увеличатся или уменьшатся в одно и то же число раз, и отношение l/R останется неизмененным. Следовательно, мера угла не зависит от меры длины (а также от мер других основных величин, например, времени или массы). Величину подобного рода называют *безразмерной*, а ее размерность обозначают символом 1 *). Таким образом,

$$[\varphi]=1.$$

Из того, что мера угла не зависит от единиц длины, массы и времени, не следует, что угол — величина основная. Характерной особенностью основной величины является то, что единицу ее измерения можно произвольно изменять независимо от единиц измерения других основных величин В противоположность этому, единица измерения угла вполне определенна, и хотя она не зависит от единиц измерения длины, массы и времени, однако не может быть изменена произвольно (пока мерой угла считается отношение $\varphi=l/R$). Следовательно, угол — величина производная

5. Размерность *длины, массы* и *времени*. Так как эти величины являются основными, то

$$[l]=L,\quad [m]=M,\quad [t]=T,$$

где L, M, T — символы длины, массы и времени.

Вычисление размерности существенно облегчается двумя следующими правилами (которые мы не будем доказывать ввиду их очевидности):

I. Если $R=PQ$, то

$$[R]=[P]\cdot[Q].$$

(Размерность произведения равна произведению размерностей.)

---

*) О безразмерной величине говорят также, что она имеет *нулевую размерность*. Можно было бы написать $[\varphi]=L^0$.

II. Если $R = P/Q$, то

$$[R] = \frac{[P]}{[Q]}.$$

(Размерность отношения равна отношению размерностей.)

Вычислим, пользуясь этими правилами, размерности некоторых величин.

1. Размерность *скорости*. Так как $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, то

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{[s]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

2. Размерность *ускорения*. Так как $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, то

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}.$$

3. Размерность *силы*. Будем измерять силу произведением ma. Тогда в системе LMT (длина, масса, время) получим

$$[F] = [m] \cdot [a] = M \cdot LT^{-2} = LMT^{-2}.$$

4. Размерность *кинетической энергии*. Так как кинетическая энергия равна произведению

$$W = \frac{1}{2} mv^2,$$

то

$$[W] = [1/2] \cdot [m] \cdot [v]^2 = 1 \cdot M \cdot (LT^{-1})^2 = L^2MT^{-2}.$$

(Коэффициент 1/2 — величина безразмерная, и поэтому $[1/2] = 1$.)

Из рассмотренных примеров, в частности, видно, что показатели размерности могут быть как положительными, так и отрицательными. Впоследствии мы увидим, что они могут быть и дробными.

Символы L, M, T иногда заменяют обозначениями соответствующих единиц. Тогда размерностью силы будет $м \cdot кг \cdot сек^{-2}$, размерностью энергии — $м^2 \cdot кг \cdot сек^{-2}$ и т. д.

Заметим, что говоря о размерности, мы всегда имеем в виду размерность *в некоторой системе основных величин*. Например, когда мы пишем

$$[m] = M, \quad [F] = LMT^{-2},$$

то имеем в виду размерности массы и силы в системе LMT. Но о размерностях этих величин можно говорить и в других системах, например, в системе LTF (длина, время, сила). В этом случае будем иметь

$$[F] = F,$$

$$[m] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{F}{LT^{-2}} = L^{-1}T^2F.$$

Естественно возникает вопрос: всегда ли размерность величины P имеет вид (8), т. е. всегда ли она является степенной? В более точной форме этот вопрос состоит в следующем. Пусть имеется основная величина A и производная величина P. Пусть, далее, мы изменяем масштаб, в котором измеряется величина A, в результате чего ее мера увеличивается в α раз, а мера величины P — в π раз. Спрашивается какова зависимость π от α?

Прежде всего заметим, что величина P может быть такой, что π вообще не будет однозначной функцией α. Пусть, например,

$$P = 2^l, \tag{9}$$

где l — некоторая длина. Тогда при $l = 1$ *м* будем иметь:

1) если длина измеряется в метрах:

$$l = 1, \quad P = 2^1,$$

2) если длина измеряется в дециметрах:

$$l = 10, \quad P = 2^{10};$$

3) если длина измеряется в сантиметрах:

$$l = 100, \quad P = 2^{100}.$$

Таким образом, переход от метров к дециметрам дает

$$\alpha = \frac{10}{1} = 10, \quad \pi(\alpha) = \frac{2^{10}}{2^1} = 2^9,$$

а переход от дециметров к сантиметрам —

$$\alpha = \frac{100}{10} = 10, \quad \pi(\alpha) = \frac{2^{100}}{2^{10}} = 2^{90}.$$

Мы видим, что одному и тому же значению α здесь соответствуют различные значения π В данном случае число π зависит не только от α, но и от первоначальной единицы длины.

Другим примером того же рода может служить величина

$$P = v + v^2, \tag{10}$$

где v — какая-нибудь скорость. Легко видеть, что здесь π тоже не является однозначной функцией α (так как слагаемые v и v^2 имеют различные размерности).

Таким образом, возможны величины, для которых π вообще не является однозначной функцией α. О размерностях таких величин нельзя ничего сказать, или, выражаясь точнее, о них просто не имеет смысла говорить (так как само понятие размерности предполагает однозначную зависимость π от α).

Однако можно доказать *), что если π есть однозначная функция α, то эта функция обязательно является степенной. В этом случае величина P имеет определенную размерность, выражаемую формулой типа (8).

Что касается величин, подобных (9) и (10), то аналогичных примеров можно привести сколько угодно, но, и это очень существенно, величины такого рода в физике не встречаются. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что каждая физическая величина обладает некоторой размерностью.

4. Однородность физических формул. Пусть в некоторой системе мер, например в системе LMT, измеряются величины P_1 и P_2, связанные равенством

$$P_1 = P_2. \tag{11}$$

Будем считать, что выполняются два условия:

1. Каждая из этих величин обладает определенной размерностью.

2. Написанное равенство верно в любой системе единиц, применяемых для измерения длины, массы и времени.

Очевидно, в этом случае

$$[P_1] = [P_2]. \tag{12}$$

Действительно, изменим произвольным образом единицы длины, массы и времени. Тогда величины P_1 и P_2 станут бóльшими или меньшими, и так как равенство (11) останется в силе, то это означает, что числа P_1 и P_2 изменятся в одинаковое число раз. Отсюда следует, что размерности этих величин одинаковы.

---

*) См. стр 65.

Пусть, далее, величины P, P_1, P_2 связаны равенством

$$P = P_1 + P_2, \tag{13}$$

причем опять выполняются условия 1 и 2. Легко видеть, что тогда

$$[P_1] = [P_2] = [P]. \tag{14}$$

Действительно, если бы размерности величин P_1 и P_2 были различны, то сумма (13) вообще не имела бы никакой размерности. Отсюда заключаем, что $[P_1] = [P_2]$ и, следовательно, справедливо соотношение (14).

Мы видим, что все члены равенства, связывающего физические величины, имеют одну и ту же размерность. Это свойство физических формул называют *однородностью*.

В § 1 мы говорили, что величина

$$P = 20\ \text{м} + 5\ \text{сек}$$

не имеет смысла. Теперь мы можем высказаться более точно: так как эта сумма неоднородна и, следовательно, не имеет никакой размерности, то *она не может быть результатом вычислений по тем или иным физическим формулам*. Можно сказать, что эта сумма имеет смысл арифметический, но не физический

5. Метод размерностей. Пусть величина u находится в функциональной зависимости от величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{15}$$

Будем считать, что величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, u обладают определенными размерностями, а равенство (15) справедливо в любой системе единиц, применяемой для измерения основных величин (например, длины, массы и времени). В этом случае функция (15) не может быть произвольной, а должна быть такой, чтобы выполнялось равенство

$$[f] = [u].$$

Это обстоятельство заметно сужает класс возможных функций f и позволяет в какой-то степени «предсказывать» физические зависимости.

Рассмотрим три примера.

1) Пусть точка начинает движение из состояния покоя и движется с постоянным ускорением a Тогда пройденный ею путь будет некоторой функцией a и t:

$$s = f(a, t), \tag{16}$$

причем функция f должна удовлетворять требованию

$$[f(a, t)] = [s] = L.$$

В этом простом случае ясно, что функция $f(a, t)$ является степенной, т. е. имеет вид

$$f(a, t) = Ca^{\alpha}t^{\beta},$$

где C, α, β — некоторые константы. Действительно, если бы эта функция была какой-нибудь иной, то правая часть равенства (16) вообще не имела бы никакой размерности. Следовательно,

$$s = Ca^{\alpha}t^{\beta},$$

причем α и β таковы, что выполняется условие

$$[a^{\alpha}t^{\beta}] = L. \qquad (17)$$

Но легко показать (мы не будем на этом останавливаться), что равенство (17) справедливо только при

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$s = Cat^2,$$

где C — некоторая неизвестная константа (безразмерная).

2) Пусть математическому маятнику сообщили начальную скорость v_0, вследствие чего он отклонился на угол α. В этом случае

$$\alpha = f(v_0, l, g), \qquad (18)$$

где l — длина маятника, а g — ускорение силы тяжести. При этом, так как α — величина безразмерная, функция f должна удовлетворять условию:

$$[f(v_0, l, g)] = 1. \qquad (19)$$

Если, как и в предыдущем примере, искать функцию f в виде

$$f(v_0, l, g) = Cv_0^{\alpha}l^{\beta}g^{\gamma}],$$

то выяснится, что требованию

$$[v^{\alpha}{}_0 l^{\beta} g^{\gamma}] = 1$$

удовлетворяет бесчисленное множество степенных комбинаций. Одной из них является отношение v_0^2/gl, а остальные, как легко показать, имеют вид

$$\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^k, \tag{20}$$

где k — произвольное число. Поэтому, считая зависимость (18) степенной, приходим к выводу, что

$$\alpha = C\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^k,$$

где C — некоторая безразмерная константа.

Однако нетрудно видеть, что этот вывод сделан слишком поспешно. В самом деле, поскольку выражение (20) является безразмерным *при любом* k, то требование о безразмерности α будет выполняться и при

$$\alpha = \frac{v_0^2}{gl} + 2\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2,$$

$$\alpha = \left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2 - 4\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^3,$$

и т. п. Более того, это требование будет выполняться и при

$$\alpha = \sin\left(\frac{v_0^2}{gl}\right),$$

$$\alpha = \log\left(\frac{v_0^2}{gl}\right),$$

и, вообще, при

$$\alpha = \varphi\left(\frac{v_0^2}{gl}\right), \tag{21}$$

где φ — произвольно выбранная функция. Следовательно зависимость (18) может выражаться любым равенством вида (21) (и, как можно показать, только таким равенством).

Итак, интересующая нас зависимость может быть и не степенной (в отличие от зависимости $s = f(a, t)$, рассмотренной в предыдущем примере). Причина этого в том, что комбинация v_0^2/gl безразмерна, и поэтому любая функция от v_0^2/gl тоже является безразмерной.

3) Пусть точка, рассмотренная в первом примере, начинает движение со скоростью v_0. Тогда s будет функцией v_0, a, t:

$$s = f(v_0, a, t), \tag{22}$$

причем должно выполняться условие

$$[f(v_0, a, t)] = L.$$

Но этому условию удовлетворяют многие зависимости (22), например,

$$s = at^2, \quad s = v_0 t, \quad s = \frac{v_0^2}{a}$$

и бесчисленное множество других. Кроме того, это условие выполняется и в случае

$$s = at^2 \cdot \varphi\left(\frac{at}{v_0}\right), \tag{23}$$

$$s = v_0 t \cdot \varphi\left(\frac{at}{v_0}\right), \tag{24}$$

и т. п. Действительно, так как отношение at/v_0 безразмерно, то множитель $\varphi(at/v_0)$ никак не влияет на размерность величины s. Следовательно, зависимость (22) может выражаться и функциями типа (23), (24).

Мы видим, что хотя величина s является размерной, тем не менее функция (22) может быть и не степеннóй. Объясняется это тем, что *из аргументов этой функции можно составить безразмерную степеннýю комбинацию* — отношение at/v_0. (В случае зависимости $s = f(a, t)$, рассмотренной в первом примере, аргументы a и t не допускали подобной комбинации. Именно поэтому функция $s = f(a, t)$ могла быть только степеннóй.)

Теперь мы можем перейти к общему случаю. Пусть

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{25}$$

и поэтому должно выполняться условие

$$[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = [u]. \tag{26}$$

Посмотрим, какие ограничения накладывает это условие на функцию f. Будем сначала считать, что u — величина безразмерная (например, угол). Тогда условие (26) будет выражаться равенством

$$[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 1 \tag{27}$$

и ему будет удовлетворять любая функция вида

$$f = F(\delta_1, \delta_2, \ldots), \tag{28}$$

где δ_1, δ_2, . . — безразмерные степенные комбинации величин $x_1, \ldots, x_n$ (Например, в задаче об отклонении математического маятника угол α был функцией безразмерной комбинации v_0^2/gl) Вместе с тем можно доказать*), что каждая функция f, удовлетворяющая условию (27), есть либо функция вида (28), либо константа Следовательно, если u безразмерно, то зависимость (25) описывается равенством

$$u = F(\delta_1, \delta_2, \ldots) \tag{29}$$

или равенством

$$u = C \tag{30}$$

Пусть теперь u имеет произвольную размерность. Образуем какую-нибудь степенную комбинацию

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}, \tag{31}$$

удовлетворяющую условию

$$[P(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = [u], \tag{32}$$

и рассмотрим безразмерное отношение

$$\frac{u}{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{33}$$

Здесь могут представиться два случая:

1 Величины $x_1, \ldots, x_n$ допускают безразмерные степенные комбинации $\delta_1, \delta_2, \ldots$ Тогда зависимость (33) будет иметь вид

$$\frac{u}{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = F(\delta_1, \delta_2, \ldots),$$

откуда

$$u = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) F(\delta_1, \delta_2, \ldots). \tag{34}$$

2. Безразмерные степенные комбинации $\delta_1, \delta_2, \ldots$ невозможны. Тогда зависимость (32) будет иметь вид

$$\frac{u}{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = C,$$

откуда

$$u = C \cdot P(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{35}$$

Таким образом, зависимость

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{36}$$

---

*) См стр 66.

описывается равенствами вида (34) или (35) Эти равенства полностью решают вопрос о характере интересующей нас зависимости *).

Прежде чем переходить к примерам, отметим один важный случай. Пусть величины $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что из них можно составить *лишь одну* степенную комбинацию (31), удовлетворяющую условию (32). Легко видеть, что тогда комбинации $\delta_1, \delta_2, \ldots$ невозможны Действительно, если бы существовала безразмерная степенная комбинация δ, то, наряду с равенством

$$[P]=[u],$$

было бы справедливо и равенство

$$[P\delta]=[u],$$

т. е. P было бы не единственной степенной комбинацией, имеющей размерность величины u А так как это противоречит условию о единственности подобной комбинации, то приходим к выводу, что безразмерные степенные функции δ_1, $\delta_2, \ldots$ образовать нельзя

Поскольку комбинации $\delta_1, \delta_2, \ldots$ в рассмотренном случае невозможны, то зависимость (36) выражается равенством (35), содержащим неопределенность лишь в виде константы C (в отличие от равенства (34), содержащего неопределенность в виде функции F). Поэтому метод размерностей дает здесь наиболее полное представление о характере искомой зависимости Большинство примеров, которые мы в дальнейшем будем рассматривать, относятся к этому случаю.

§ 3. ПРИМЕРЫ ПО МЕХАНИКЕ

Решая ту или иную задачу механики, мы в конечном счете основываемся на трех законах· на законе $F=ma$, на законе действия и противодействия и на правиле параллелограмма сил. Но равенства, выражающие эти законы,

*) Выводя соотношения (34) и (35), мы предполагали, что комбинация P, удовлетворяющая условию (32), *существует*. Эта нестрогость не имеет значения, так как в каждом конкретном случае применения метода размерностей мы такую комбинацию находим.

остаются справедливыми при любых изменениях масштаба основных величин. Отсюда следует, что это верно не только для перечисленных законов, но вообще для всех формул механики. Поэтому к задачам механики можно безбоязненно применять метод размерностей.

В этом параграфе мы будем пользоваться системой LMT. Ниже приводятся размерности ряда механических величин в этой системе (табл. 1).

Таблица 1

Размерности механических величин в системе LMT

Величина	Размерность	Единица измерения в системе СИ
Длина	L	*м*
Масса	M	*кг*
Время	T	*сек*
Площадь	L^2	*м*^{2}
Объем	L^3	*м*^{3}
Угол	1	*рад*
Скорость	LT^{-1}	*м/сек*
Ускорение	LT^{-2}	*м/сек*^{2}
Угловая скорость	T^{-1}	*рад/сек*
Угловое ускорение	T^{-2}	*рад/сек*^{2}
Период	T	*сек*
Сила, вес	LMT^{-2}	*н*
Плотность	$L^{-3}M$	*кг/м*^{3}
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	*н/м*^{2}
Импульс	LMT^{-1}	*н·сек*
Момент количества движения *)	L^2MT^{-1}	*кг·м*^{2}*/сек*
Работа, энергия	L^2MT^{-2}	*дж*
Мощность	L^2MT^{-3}	*вт*
Момент силы	L^2MT^{-2}	*н·м*
Модуль упругости	$L^{-1}MT^{-2}$	*н/м*^{2}

*) Эту величину называют также угловым моментом.

Пример 1. Математический маятник отклонен на угол 45° и отпущен без начальной скорости. Исследовать зависимость периода колебаний от длины маятника.

Решение. Искомый период τ зависит от длины l, массы маятника m и его веса P. (Будем считать, что маятник колеблется на некоторой произвольно выбранной планете.) Таким образом,

$$\tau = f(l,\ m,\ P).$$

Далее ищем степенную комбинацию

$$l^{\alpha} m^{\beta} P^{\gamma}, \tag{37}$$

удовлетворяющую условию

$$[l^{\alpha} m^{\beta} P^{\gamma}] = [\tau]. \tag{38}$$

Так как

$$[l] = L, \quad [m] = M, \quad [P] = LMT^{-2}, \quad [\tau] = T,$$

то

$$L^{\alpha} M^{\beta} (LMT^{-2})^{\gamma} = T$$

и равенство (38) принимает вид

$$L^{\alpha+\gamma} M^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma} = T,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\gamma &= 0, \\ \beta+\gamma &= 0, \\ -2\gamma &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция (37) имеет вид

$$l^{1/2} m^{1/2} P^{-1/2},$$

причем это *единственная* степенная комбинация величин l, m и P, удовлетворяющая условию (38). Следовательно, безразмерные комбинации этих величии невозможны, и поэтому

$$\tau = Cl^{1/2} m^{1/2} P^{-1/2} = C\sqrt{\frac{lm}{P}}.$$

Учтя теперь, что $P = mg$, получим

$$\tau = C\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{39}$$

Равенство (39) показывает, что период колебаний математического маятника пропорционален $\sqrt{l}$ и обратно пропорционален $\sqrt{g}$.

Если бы начальный угол отклонения маятника был равен не 45°, а, скажем, 60°, то зависимость (39) была бы точно такой же, но константа C имела бы другое значение. Следовательно, в общем случае можно написать

$$\tau = F(\varphi_0)\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{40}$$

где φ_0 — амплитуда колебаний маятника. Функция $F(\varphi_0)$ остается при этом неопределенной. (Как известно, если φ_0 невелико, то $F(\varphi_0) \approx 2\pi$.)

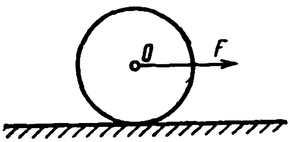


Рис 1.

Пример 2. Однородный цилиндр катится по горизонтальной плоскости под действием силы F (рис. 1). Считая, что скольжение отсутствует, исследовать зависимость ускорения точки O от величины силы F.

Решение. Искомое ускорение a может зависеть от трех величин: от силы F, от массы цилиндра m и от его радиуса R:

$$a = f(F, m, R)$$

Пользуясь методом размерностей, подбираем функцию

$$F^{\alpha} m^{\beta} R^{\gamma},$$

удовлетворяющую условию

$$[F^{\alpha} m^{\beta} R^{\gamma}] = [a].$$

Учитывая, что

$$[F] = LMT^{-2}, \ [m] = M, \ [R] = L, \ [a] = LT^{-2},$$

получаем

$$(LMT^{-2})^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} = LT^{-2},$$

$$L^{\alpha+\gamma} M^{\alpha+\beta} T^{-2\alpha} = LT^{-2},$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 1, \\ \alpha + \beta &= 0, \\ -2\alpha &= -2. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, найдем

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0,$$

т. е.

$$F^{\alpha} m^{\beta} R^{\gamma} = Fm^{-1} = \frac{F}{m}.$$

Так как найденная степенная комбинация — единственная, приходим к выводу, что

$$a = C \frac{F}{m}, \tag{41}$$

где C — некоторая (неизвестная) константа.

Полученный результат показывает, что ускорение этого цилиндра не зависит от его радиуса (при заданном значении m).

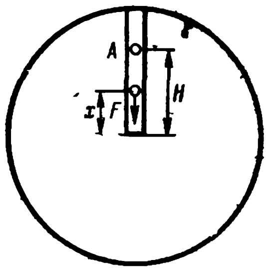


Рис. 2

Пример 3. Вообразим, что на Северном полюсе Земли вырыт колодец, доходящий до ее центра (рис. 2). Пусть из точки A этого колодца начинает падать камень, не встречающий на своем пути сопротивления воздуха. Исследовать зависимость времени его падения от высоты H.

Решение. Искомое время τ может зависеть лишь от высоты H и от ускорения, с которым движется камень. Найдем это ускорение

Рассмотрим силу F, с которой камень притягивается к центру Земли Известно, что внутри Земли эта сила изменяется по закону

$$F = kx, \tag{42}$$

где k — коэффициент пропорциональности Величину его легко найти, полагая $x = R$. Так как F должно быть в этом случае равно mg, то

$$kR = mg,$$

откуда

$$k = \frac{mg}{R}.$$

Подставив это значение k в (42), получим

$$F = \frac{mg}{R} x,$$

и, следовательно, ускорение, с которым движется камень,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{g}{R} x.$$

Мы видим, что закон, по которому изменяется ускорение камня в процессе падения, характеризуется коэффициентом g/R. Следовательно,

$$\tau = f\left(H, \frac{g}{R}\right).$$

Далее, пользуясь методом размерностей, получим

$$\left[H^{\alpha}\left(\frac{g}{R}\right)^{\beta}\right] = [\tau],$$

$$[H] = L, \quad \left[\frac{g}{R}\right] = T^{-2}, \quad [\tau] = T,$$

$$L^{\alpha}(T^{-2})^{\beta} = T,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ -2\beta &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом,

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2},$$

$$H^{\alpha}\left(\frac{g}{R}\right)^{\beta} = \left(\frac{g}{R}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Учитывая, что найденная степенная комбинация является единственной, приходим к выводу, что

$$\tau = C\sqrt{\frac{R}{g}}, \tag{43}$$

где C — некоторый коэффициент. Равенство (43) показывает, что время падения этого камня не зависит от высоты H.

Пример 4. Доказать, что вторая космическая скорость пропорциональна $\sqrt{Rg}$, где R — радиус планеты, а g — ускорение силы тяжести на ее поверхности. (Предполагается, что такая скорость существует. Иначе говоря, считается известным, что если начальная скорость тела достаточно велика, то оно удаляется в бесконечность.)

Решение. Пусть тело брошено с поверхности планеты вертикально вверх (рис. 3). Тогда на расстоянии x от ее центра

$$F = mg\frac{R^2}{x^2},$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{gR^2}{x^2}.$$

Мы видим, что закон, по которому изменяется ускорение этого тела, определяется коэффициентом gR^2. Отсюда следует, что искомая скорость зависит от R и gR^2, т. е. от R и g. Обозначая вторую космическую скорость через v_2, можем написать

$$v_2 = f(R, g).$$

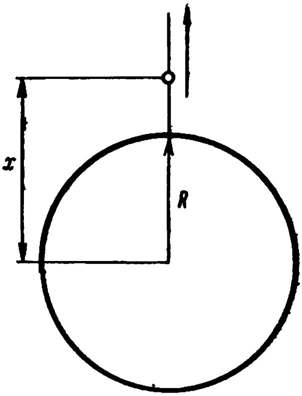


Рис. 3.

Далее, согласно методу размерностей, получим

$$[R^\alpha g^\beta] = [v_2],$$

$$[R] = L,\ [g] = LT^{-2},\ [v_2] = LT^{-1},$$

$$L^\alpha (LT^{-2})^\beta = LT^{-1},$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1, \\ -2\beta &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2},$$

$$R^\alpha g^\beta = \sqrt{Rg}.$$

Так как найденная степенная комбинация является единственной, то

$$v_2 = C\sqrt{Rg}.$$

Пример 5. Тело брошено вертикально вверх со скоростью, меньшей, чем вторая космическая. Пусть H обозначает высоту, на которую поднимется это тело. Исследовать зависимость H от v_0, g и R. (Сопротивление атмосферы не учитывать.)

Решение. Пусть $P(v_0, g, R)$ обозначает степенную комбинацию величин v_0, g и R, удовлетворяющую условию:

$$[P] = [H].$$

Так как непосредственно видно, что этому условию удовлетворяет $P = R$, а также $P = v_0^2/g$, то приходим к выводу, что величины v_0, g, R допускают безразмерные степенные комбинации. Найдем их.

Пусть

$$[v_0^\alpha g^\beta R^\gamma] = 1.$$

Учитывая, что

$$[v_0] = LT^{-1}, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [R] = L,$$

получаем

$$(LT^{-1})^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta}L^{\gamma}=1,$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=0,\\ -\alpha-2\beta&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha=-2\gamma,\quad \beta=\gamma,$$

где γ — произвольно. Следовательно,

$$v_0^{\alpha}g^{\beta}R^{\gamma}=v_0^{-2\gamma}g^{\gamma}R^{\gamma}=\left(\frac{gR}{v_0^2}\right)^{\gamma}.$$

Таким образом, каждая безразмерная комбинация рассматриваемых величин имеет вид $(gR/v_0^2)^{\gamma}$. Отсюда следует, что лишь одна из этих комбинаций, например, gR/v_0^2, является независимой. Поэтому

$$H=P\,F\left(\frac{gR}{v_0^2}\right),$$

где в качестве P можно взять, например, v_0^2/g. Таким образом,

$$H=\frac{v_0^2}{g}F\left(\frac{gR}{v_0^2}\right). \tag{44}$$

Что касается функции $F(gR/v_0^2)$, то метод размерностей не позволяет сделать о ней никаких заключений. Тем не менее, полученный результат представляет некоторый шаг вперед, ибо равенство $H=f(v_0, g, R)$ содержит неизвестную функцию трех аргументов, а равенство (44) — одного аргумента.

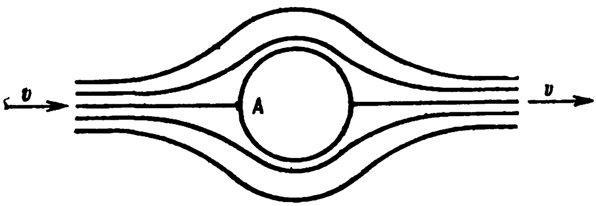


Рис 4

Пример 6. Поток несжимаемой идеальной жидкости обтекает шар (рис. 4). Пусть скорость потока равна v, давление жидкости вдали от шара равно нулю и давление в точке A равно p. Исследовать зависимость p от v.

Решение. Так как жидкость является идеальной, т. е. совершенно невязкой, то течение будет ламинарным, и линии тока будут выглядеть так, как показано на рис. 4. Искомое давление, очевидно, зависит от плотности жидкости ρ, от скорости потока v и, может быть, от радиуса шара R:

$$p = f(\rho, v, R)$$

Далее, пользуясь методом размерностей, получим

$$[\rho^{\alpha} v^{\beta} R^{\gamma}] = [p],$$
$$[\rho] = L^{-3}M, \ [v] = LT^{-1}, \ [R] = L, \ [p] = L^{-1}MT^{-2},$$
$$(L^{-3}M)^{\alpha} (LT^{-1})^{\beta} L^{\gamma} = L^{-1}MT^{-2},$$
$$\left.\begin{aligned} -3\alpha + \beta + \gamma &= -1, \\ \alpha &= 1, \\ -\beta &= -2. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 0,$$

и

$$\rho^{\alpha} v^{\beta} R^{\gamma} = \rho v^2.$$

Так как найденная степенная комбинация — единственная, то

$$p = C\rho v^2. \tag{45}$$

Равенство (45) показывает, что искомое давление пропорционально ρv^2 и не зависит от радиуса шара.

(В изложенном решении учитывалось лишь *динамическое* давление жидкости; если же учесть и статическое давление, то равенство (45) примет вид

$$p = p_0 + C\rho v^2, \tag{46}$$

где p_0 — давление жидкости вдали от шара.)

Пример 7. Найти силу F, с которой показанный на рис. 4 поток действует на шар.

Решение. Как и в предыдущем примере

$$F = f(\rho, v, R),$$
$$[\rho^{\alpha} v^{\beta} R^{\gamma}] = [F],$$
$$[\rho] = L^{-3}M, \ [v] = LT^{-1}, \ [R] = L, \ [F] = LMT^{-2},$$
$$(L^{-3}M)^{\alpha} (LT^{-1})^{\beta} L^{\gamma} = LMT^{-2},$$
$$\left.\begin{aligned} -3\alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ \alpha &= 1, \\ -\beta &= -2. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом,

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 2,$$
$$\rho^{\alpha} v^{\beta} R^{\gamma} = \rho v^2 R^2,$$
$$F = C\rho v^2 R^2, \qquad (47)$$

где C — неизвестный безразмерный коэффициент.

Соотношение (47) позволяет сделать интересный вывод. Так как это равенство верно при любых значениях v, то естественно предположить, что оно остается справедливым и в случае, когда v отрицательно (т. е. когда скорость направлена в противоположную сторону). Поэтому можно написать:

$$F(v) = C\rho v^2 R^2,$$
$$F(-v) = C\rho(-v)^2 R^2,$$

откуда

$$F(-v) = F(v). \qquad (48)$$

Однако, с другой стороны, ясно, что если изменить знак скорости, то должен измениться и знак F (ибо тогда сила F будет направлена в противоположную сторону). Поэтому должно выполняться также равенство

$$F(-v) = -F(v). \qquad (49)$$

Сравнивая теперь (48) и (49), получаем

$$F(v) = 0, \qquad (50)$$

или, что то же самое, $C = 0$.

Таким образом, можно ожидать, что сила, с которой рассматриваемый поток действует на шар, равна нулю. Точный расчет подтверждает это предположение (*Гидродинамический парадокс Даламбера — Эйлера*).

В заключение сделаем одно замечание.

Пусть точка движется с постоянной скоростью $v = 1$ *м/сек*. Тогда формула

$$s = vt$$

примет вид

$$s = t,$$

и, так как $[s] \neq [t]$, то это равенство, очевидно, не может быть получено методом размерностей. Причина этого ясна: она состоит в том, что величина v является *размерной*, и поэтому равенство $v=1$ выполняется не при любых еди ницах длины и времени. Приведенный пример показывает что, применяя к зависимости

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

метод размерностей, мы не вправе фиксировать числовое значение одного из ее *размерных* аргументов (или нескольких размерных аргументов).

В связи с этим возникает вопрос: почему в примерах **1** и **3** (о колебании маятника и падении камня) мы считали, что рассматриваемое движение начинается из состояния покоя? Ведь поступая таким образом, мы фиксировали числовое значение размерного аргумента v_0, а этого, как мы знаем, делать нельзя. Однако нетрудно видеть, что, полагая $v_0=0$, мы не вступаем в противоречие с методом размерностей. Дело в том, что хотя величина v_0 и является размерной, однако *равенство* $v_0=0$ *выполняется при любых единицах длины и времени* (в отличие от равенства $v=1$ в формуле $s=vt$). Следовательно, начальную скорость движения мы имели право считать равной нулю.

Вообще, если соотношение

$$u=f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \tag{51}$$

выполняется при любых единицах измерения основных величин, то это верно и для соотношения

$$u=f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n), \tag{52}$$

получающегося из (51) при $x_k=0$. Поэтому метод размерностей применим не только к зависимости (51), но и к зависимости (52).

§ 4. РАЗМЕРНЫЕ КОНСТАНТЫ. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ ОСНОВНЫХ И ПРОИЗВОДНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Размерные константы. Попробуем применить метод размерностей к выводу закона всемирного тяготения. Пусть массы притягивающихся точек равны m_1 и m_2, расстояние между ними равно r и сила притяжения равна F. Тогда искомая зависимость будет иметь вид

$$F=f(m_1, m_2, r). \tag{53}$$

Далее, согласно методу размерностей, получим

$$\left[m_1^{\alpha} m_2^{\beta} r^{\gamma}\right] = [F],$$

$$\left[m_1^{\alpha} m_2^{\beta} r^{\gamma}\right] = [m]^{\alpha+\beta}\ [r]^{\gamma} = L^{\gamma} M^{\alpha+\beta},$$

$$[F] = LMT^{-2}$$

и, следовательно,

$$L^{\gamma} M^{\alpha+\beta} = LMT^{-2}$$

Но так как в правой части этого равенства имеется член T^{-2}, а в левой части символ T отсутствует, то полученное соотношение не выполняется ни при каких α, β, γ Следовательно, метод размерностей не позволяет найти зависимость (53).

Мы видим, что закон всемирного тяготения оказался «вне компетенции» метода размерностей. Причина этого станет понятной, если учесть, что равенство (53) имеет вид

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{54}$$

где G — константа, зависящая от единиц длины, массы и времени Например, в системе *м, кг, сек* закон тяготения выражается равенством

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

а в системе *см, г, сек* — равенством

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

отличающимся от предыдущего Следовательно, закон всемирного тяготения не удовлетворяет основному требованию метода размерностей — *справедливости исследуемого равенства в любой системе основных единиц*

То, что метод размерностей не позволяет получить закон всемирного тяготеняя, представляется очевидным и с другой точки зрения. Дело в том, что формула

$$[F] = LMT^{-2}$$

была выведена нами из закона $F = ma$. Поэтому, пытаясь найти функцию (53) с помощью одного только метода размерностей, мы, в сущности, пытаемся вывести закон всемирного тяготения из равенства $F = ma$ Но так как ясно, что закон тяготения не является следствием второго закона динамики, то не удивительно, что нам не удается этого сделать.

Можно, однако, сделать так, что равенство, выражающее закон всемирного тяготения, будет справедливо при любых единицах длины, массы и времени Для этого достаточно записать его в виде (54) и считать коэффициент G *размерным*. Действительно, так как

$$G=\frac{Fr^2}{m_1m_2}, \qquad (55)$$

то этот коэффициент можно рассматривать как некоторую физическую величину, зависящую от F, r, m_1 и m_2 Тогда из (55) получим

$$[G]=\frac{[F][r]^2}{[m]^2}=\frac{LMT^{-2}\cdot L^2}{M^2}=L^3M^{-1}T^{-2}. \qquad (56)$$

Если считать, что G имеет найденную размерность, то равенство (54) будет верным, очевидно, при любых единицах длины, массы и времени

Таким образом, закон всемирного тяготения выражается равенством, в котором содержится размерная константа G. Рассматривая ее как одну из физических величин, определяющих силу F, можно написать

$$F=f(m_1,\ m_2,\ r,\ G) \qquad (57)$$

Мы можем теперь сказать, что неудача, постигшая нас при выводе закона всемирного тяготения, объясняется тем, что мы исходили не из равенства (57), а из равенства (53), т. е не учли, что F зависит также и от гравитационной постоянной G.

Заметим, что в равенстве (57) константа G фигурирует как величина *переменная*. Это объясняется тем, что, изменяя единицы длины, массы и времени, мы изменяем и числовое значение этой константы. В этом отношении она существенно отличается от такой константы, как, скажем, коэффициент π в формуле $S=\pi R^2$. Хотя правая часть этой формулы содержит величины π и R, однако равенство $S=f(R,\ \pi)$ не имеет смысла, так как коэффициент π — безразмерный и поэтому его числовое значение неизменно.

Закон всемирного тяготения — отнюдь не единственный пример физической зависимости, содержащей размерные постоянные. В качестве другого примера можно взять закон

$$W=mc^2,$$

связывающий энергию с массой; здесь фигурирует константа c^2, имеющая размерность квадрата скорости. Можно также указать на формулу

$$W = h\nu,$$

связывающую квант энергии с частотой излучения — в этой формуле присутствует константа h, имеющая размерность L^2MT^{-1} (постоянная Планка). Наконец, можно привести следующий простой пример. Возьмем формулу

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

и будем считать, что колебания совершаются *в фиксированной точке земного шара*. Тогда g будет некоторой константой и притом — размерной.

Приведенные примеры показывают, что наряду с размерными переменными физические формулы могут содержать и размерные постоянные.

В формулах евклидовой геометрии размерные константы отсутствуют. Однако в геометрии Лобачевского такая константа имеется. Например, площадь треугольника определяется здесь по формуле

$$S = a^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

где a — константа, имеющая размерность длины, а α, β, γ — углы треугольника.

(Из этой формулы, между прочим, следует, что в пространстве Лобачевского площадь треугольника не может быть больше πa^2.)

Разумеется, зависимость, являющаяся следствием равенства, содержащего размерную константу, тоже будет содержать эту константу (в общем случае). Это обстоятельство нужно учитывать, применяя метод размерностей к некоторым задачам.

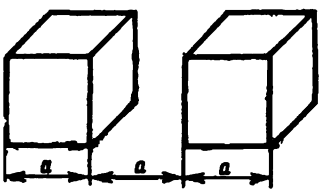


Рис. 5

Пример 8. Два одинаковых однородных куба расположены так, как показано на рис. 5. Пусть масса каждого куба равна m, ребро равно a и сила их гравитационного взаимодействия равна F. Исследовать функцию $F = f(m, a)$.

Решение. Сила F может зависеть от m, от a и от гравитационной постоянной G:

$$F = f(m, a, G).$$

Пользуясь методом размерностей, запишем:

$$[m^\alpha a^\beta G^\gamma] = [F],$$

$$[m] = M, \quad [a] = L, \quad [G] = L^3M^{-1}T^{-2}, \quad [F] = LMT^{-2},$$

$$M^\alpha L^\beta (L^3M^{-1}T^{-2})^\gamma = LMT^{-2},$$

$$\left.\begin{aligned} \beta + 3\gamma &= 1, \\ \alpha - \gamma &= 1, \\ -2\gamma &= -2, \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 1,$$

$$m^\alpha a^\beta G^\gamma = \frac{Gm^2}{a^2}.$$

Так как найденная степенная комбинация является единственной, то

$$F = C\frac{Gm^2}{a^2}, \tag{58}$$

где C — некоторый безразмерный коэффициент.

Пример 9. Планета движется вокруг Солнца по эллипсу. Исследовать зависимость $\tau = f(a, b)$, где a и b — полуоси эллипса, а τ — период обращения планеты.

Решение. Ускорение планеты равно

$$\frac{F}{m} = \frac{G\frac{Mm}{r^2}}{m} = \frac{GM}{r^2},$$

где M — масса Солнца. Так как зависимость F/m от r содержит размерную константу GM, то

$$\tau = f(a, b, GM), \tag{59}$$

где

$$[\tau] = T, \quad [a] = [b] = L,$$

$$[GM] = L^3M^{-1}T^{-2}M = \frac{L^3}{T^2}.$$

Далее, поскольку

$$\left[\frac{a^3}{GM}\right] = T^2,$$

то равенство (59) имеет вид

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \cdot \varphi(\delta_1, \delta_2, \ldots),$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — безразмерные комбинации величин a, b и GM. Но так как размерность $[GM]$ содержит символ T, а в размерностях $[a]$ и $[b]$ этот символ отсутствует, то из величин a, b и GM можно составить лишь одну независимую безразмерную комбинацию — отношение $\delta = \frac{a\,[GM]^0}{b} = \frac{a}{b}$. Следовательно,

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \cdot \varphi\left(\frac{a}{b}\right),$$

или

$$\tau^2 = a^3 F\left(\frac{a}{b}\right), \tag{60}$$

где F — некоторая неизвестная функция.

Равенство (60) показывает, что если орбиты двух планет *геометрически подобны*, то квадраты времен обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит. (Согласно третьему закону Кеплера это верно не только для геометрически подобных, но и для *любых* планетных орбит. Следовательно, соотношение (60) дает несколько меньше, чем третий закон Кеплера. Можно сказать, что, в конечном счете, этот закон сводится к равенству $F(a/b) = \text{const}$)

2. Различные системы основных и производных величин. Как уже говорилось, каждая система мер строится на нескольких основных величинах. Например, в механике такими величинами обычно служат длина, масса и время. Однако, как в механике, так и в других областях физики, систему основных величин можно выбирать совершенно произвольно (по крайней мере принципиально). Что касается величин производных, то здесь тоже имеется значительная свобода, так как, выбрав определенную систему основных величин, мы можем по-разному ввести меры производных величин.

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Система* LTF. Выберем в качестве основных величин *длину, время* и *силу*. Тогда массу можно будет рассматривать как величину производную и измерять ее отношением

$$m = \frac{F}{a}.$$

В этой системе мер

$$[F]=F, \tag{61}$$

$$[m]=\frac{[F]}{[a]}=\frac{F}{LT^{-2}}=L^{-1}T^2F, \tag{62}$$

$$[W]=[m][v]^2=L^{-1}T^2F(LT^{-1})^2=LF. \tag{63}$$

Естественно, что размерности этих величин отличаются от соответствующих размерностей в системе LMT.

II. *Система* LMTF. Выберем в качестве основных величин *длину, массу, время* и *силу*. Тогда мера силы не будет зависеть от меры массы, и поэтому равенство $F=ma$ станет неверным. Второй закон динамики будет теперь выражаться равенством

$$F=kma, \tag{64}$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности (так называемая инерционная постоянная). Из равенства (64) получаем

$$[k]=\frac{[F]}{[m][a]}=\frac{F}{M\cdot LT^{-2}}=L^{-1}M^{-1}T^2F \tag{65}$$

Следовательно, константа k является размерной.

Заметим, что если пользоваться этой системой, то константа k будет присутствовать не только во втором законе динамики, но и в некоторых других физических формулах. Например, равенство

$$Fs=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}$$

будет теперь иметь вид

$$Fs=k\left(\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}\right).$$

Чтобы сила была такой же основной величиной, как масса, нужно единицы измерения массы и силы считать произвольными и не зависящими друг от друга. Иначе говоря, единицу измерения массы следует считать равной a килограммов, а единицу измерения силы — b ньютонов, где a и b — произвольно выбираемые числа.

III. *Гравитационная мера силы*. Возьмем в качестве основных величин *длину, массу* и *время*, а силу будем измерять с помощью *закона всемирного тяготения*. С этой целью выберем такую единицу силы, при которой гравитационная постоянная обращается в единицу. Тогда закон тяготения примет вид

$$F=\frac{m_1m_2}{r^2},$$

и произведение m_1m_2/r^2 можно будет рассматривать как меру силы. В этом случае сила будет иметь размерность

$$[F]=\frac{[m]^2}{[r]^2}=\frac{M^2}{L^2}=L^{-2}M^2. \qquad (66)$$

Сравнивая полученное соотношение с известным равенством

$$[F]=LMT^{-2},$$

видим, что размерность производной величины может быть различной даже в одной и той же системе основных величин.

Измеряя силу в гравитационных единицах, мы, в сущности, сравниваем ее с силой всемирного тяготения. Так, например, равенство $F=2\,г^2/см^2$ означает, что сила F в два раза больше силы всемирного тяготения в случае $m_1=m_2=1$ *г* и $r=1$ *см*.

Так как сила измеряется теперь не произведением ma, то равенство $F=ma$ становится неверным, и второй закон динамики принимает вид

$$F=kma.$$

Из написанного равенства и равенства (66) находим размерность инерционной константы k:

$$[k]=\frac{[F]}{[m]\,[a]}=\frac{L^{-2}M^2}{M\cdot LT^{-2}}=L^{-3}MT^2.$$

IV. *Размерность температуры.* Температуру обычно измеряют в градусах и считают величиной основной. В этом случае она имеет размерность

$$[\Theta]=\Theta, \qquad (67)$$

где Θ — символ температуры. Добавив эту величину к длине, массе и времени, получим систему LMTΘ, состоящую из четырех основных величин.

Но температуру можно рассматривать и как величину производную. Это можно сделать следующим образом.

Как известно, для идеального газа справедливо равенство

$$\frac{mu^2}{2}=\frac{3}{2}k\Theta,$$

где m — масса одной молекулы, u — ее средняя квадратичная скорость, Θ — абсолютная температура и k — постоянная Больцмана (не зависящая от рода газа). Следовательно, температура газа пропорциональна кинетической энергии $mu^2/2$ и поэтому может измеряться в единицах энергии. В этом случае она будет иметь размерность

$$[\Theta] = \left[\frac{mu^2}{2}\right] = L^2MT^{-2}. \qquad (68)$$

Так как тело, находящееся в тепловом равновесии с газом, имеет температуру этого газа, то в энергетических единицах можно измерять температуру *любого* тела. Например, фраза «ртуть имеет температуру 10^{-20} *дж*» означает, что эта ртуть может находиться в тепловом равновесии с идеальным газом, у которого $mu^2/2 = 10^{-20}$ *дж*

Если измерять температуру в единицах энергии, то станут иными и размерности других тепловых величин. Найдем, например, размерность удельной теплоемкости.

Так как

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta\Theta},$$

где ΔQ — количество теплоты, а $\Delta\Theta$ — изменение температуры, то

$$[c] = \frac{[Q]}{[m]\,[\Theta]}.$$

Учитывая, что размерность теплоты равна размерности энергии, получим

$$[c] = \frac{L^2MT^{-2}}{M\,[\Theta]} = \frac{L^2T^{-2}}{[\Theta]},$$

и, следовательно:

1) в системе LMTΘ:

$$[c] = \frac{L^2T^{-2}}{\Theta} = L^2T^{-2}\Theta^{-1}, \qquad (69)$$

2) в системе LMT:

$$[c] = \frac{L^2T^{-2}}{L^2MT^{-2}} = M^{-1}. \qquad (70)$$

Мы видим, что эти размерности существенно различны.

Рассмотренные примеры ясно показывают, что размерность физической величины зависит от способа ее измерения.

Поэтому говорить о размерности той или иной величины можно лишь после того, как указана определенная система мер.

3. О выборе основных величин. Мы видели, что размерность физической величины существенно зависит от выбора основных величин. Естественно возникает вопрос: как это отражается на применении метода размерностей к тем или иным задачам? Для ответа на этот вопрос рассмотрим несколько примеров

1) На стр. 25 мы решали задачу о математическом маятнике, пользуясь системой LMT. Сделаем теперь это, пользуясь системой LTF *(длина, время, сила)*.

Как и раньше, имеем

$$\tau = f(l, m, P, \varphi_0),$$

$$[l^\alpha m^\beta P^\gamma] = [\tau],$$

$$[l] = L, \quad [m] = L^{-1}T^2F, \quad [P] = F, \quad [\tau] = T$$

(см равенства (61) и (62) на стр. 39). Следовательно,

$$L^\alpha (L^{-1}T^2F)^\beta F^\gamma = T,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \beta &= 0, \\ 2\beta &= 1, \\ \beta + \gamma &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\tau = l^{1/2} m^{1/2} P^{-1/2} F(\varphi_0) = F(\varphi_0)\sqrt{\frac{lm}{P}} = F(\varphi_0)\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Мы видим, что в системе LTF эта задача решается так же легко, как в системе LMT. (В том и в другом случае понадобилось решить систему трех уравнений с тремя неизвестными.)

2) Решим предыдущую задачу, пользуясь системой LMTF *(длина, масса, время, сила)*.

Так как движение маятника определяется вторым законом динамики, а последний имеет теперь вид

$$F = kma, \tag{71}$$

то искомый период будет зависеть и от k. Таким образом,

$$\tau = f(l, m, P, k, \varphi_0),$$

и задача сводится к отысканию степенной функции

$$l^\alpha m^\beta P^\gamma k^\delta,$$

удовлетворяющей равенству:

$$[l^\alpha m^\beta P^\gamma k^\delta] = [\tau].$$

Далее, с учетом (65), получим

$$[l] = L, \quad [m] = M, \quad [P] = F, \quad [k] = L^{-1}M^{-1}T^2F, \quad [\tau] = T,$$

$$L^\alpha M^\beta F^\gamma (L^{-1}M^{-1}T^2F)^\delta = T,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \delta &= 0, \\ \beta - \delta &= 0, \\ 2\delta &= 1, \\ \gamma + \delta &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{1}{2},$$

$$l^\alpha m^\beta P^\gamma k^\delta = l^{1/2} m^{1/2} P^{-1/2} k^{1/2} = \sqrt{\frac{kml}{P}}.$$

Так как найденная степенная комбинация является единственной, то

$$\tau = F(\varphi_0) \sqrt{\frac{kml}{P}}.$$

Но из (71) следует, что $P = kmg$. Поэтому

$$\tau = F(\varphi_0) \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Мы видим, что в системе LMTF решение этой задачи оказалось несколько более сложным (четыре уравнения с четырьмя неизвестными).

3) Рассмотрим задачу о притяжении двух кубов (пример 8 на стр 36). Будем, как и раньше, пользоваться системой LMT, но силу F будем измерять не в динамических единицах, а в гравитационных. Тогда она будет зависеть только от m и a (так как в законе всемирного тяготения теперь не будет

гравитационной постоянной G). Таким образом,

$$F=f(m,\ a),$$

$$[m^{\alpha}a^{\beta}]=[F].$$

Далее, учитывая соотношение (66), найдем

$$[m]=M,\quad [a]=L,\quad [F]=L^{-2}M^{2},$$

$$M^{\alpha}L^{\beta}=L^{-2}M^{2},$$

$$\alpha=2,\quad \beta=-2.$$

Следовательно,

$$F=C\frac{m^{2}}{a^{2}}.$$

Изложенное решение проще приведенного на стр 37.

Рассмотренные примеры показывают, что в одной системе физических величин решение задачи может оказаться более простым, а в другой — более сложным. В следующем параграфе мы встретимся с несколькими задачами, решение которых удобно проводить в специально выбранной системе основных величин.

§ 5. ПРИМЕРЫ ПО ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ

В электричестве, так же как в магнетизме, можно пользоваться различными системами основных величин. Одной из них является система LMT, удобная при решении задач чисто электрических (а не электромагнитных). В этой системе размерность заряда определяется из формулы

$$F=\frac{q_1q_2}{r^2},$$

размерность тока — из равенства

$$q=It,$$

размерность потенциала — из равенства

$$\varphi=\frac{A}{q}$$

и т. д. Ниже приводятся размерности некоторых электрических величин в этой системе (табл. 2).

В задачах электромагнитных удобна система LMTI, в которой основными величинами служат *длина, масса,*

Таблица 2

Размерности некоторых электрических величин в системе LMT

Величина	Размерность
Электрический заряд	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$
Поверхностная плотность заряда	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Линейиая плотность заряда . .	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Диэлектрическая проницаемость	1
Напряженность электрического поля	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Потенциал, напряжение	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Емкость	L
Ток	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$
Сопротивление	$L^{-1}T$
Электрическая энергия	L^2MT^{-2}
Электрическая мощность . . .	L^2MT^{-3}

время и *ток*. Размерность заряда определяется здесь из равенства

$$q = It,$$

размерность диэлектрической проницаемости — из соотношения

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

размерность магнитной проницаемости — из соотношения

$$F \sim \mu \frac{I_1 I_2 l}{r}$$

и т. д. *). В табл. 3 приводятся размерности некоторых электрических и магнитных величин в этой системе.

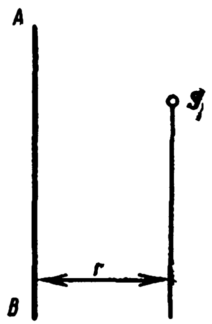


Рис. 6.

Пример 10. Электрическое поле создано зарядом, равномерно распределенным вдоль бесконечной прямой AB (рис. 6) Пусть напряженность этого поля в точке S равна E. Исследовать зависимость E от r.

*) Символ $\sim$ означает пропорциональность.

Таблица 3

Размерности некоторых электрических и магнитных величин в системе LMTI

Величина	Размерность	Единица измерения в системе СИ
Ток	I	*а*
Электрический заряд	TI	*k*
Диэлектрическая проницаемость . .	$L^{-3}M^{-1}T^{4}I^{2}$	*ф/м*
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	*в/м*
Потенциал, напряжение	$L^{2}MT^{-3}I^{-1}$	*в*
Емкость	$L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}$	*ф*
Сопротивление	$L^{2}MT^{-3}I^{-2}$	*ом*
Электрическая энергия	$L^{2}MT^{-2}$	*дж*
Электрическая мощность	$L^{2}MT^{-3}$	*вт*
Магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	*гн/м*
Напряженность магнитного поля .	$L^{-1}I$	*а/м*
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	*тл*
Поток магнитной индукции	$L^{2}MT^{-2}I^{-1}$	*вб*
Индуктивность	$L^{2}MT^{-2}I^{-2}$	*гн*

1-е решение Так как рассматриваемая задача — чисто электрическая, то будем пользоваться системой LMT. Из соображений симметрии следует, что

$$E = f(\tau, r),$$

где τ — линейная плотность заряда. Далее,

$$[\tau^{\alpha} r^{\beta}] = [E],$$

$$[\tau] = L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}, \quad [r] = L, \quad [E] = L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$$

(см. табл. 2). Поэтому

$$(L^{1/2}M^{1/2}T^{-1})^{\alpha}L^{\beta} = L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha + \beta &= -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}\alpha &= \frac{1}{2}, \\ -\alpha &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Полученная система трех уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1.$$

Следовательно,

$$\tau^{\alpha} r^{\beta} = \tau r^{-1},$$

$$E = C \frac{\tau}{r}. \tag{72}$$

2-е решение. В рассматриваемой задаче удобнее исходить из другой системы основных величин. В качестве таковой можно взять систему QL, в которой основными величинами являются *электрический заряд* и *длина*. Тогда τ будет иметь размерность

$$[\tau] = \left[\frac{q}{l}\right] = QL^{-1}, \tag{73}$$

а размерность E можно будет найти из закона Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

и равенства

$$E = \frac{F}{q}.$$

Сделав это, получим

$$[F] = \frac{[q]^2}{[r]^2} = Q^2 L^{-2},$$

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{Q^2 L^{-2}}{Q} = QL^{-2}. \tag{74}$$

Далее,

$$[\tau^{\alpha} r^{\beta}] = [E],$$

$$[\tau] = QL^{-1}, \quad [r] = L, \quad [E] = QL^{-2},$$

$$(QL^{-1})^{\alpha} L^{\beta} = QL^{-2},$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = 1, \\ -\alpha + \beta = -2. \end{array}\right\}$$

Таким образом,

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1$$

и

$$E = C \frac{\tau}{r}.$$

Замечание. Система QL является *электростатической* и поэтому не охватывает таких физических величин, как, например, масса или время Однако это не существенно, так как рассмотренная задача *не* выходит за пределы электростатики.

Пример 11. Поле образовано зарядом, равномерно распределенным на бесконечной плоскости. Исследовать зависимость E от r (r — расстояние от данной точки до плоскости).

Решение. В данном случае

$$E=f(\sigma, r),$$

где σ — поверхностная плотность заряда. Далее, пользуясь системой QL, получим:

$$(\sigma^{\alpha}r^{\beta}]=[E],$$

$$[\sigma]=\frac{[q]}{[l]^2}=QL^{-2},\quad [r]=L,\quad [E]=QL^{-2}$$

(см. равенство (74), полученное при решении предыдущей задачи). Поэтому

$$(QL^{-2})^{\alpha}L^{\beta}=QL^{-2},$$

откуда

$$\alpha=1,\quad \beta=0,$$

$$\sigma^{\alpha}r^{\beta}=\sigma.$$

Следовательно,

$$E=C\sigma, \tag{75}$$

т. е. напряженность этого поля пропорциональна плотности заряда и не зависит от расстояния r.

Пример 12. Проводник имеет форму куба со стороной a. Исследовать функцию $C=f(a)$, где C — электроемкость куба.

1-е решение. Будем пользоваться системой QL. Поскольку

$$[C]=\frac{[q]}{[\varphi]}=\frac{[q]}{[El]}=\frac{Q}{[E]L},$$

где φ — потенциал, а E — напряженность, то, согласно (74), получим

$$C=\frac{Q}{QL^{-2}L}=L.$$

Тогда

$$C=f(a),\quad [a^{\alpha}]=[C],$$

$$L^{\alpha}=L \text{ и } \alpha=1.$$

Таким образом, $a^{\alpha}=a$ и

$$C=ka, \tag{76}$$

где k — некоторый коэффициент. Следовательно, емкость куба пропорциональна его ребру.

2-е решение. Будем пользоваться системой LMTI. В этом случае искомая зависимость будет иметь вид

$$C = f(\varepsilon_0, a),$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Далее ищем степенную комбинацию $\varepsilon_0^\alpha a^\beta$, удовлетворяющую условию

$$[\varepsilon_0^\alpha a^\beta] = [C].$$

Учитывая, что

$$[\varepsilon_0] = L^{-3}M^{-1}T^4I^2, \quad [a] = L, \quad [C] = L^{-2}M^{-1}T^4I^2,$$

(см. табл. 3), получим

$$(L^{-3}M^{-1}T^4I^2)^\alpha L^\beta = L^{-2}M^{-1}T^4I^2.$$

Из этого равенства непосредственно видно, что

$$\alpha = \beta = 1.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_0^\alpha a^\beta = \varepsilon_0 a$$

и

$$C = k\varepsilon_0 a. \tag{77}$$

Пример 13. Рассмотрим произвольную точку A электрического поля. Примем ее за центр и опишем вокруг нее сферу небольшого объема V. Обозначим через W энергию поля, заключенного внутри этой сферы и вычислим предел

$$w = \lim_{V \to 0} \frac{W}{V}.$$

Этот предел называется *плотностью энергии электрического поля в точке A*.

Если поле образовано в среде с диэлектрической проницаемостью ε, то естественно ожидать, что w зависит только от ε и E, где E — напряженность поля в данной точке. Примем эту гипотезу и исследуем зависимость $w = f(\varepsilon, E)$.

1-е решение. Будем пользоваться системой LMT. Тогда ε будет величиной безразмерной, из чего заключаем, что зависимость $w = f(\varepsilon, E)$ имеет вид

$$w = E^\alpha \varphi(\varepsilon). \tag{78}$$

Далее имеем:

$$[E^\alpha] = [w],$$

$$[E] = L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$$

$$[w] = \frac{[W]}{[V]} = \frac{L^2MT^{-2}}{L^3} = L^{-1}MT^{-2}.$$

Следовательно,

$$(L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1})^\alpha = L^{-1}MT^{-2},$$

откуда

$$\alpha = 2$$

и зависимость (78) принимает вид

$$w = E^2\varphi(\varepsilon). \tag{79}$$

Функция $\varphi(\varepsilon)$ остается при этом неопределенной.

2-е решение Будем пользоваться системой LMTI. В этой системе получим

$$w = f(\varepsilon, E),$$

$$[\varepsilon^\alpha E^\beta] = [w],$$

$$[\varepsilon] = L^{-3}M^{-1}T^4I^2, \quad [E] = LMT^{-3}I^{-1}, \quad [w] = \frac{[W]}{[V]} = L^{-1}MT^{-2}$$

(см табл 3). Следовательно,

$$(L^{-3}M^{-1}T^4I^2)^\alpha (LMT^{-3}I^{-1})^\beta = L^{-1}MT^{-2},$$

$$\left.\begin{aligned} -3\alpha + \beta &= -1, \\ -\alpha + \beta &= 1, \\ 4\alpha - 3\beta &= -2, \\ 2\alpha - \beta &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2$$

и

$$\varepsilon^\alpha E^\beta = \varepsilon E^2.$$

Таким образом,

$$w = C\varepsilon E^2. \tag{80}$$

Равенство (80) дает более полное решение этой задачи, нежели равенство (79).

Пример 14. По бесконечно длинному соленоиду радиуса R протекает ток I Пусть H обозначает напряженность магнитного поля на оси соленоида. Исследовать зависимость H от I и R.

Решение. Искомая напряженность H, очевидно, пропорциональна числу витков, приходящихся на единицу длины. Обозначив эту величину через n, можем написать

$$H = nf(I, R)$$

Далее будем иметь

$$[n][I^{\alpha}R^{\beta}] = [H],$$

$$[n] = L^{-1}, \quad [I] = I, \quad [R] = L, \quad [H] = L^{-1}I,$$

$$L^{-1}I^{\alpha}L^{\beta} = L^{-1}I,$$

откуда

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

Следовательно,

$$H = CnI. \tag{81}$$

Мы видим, что искомая напряженность не зависит от радиуса соленоида

Пример 15. Исследовать зависимость индуктивного сопротивления от ω и L и емкостного сопротивления от ω и C (ω — частота переменного синусоидального тока)

Решение. В данном случае удобно пользоваться не системой LMTI, а другой, специально построенной для решения этой задачи

Пусть в цепи переменного тока (не обязательно синусоидального) имеется участок с омическим, индуктивным или емкостным сопротивлением (рис 7) Тогда в первом из этих случаев

$$U = IR, \tag{82}$$

во втором

$$U = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \tag{83}$$

и в третьем —

$$\left.\begin{aligned} Q &= CU, \\ \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= I, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

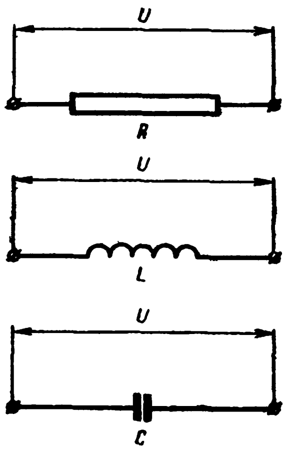


Рис. 7

причем равенства (82)—(84) полностью определяют закономерности изменения тока на рассматриваемых участках. Поэтому для решения поставленной задачи целесообразно ввести систему IUT, в которой основными величинами являются ток, *напряжение* и *время*. Тогда из равенств (82)—(84) получим

$$[R]=\frac{[U]}{[I]}=I^{-1}U, \tag{85}$$

$$[L]=\frac{[U]\,[t]}{[I]}=\frac{UT}{I}=I^{-1}UT, \tag{86}$$

$$[C]=\frac{[Q]}{[U]}=\frac{[I]\,[t]}{[U]}=\frac{IT}{U}=IU^{-1}T. \tag{87}$$

Теперь, пользуясь этими размерностями, найдем:

1) Для зависимости $R_{\text{инд}}$ от ω и L:

$$R_{\text{инд}}=f(\omega,\ L),$$
$$[\omega^{\alpha}L^{\beta}]=[R],$$

где $[\omega]=T^{-1}$, а $[L]$ и $[R]$ определяются равенствами (86) и (85). Следовательно,

$$(T^{-1})^{\alpha}\,(I^{-1}UT)^{\beta}=I^{-1}U,$$
$$\left.\begin{aligned}-\beta&=-1,\\ \beta&=1,\\ -\alpha+\beta&=0,\end{aligned}\right\}$$
$$\alpha=\beta=1,$$
$$\omega^{\alpha}L^{\beta}=\omega L,$$
$$R_{\text{инд}}=k\omega L, \tag{88}$$

где k — постоянный коэффициент.

2) Для зависимости $R_{\text{емк}}$ от ω и C:

$$R_{\text{емк}}=f(\omega,\ C),$$
$$[\omega^{\alpha}C^{\beta}]=[R],$$
$$(T^{-1})^{\alpha}\,(IU^{-1}T)^{\beta}=I^{-1}U$$

($[C]$ — из равенства (87), полученного выше). Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\beta&=-1,\\ -\beta&=1,\\ -\alpha+\beta&=0,\end{aligned}\right\}$$
$$\alpha=\beta=-1,$$
$$\omega^{\alpha}C^{\beta}=\frac{1}{\omega C},$$
$$R_{\text{емк}}=\frac{k}{\omega C}, \tag{89}$$

где $k=\text{const}$.

При решении этой задачи предполагалось, что $R_{инд}$ зависит только от ω и L, а $R_{емк}$ — только от ω и C, т. е. считалось очевидным, что $R_{инд}$ и $R_{емк}$ не зависят от приложенного напряжения U. Можно было этого предположения не делать и считать, что рассматриваемые сопротивления зависят также и от U. В этом случае мы получили бы систему трех уравнений с тремя неизвестными в, в конечном счете, пришли бы к тому же результату.

Пример 16. Найти период колебаний в колебательном контуре, изображенном на рис. 8.

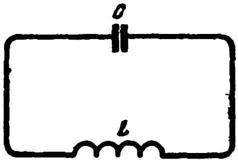


Рис. 8.

Р е ш е н и е. Будем опять пользоваться системой IUT, введенной в предыдущем примере. Искомый период колебаний может зависеть от L, C и, возможно, от первоначального заряда q_0 конденсатора. Таким образом,

$$\tau = f(L, C, q_0),$$

$$[L^\alpha C^\beta q_0^\gamma] = [\tau],$$

где τ — период колебаний. Далее имеем:

$$[L] = I^{-1}UT, \quad [C] = IU^{-1}T, \quad [q_0] = IT, \quad [\tau] = T,$$

$$(I^{-1}UT)^\alpha (IU^{-1}T)^\beta (IT)^\gamma = T,$$

$$\left.\begin{aligned} -\alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta &= 0, \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 0.$$

$$L^\alpha C^\beta q_0^\gamma = \sqrt{LC}.$$

Следовательно,

$$\tau = k\sqrt{LC}, \tag{90}$$

где k — некоторый постоянный коэффициент.

§ 6. ПРИМЕРЫ ИЗ ДРУГИХ ОБЛАСТЕЙ ФИЗИКИ

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров из молекулярной физики, теплоты и оптики.

Пример 17. Сосуд наполнен идеальным газом. Какова зависимость давления этого газа от средней скорости его молекул?

Решение. Так как газ является идеальным, то его можно рассматривать как совокупность материальных точек, хаотически движущихся внутри сосуда. Поэтому искомое давление может зависеть от трех величин: от массы одной молекулы, от ее средней скорости и от числа молекул в единице объема. Обозначив эти величины через m, u, n_0 получим:

$$p = f(m, u, n_0),$$

$$[m^\alpha u^\beta n_0^\gamma] = [p],$$

$$[m] = M, \quad [u] = LT^{-1}, \quad [n_0] = L^{-3}, \quad [p] = L^{-1}MT^{-2}$$

(в системе LMT). Следовательно,

$$M^\alpha (LT^{-1})^\beta (L^{-3})^\gamma = L^{-1}MT^{-2},$$

$$\left.\begin{aligned} \beta - 3\gamma &= -1, \\ \alpha &= 1, \\ -\beta &= -2, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1,$$

$$m^\alpha u^\beta n_0^\gamma = mu^2 n_0.$$

Так как найденная степенная комбинация является единственной, то

$$p = Cmu^2 n_0. \tag{91}$$

Полученный результат показывает, что давление идеального газа пропорционально квадрату скорости его молекул.

Обозначим объем газа через V. Тогда

$$n_0 = \frac{n}{V}, \tag{92}$$

где n — общее число молекул. Подставив (92) в (91), получим

$$pV = Cmu^2 n. \tag{93}$$

Если считать известным, что абсолютная температура газа пропорциональна кинетической энергии $mu^2/2$, то равенство (93) можно записать в виде

$$pV = nkT, \tag{94}$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности (постоянная Больцмана).

Пример 18. Доказать, что скорость звука в газе пропорциональна $\sqrt{T}$, где T — абсолютная температура.

Решение. Скорость звука есть скорость распространения волны сжатия или разрежения. Так как эта скорость велика, то процесс сжатия и расширения газа протекает очень быстро и поэтому не сопровождается теплообменом между соседними участками. Следовательно, этот процесс является адиабатическим.

Искомая скорость, очевидно, зависит от плотности газа, от его давления и от его упругости. Но последняя определяется соотношением:

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k,$$

связывающим изменение давления с изменением плотности при адиабатическом процессе. Следовательно,

$$v=f(p,\ \rho,\ k),$$

где k — показатель адиабаты данного газа (для воздуха $k=7/5$). Учитывая, что k — величина безразмерная, получим

$$[p^\alpha\rho^\beta]=[v],$$

$$[p]=L^{-1}MT^{-2},\ [\rho]=L^{-3}M,\ [v]=LT^{-1},$$

$$(L^{-1}MT^{-2})^\alpha(L^{-3}M)^\beta=LT^{-1},$$

$$\left.\begin{aligned} -\alpha-3\beta &= 1,\\ \alpha+\beta &= 0,\\ -2\alpha &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=-\frac{1}{2},$$

$$p^\alpha\rho^\beta=\sqrt{\frac{p}{\rho}},$$

и поэтому

$$v=\varphi(k)\sqrt{\frac{p}{\rho}},$$

где $\varphi(k)$ — некоторая (неизвестная) функция от k. Но

$$\frac{p}{\rho}=RT,$$

где R — газовая постоянная, а T — абсолютная температура. Поэтому

$$v=\varphi(k)\sqrt{R}\sqrt{T},$$

или

$$v=\lambda\sqrt{T}, \tag{95}$$

где λ — размерный коэффициент, зависящий от R и k, т. е. от рода газа.

Пример 19. Скорость звука в твердой среде, очевидно, зависит от ρ и E, где ρ — плотность среды, а E — ее модуль упругости. Исследовать эту зависимость.

Решение. Так как

$$v=f(\rho,\ E),$$

то

$$[\rho^\alpha E^\beta]=[v],$$

где

$$[\rho]=L^{-3}M,\ [E]=L^{-1}MT^{-2},\ [v]=LT^{-1}$$

($[E]$ — см. в табл. 1 на стр. 24). Следовательно,

$$(L^{-3}M)^\alpha (L^{-1}MT^{-2})^\beta=LT^{-1},$$

$$\left.\begin{aligned} -3\alpha-\beta&=1,\\ \alpha+\beta&=0,\\ -2\beta&=-1,\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{1}{2},$$

$$\rho^\alpha E^\beta=\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

и

$$v=C\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{96}$$

В этом примере, так же как в предыдущем, предполагалось известным, что скорость звука зависит только от свойств среды, а не характера самого звука.

Пример 20. Круглая капиллярная трубка опущена в сосуд с жидкостью. Высота подъема жидкости равна h, внутренний радиус трубки равен r, удельный вес жидкости d, а ее поверхностное натяжение равно σ. Исследовать зависимость $h=f(r,\ d,\ \sigma)$ (краевой угол мениска предполагается равным нулю).

Решение. В системе LMT имеем:

$$[h]=L,\ [r]=L,\ [d]=L^{-2}MT^{-2}, \tag{97}$$

$$[\sigma]=\frac{[F]}{[l]}=\frac{LMT^{-2}}{L}=MT^{-2}. \tag{98}$$

Так как $[h]=[r]$, то зависимость $h=f(r, d, \sigma)$ имеет вид

$$h=rF(\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots), \tag{99}$$

где δ_1, δ_2, ... — безразмерные степенные комбинации величин r, d и σ. Найдем их.

Пусть

$$[r^\alpha d^\beta \sigma^\gamma]=1.$$

Тогда из (97) и (98) получим

$$L^\alpha (L^{-2}MT^{-2})^\beta (MT^{-2})^\gamma=1,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha-2\beta&=0,\\ \beta+\gamma&=0,\\ -2\beta-2\gamma&=0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha=-2\gamma,\quad \beta=-\gamma,$$

где γ — произвольно. Следовательно,

$$r^\alpha d^\beta \sigma^\gamma=r^{-2\gamma}d^{-\gamma}\sigma^\gamma=\left(\frac{\sigma}{r^2d}\right)^\gamma.$$

Так как каждая комбинация такого вида выражается через σ/r^2d, то зависимость (99) имеет вид

$$h=rF\left(\frac{\sigma}{r^2d}\right). \tag{100}$$

Функция F остается при этом неопределенной.

Пример 21. Тонкая раскаленная проволока расположена вдоль оси цилиндра и освещает его внутреннюю поверхность. Считая проволоку и цилиндр бесконечно длинными, найти зависимость освещенности от радиуса цилиндра.

Решение. Будем пользоваться системой JL, в которой основными величинами являются *сила света* и *расстояние*. Тогда освещенность будет иметь размерность.

$$[E]=\frac{[J]}{[r^2]}=JL^{-2}.$$

Освещенность цилиндра, очевидно, зависит от его радиуса и от силы света, излучаемого единицей длины проволоки. Обозначив эту силу света через i, получим

$$E = f(R,\ i),$$
$$[R^{\alpha} i^{\beta}] = [E],$$

где

$$[R] = L, \quad [i] = \frac{[J]}{[l]} = JL^{-1}, \quad [E] = JL^{-2}.$$

Следовательно,

$$L^{\alpha}(JL^{-1})^{\beta} = JL^{-2},$$
$$\left.\begin{aligned} \beta &= 1, \\ \alpha - \beta &= -2, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1,$$
$$R^{\alpha} i^{\beta} = \frac{i}{R},$$
$$E = C\frac{i}{R}. \qquad (101)$$

Таким образом, освещенность этого цилиндра обратно пропорциональна его радиусу.

Пример 22. Тонкий пучок параллельных лучей падает на поверхность стеклянного шара, как показано на рис. 9.

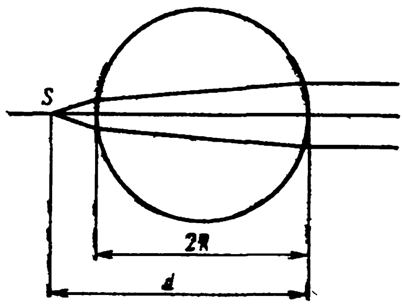


Рис. 9.

Считая, что преломленные лучи собираются в точке S, найти зависимость d от R.

Решение. Очевидно,

$$d = f(R,\ n),$$

где n — показатель преломления стекла. Но так как $[d]=[R]$ и $[n]=1$, то

$$d=R\varphi(n), \qquad (102)$$

т. е. расстояние d пропорционально радиусу R.

§ 7. О ЧИСЛЕ ОСНОВНЫХ ВЕЛИЧИН

Мы знаем, что систему основных величин можно выбирать различным образом. Например, в механике можно пользоваться как системой LMT, так и системой LTF или $LMTF$. Так как последняя строится не на трех основных величинах, а на четырех, то возникает вопрос: сколько вообще основных величин должна содержать система физических мер? Мы сейчас увидим, что это число является совершенно произвольным и может быть как увеличено, так и уменьшено (по крайней мере принципиально).

Прежде всего ясно, что любую физическую величину можно при желании рассматривать как основную. Возьмем, например, скорость. Чтобы сделать эту величину основной, достаточно единицу измерения скорости считать произвольной и не связывать ее с единицами измерения длины и времени (например, измеряя длину в *м* и время — в *сек*, считать единицу измерения скорости равной *2 см/мин* или *5 км/ч*). Аналогичным путем можно поступить и с любой другой физической величиной — ускорением, силой, энергией и т. п. Следовательно, число основных величин может быть произвольным образом увеличено.

При этом в физических формулах появятся размерные константы, которых до этого не было. Так, если скорость считать величиной основной, то равенство

$$s=ut$$

заменится на

$$s=kut,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Так как числовое значение этого коэффициента зависит от единиц, в которых измеряются длина, время и скорость, то он является величиной размерной

Но число основных величин можно и уменьшить. Например, в задачах механики можно пользоваться системой, состоящей не из трех основных величин, а только из двух. Это можно сделать следующим образом. Выберем в качестве основных величин *длину* и *время*, а силу и массу будем измерять таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$F = ma$$

и

$$F = \frac{m_1 m_2}{r_2}$$

(т. е. чтобы формулы второго закона динамики и закона всемирного тяготения не содержали размерных коэффициентов). Тогда

$$[F] = [m][a],$$

$$[F] = \frac{[m]^2}{[r]^2},$$

или, более подробно,

$$[F] = [m] \cdot LT^{-2},$$

$$[F] = [m]^2 \cdot L^{-2}.$$

Из этой системы уравнений находим

$$[m] = L^3 T^{-2},$$

$$[F] = L^4 T^{-4},$$

т. е. как масса, так и сила стали теперь величинами производными, имеющими определенные размерности относительно длины и времени.

Полученная система, которую можно назвать системой LT, содержит всего две основные величины — длину и время.

Найдем связь между мерами массы в системе LT и в системе LMT.

Пусть две одинаковые массы притягиваются друг к другу и приобретают вследствие этого некоторое ускорение. Тогда в системе LMT (например, в системе *м, кг, сек*)

$$\left.\begin{aligned} F &= G\,\frac{m^2}{r^2}, \\ F &= ma. \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Перейдем теперь к системе LT (*м, сек*). Тогда массе m нужно будет приписать величину m', а силе F — величину F', причем так, чтобы выполнялись соотношения:

$$F' = \frac{(m')^2}{r^2}, \qquad (104)$$

$$F' = m'a. \qquad (105)$$

Но из (103) следует, что

$$a = G\frac{m}{r^2},$$

и поэтому равенство (105) приобретает вид

$$F' = m'G\frac{m}{r^2}. \qquad (106)$$

Сравнивая теперь (104) и (106), получим

$$\frac{(m')^2}{r^2} = m'G\frac{m}{r^2},$$

откуда

$$m' = Gm. \qquad (107)$$

Полученное соотношение дает связь между мерами массы в системе LT и в системе LMT Из него, в частности, следует, что

$$[m'] = [G]\,[m] = L^3M^{-1}T^{-2}\cdot M = L^3T^{-2}.$$

Мы видим, что построение системы LT можно осуществить посредством формального применения равенства (107), т. е. посредством умножения массы m на коэффициент G, имеющий размерность $L^3M^{-1}T^{-2}$.

Удобна ли система LT? В некотором отношении — да, ибо закон всемирного тяготения выражается в ней проще, чем в системе LMT. Однако применение метода размерностей может оказаться здесь менее эффективным. Пусть, например, нужно найти ускорение цилиндра из примера **2** (стр. 26). Решая эту задачу в системе LT, будем иметь

$$a = f(F,\ m,\ R),$$

$$[F^{\alpha}m^{\beta}R^{\gamma}] = [a],$$

$$[F] = L^4T^{-4},\quad [m] = L^3T^{-2},\quad [R] = L,\quad [a] = LT^{-2},$$

$$(L^4T^{-4})^{\alpha}\,(L^3T^{-2})^{\beta}\,L^{\gamma} = LT^{-2}$$

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha + 3\beta + \gamma &= 1,\\ -4\alpha - 2\beta &= -2.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений с тремя неизвестными и, следовательно, не сможем найти α, β, γ. (В системе LMT эти показатели определялись однозначно.)

Причину этого нетрудно понять. Дело в том, что рассматриваемая задача — чисто динамическая и никак не связана с явлениями гравитации. Поэтому такие величины, как длина, время и масса являются здесь, по существу, независимыми. Пользуясь же системой LT, мы устанавливаем между ними размерную связь, причем делаем это с помощью закона тяготения, который в данном случае является «посторонним». В результате, различие между этими величинами оказывается в какой-то степени стертым.

Возможно ли дальнейшее сокращение числа основных величин? Нетрудно видеть, что да.

Условимся измерять расстояния в световых годах, световых минутах и т. п. Тогда каждая длина будет измеряться некоторым интервалом времени и, следовательно, будет иметь размерность T. Таким образом, мы получим систему, состоящую из одной основной величины — времени.

Ясно, однако, что подобная система неудобна, ибо в ней все «измеряется на один аршин». Многие физические величины будут здесь иметь одинаковую размерность *(длина, время, масса, работа)*, а многие другие станут безразмерными *(скорость, сила, мощность)*. Понятно, что метод размерностей будет в этой системе мало эффективным.

Систему LT мы строили, используя закон всемирного тяготения, а систему T — используя скорость света. Однако можно было бы поступить проще.

Условимся так выбирать единицу измерения массы, чтобы она зависела от единиц измерения длины и времени. Пусть λ обозначает число сантиметров в единице длины, τ — число секунд в единице времени и μ — число граммов в единице массы. Тогда положив

$$\mu = f(\lambda, \tau) = k\lambda^p\tau^q,$$

где k, p и q — произвольные числа, мы получим систему, в которой масса является величиной производной. Легко видеть, что она будет иметь размерность

$$[m] = L^pT^q.$$

Таким способом можно построить сколько угодно систем с двумя основными величинами. (В частности, можно взять $p = q = 0$. Тогда единица измерения массы будет фиксированной и масса станет величиной безразмерной.) Аналогичным путем можно построить и систему с одной основной величиной.

Итак, число основных величин может быть уменьшено до двух и даже до одной. Дальнейшее сокращение числа основных величин привело бы нас к системе, не содержащей ни одной основной величины. В такой системе единицы измерения всех величин будут раз и навсегда заданы, и поэтому понятие размерности вообще потеряет смысл.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели ряд примеров, иллюстрирующих метод размерностей. В заключение коротко остановимся на возможностях этого метода.

Прежде всего следует подчеркнуть, что метод размерностей совершенно не затрагивает *физической стороны* рассматриваемого явления. В сущности, это чисто математический прием, основанный на некоторых соображениях «масштабного характера». Поэтому сам по себе он никогда не может привести к установлению какого-либо нового физического закона.

Действительно, мы знаем, что метод размерностей применим *только* к таким зависимостям, которые справедливы при любых единицах измерения основных величин (инвариантны относительно изменения этих единиц). Поэтому, пытаясь исследовать методом размерностей зависимость

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{108}$$

мы должны быть уверены, что для нее это требование выполняется. Но иметь такую уверенность можно *только в одном случае:* когда известно, что зависимость (108) может быть получена *из ранее известных соотношений*, удовлетворяющих высказанному требованию инвариантности. Отсюда следует, что метод размерностей позволяет получать лишь те соотношения, которые являются *математическими следствиями уже известных законов.* (Можно сказать, что метод размерностей позволяет получать только то, что может быть установлено и без него.)

Однако, несмотря на весьма ограниченные возможности этого метода, он все же нередко оказывается полезным.

Во-первых, метод размерностей очень прост в математическом отношении. И хотя получаемые с его помощью результаты всегда содержат некоторую неопределенность (в виде неизвестной константы или неизвестной функции), тем не менее они позволяют получить известное представление о характере искомой зависимости. В ряде случаев полученная таким путем информация оказывается достаточной.

Во-вторых, метод размерностей может быть использован при экспериментальном определении некоторых зависимостей. Пусть, например, нужно найти силу сопротивления жидкости движущемуся в ней шару. В этом случае

$$F = f(R, v, \rho, \eta), \tag{109}$$

где F — искомая сила сопротивления, R — радиус шара, v — его скорость, ρ — плотность жидкости и η — ее вязкость. Так как функция (109) содержит четыре аргумента, то ее непосредственное экспериментальное определение требует очень большого числа опытов. Однако, применив к этой зависимости метод размерностей, придем к выводу, что она имеет вид

$$F=\rho v^2R^2\cdot\varphi\left(\frac{Rv\rho}{\eta}\right),$$

т. е. выражается через неизвестную функцию одного лишь аргумента $Rv\rho/\eta$ (так называемое число Рейнольдса). Таким образом, метод размерностей позволяет значительно сократить число опытов, нужных для определения зависимости (109).

В-третьих, метод размерностей можно использовать для оценки порядка некоторых физических величин. Например, определяя на стр. 49 электроемкость куба, мы получили для нее выражение

$$C=k\varepsilon_0 a,$$

где k — некоторый безразмерный коэффициент. И хотя этот коэффициент неизвестен, однако он, несомненно, является величиной, сравнимой с единицей. (Очень мало вероятно, что число, характеризующее столь простую конструкцию, как куб, может в десятки или сотни раз отличаться от единицы.) Поэтому можно утверждать, что электроемкость куба имеет величину порядка $\varepsilon_0 a$.

Таковы в общих чертах возможности метода размерностей.

В заключение еще раз подчеркнем, что размерность есть чисто математическая характеристика физической величины и ни в коем случае не может рассматриваться как отражение ее «физической сущности».

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. О степенном характере формулы размерности. На стр. 17 указывалось, что если π есть однозначная функция α, то она является степенной. Докажем это.

Пусть π — однозначная функция α:

$$\pi = \pi(\alpha).$$

Предположим, что величина P имела числовое значение p. Увеличим меру основной величины A сначала в α раз, а затем еще в β раз. Тогда производная величина P сначала примет значение

$$p' = p \cdot \pi(\alpha),$$

а затем — значение

$$p'' = p' \cdot \pi(\beta) = p \cdot \pi(\alpha) \cdot \pi(\beta). \tag{1}$$

Но так как меру величины A мы увеличили в общей сложности в $\alpha\beta$ раз, то число p'' должно быть равно

$$p'' = p \cdot \pi(\alpha\beta). \tag{2}$$

Сравнивая теперь равенства (1) и (2), видим, что

$$\pi(\alpha\beta) = \pi(\alpha) \cdot \pi(\beta). \tag{3}$$

Таким образом, функция $\pi(\alpha)$ удовлетворяет функциональному уравнению (3), и задача сводится к решению этого уравнения.

Дифференцируя (3) по α и по β, получим

$$\beta\pi'(\alpha\beta) = \pi'(\alpha)\,\pi(\beta),$$
$$\alpha\pi'(\alpha\beta) = \pi(\alpha)\,\pi'(\beta).$$

Разделив теперь первое равенство на второе, найдем

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi'(\alpha)}{\pi(\alpha)} \cdot \frac{\pi(\beta)}{\pi'(\beta)},$$

или

$$\alpha \frac{\pi'(\alpha)}{\pi(\alpha)} = \beta \frac{\pi'(\beta)}{\pi(\beta)}.$$

Но так как числа α и β произвольны, то приходим к выводу, что

$$\alpha \frac{\pi'(\alpha)}{\pi(\alpha)} = \text{const} = k,$$

откуда после интегрирования полученного дифференциального уравнения будем иметь

$$\pi(\alpha) = C\alpha^k.$$

Таким образом,

$$\pi(\alpha) = C\alpha^k, \quad \pi(\beta) = C\beta^k,$$
$$\pi(\alpha\beta) = C(\alpha\beta)^k$$

Подставив теперь эти выражения в (3), получим

$$C(\alpha\beta)^k = C^2\alpha^k\beta^k,$$

откуда $C = 1$. Следовательно,

$$\pi(\alpha) = \alpha^k. \tag{4}$$

Равенство (4) показывает, что размерность величины P относительно величины A имеет вид A^k, и так как это верно для любой основной величины, от которой зависит P, то в общем случае

$$[P] = A^l B^m C^n$$

(если число основных величин равно трем).

2. **О функциональной связи между физическими величинами.** На стр. 22 указывалось, что если

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5}$$

причем u — безразмерно, то зависимость (5) есть зависимость вида

$$u = \text{const}$$

или вида

$$u = F(\delta_1, \delta_2, \ldots,), \tag{6}$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — безразмерные степенные комбинации величин $x_1, \ldots, x_n$. Докажем это.

Будем сначала считать, что аргументы $x_1, \ldots, x_n$ имеют размерности вида L^α (длина, площадь и т. п.) Пусть

$$\left.\begin{aligned} [x_1] &= L^{\alpha_1}, \\ [x_2] &= L^{\alpha_2}, \\ &\ldots\ldots \\ [x_n] &= L^{\alpha_n}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Увеличим в λ раз единицу длины. Тогда мера каждой длины станет в λ раз меньше, и величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ примут значения

$$\frac{x_1}{\lambda^{\alpha_1}}, \frac{x_2}{\lambda^{\alpha_2}}, \ldots, \frac{x_n}{\lambda^{\alpha_n}}.$$

Следовательно, наряду с равенством (5) будет справедливо равенство:

$$u = f\left(\frac{x_1}{\lambda^{\alpha_1}}, \frac{x_2}{\lambda^{\alpha_2}}, \ldots, \frac{x_n}{\lambda^{\alpha_n}}\right), \qquad (8)$$

причем оно верно *при любых значениях* λ.

Пусть теперь

$$\lambda = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}, \qquad (9)$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_n$ выбраны так, что

$$[\lambda] = L\ ^{*)}. \qquad (10)$$

Тогда из (7) и (10) получим:

$$\left[\frac{x_1}{\lambda^{\alpha_1}}\right] = \frac{L^{\alpha_1}}{L^{\alpha_1}} = 1,$$

$$\left[\frac{x_2}{\lambda^{\alpha_2}}\right] = \frac{L^{\alpha_2}}{L^{\alpha_2}} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\frac{x_n}{\lambda^{\alpha_n}}\right] = \frac{L^{\alpha_n}}{L^{\alpha_n}} = 1.$$

---

*) Если хотя бы одно α_k отлично от нуля, то удовлетворить условию (10), очевидно, можно Если же каждое α_k равно нулю, то доказываемая теорема очевидна, ибо в этом случае все x_k безразмерны, и равенство (5) превращается в равенство (6).

Таким образом, аргументы функции (8) безразмерны. При этом из (8) и (9) видно, что они представляют степенные комбинации величин $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, зависимость (5) можно представить в виде

$$u = f(x_1', x_2', \ldots, x_n'), \tag{11}$$

где $x_1', \ldots, x_n'$ — безразмерные степенные комбинации переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Полученный выше результат относится к случаю, когда исходные величины $x_1, \ldots, x_n$ имеют размерности вида L^α. Покажем, что он верен также и для любых других размерностей.

Пусть имеется зависимость (5), причем u безразмерно, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют произвольные размерности в системе LMT. Будем их рассматривать в системе L, т. е. зафиксируем единицы массы и времени, а единицу длины будем считать переменной. Тогда величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут иметь размерности вида L^α, т. е. мы придем к случаю, который только что рассмотрели. Поэтому согласно (11) можно написать

$$u = f(x_1', x_2', \ldots, x_n'), \tag{12}$$

где $x_1', \ldots, x_n'$ — безразмерные степенные комбинации величин $x_1, \ldots, x_n$. Но так как единицы массы и времени мы считали фиксированными, то величины $x_1', \ldots, x_n'$ будут безразмерными *только относительно длины*. Иначе говоря, в их размерностях будет отсутствовать символ L, но будут присутствовать символы M и T.

Применив теперь к равенству (12) такое же преобразование, какое мы применяли к равенству (5), получим

$$u = f(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''), \tag{13}$$

где $x_1'', \ldots, x_n''$ — величины, размерности которых не содержат символа M (а также L), а содержат лишь символ T. При этом $x_1'', \ldots, x_n''$ будут степенными комбинациями величин $x_1', \ldots, x_n'$, а так как последние являются степенными функциями исходных аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то комбинации $x_1'', \ldots, x_n''$ тоже будут степенными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Наконец, повторив эту операцию еще раз, придем к равенству:

$$u = f(x_1''', x_2''', \ldots, x_n'''), \tag{14}$$

в котором все аргументы безразмерны. При этом $x_1''', \ldots$ $\ldots, x_n'''$ будут степенными комбинациями величин $x_1'', \ldots$ $\ldots, x_n''$, а следовательно, и степенными комбинациями переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Таким образом, если u безразмерно, то зависимость (5) можно представить в виде (14), где все аргументы—безразмерные степенные комбинации величин $x_1, \ldots, x_n$. Кроме того, может случиться, что зависимость (5) имеет вид $u=const$.

Поскольку аргументы $x_1''', \ldots, x_n'''$ суть степенные комбинации переменных $x_1, \ldots, x_n$, то некоторые из них, возможно, выражаются через остальные. Поэтому число независимых аргументов функции (14) может быть меньше, чем n, и эту функцию лучше записывать в виде

$$u=F(\delta_1, \delta_2, \ldots).$$

Из доказанной теоремы вытекает (см. стр. 22), что если u имеет произвольную размерность, то зависимость

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

можно представить в виде

$$u=P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, F(\delta_1, \delta_2, \ldots). \tag{15}$$

Здесь $P(x_1, \ldots, x_n)$—произвольная степенная функция, имеющая размерность величины u, а аргументы $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — безразмерные степенные комбинации исходных величин $x_1, \ldots, x_n$.

Можно указать зависимости, которые как будто противоречат доказанной теореме. Например, работа, совершаемая идеальным газом при изотермическом расширении, равна

$$A=p_1V_1(\ln V_2-\ln V_1)$$

(индекс 1 относится к начальному состоянию, а индекс 2—к конечному). Однако, если записать ее в виде

$$A=p_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1},$$

то под знаком ln будет стоять не размерная величина V, а безразмерное отношение V_2/V_1.

Можно привести и более простой пример—равенство

$$s=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

На первый взгляд это соотношение не является зависимостью типа (15), ибо в правой части написанного равенства нет произведения двух функций. Однако, если записать эту формулу в виде

$$s=v_0t\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{at}{v_0}\right),$$

то правая часть будет произведением степенной функции v_0t на некоторую функцию от безразмерного аргумента at/v_0.

Аналогично обстоит дело и с формулой

$$c=\sqrt{a^2+b^2},$$

выражающей теорему Пифагора. Ее можно записать в виде

$$c=a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

т. е. так, что в правой части будет стоять произведение величины a на некоторую функцию от безразмерного отношения b/a.

Вообще, в этой теореме речь идет не о том, что каждая зависимость *имеет вид* (15), а о том, что каждую зависимость *можно в этой форме представить.*

3. Некоторые физические константы. Ниже приводятся значения ряда физических констант в единицах СИ.

Гравитационная постоянная

$$G=6{,}67\cdot10^{-11}\ н\cdot м^2/кг^2.$$

Ускорение силы тяжести (нормальное)

$$g=9{,}807\ м/сек^2.$$

Абсолютный нуль температурной шкалы

$$0°\,K=-273{,}15°\,C.$$

Универсальная газовая постоянная

$$R=8320\ дж/кмоль\cdot град.$$

Число Авогадро

$$N=6{,}02\cdot10^{26}\ кмоль^{-1}.$$

Постоянная Больцмана

$$k=\frac{R}{N}=1{,}38\cdot10^{-23}\ дж/град.$$

Объем одного моля идеального газа при нормальных условиях

$$V=0{,}0224\ м^3.$$

Скорость звука в сухом воздухе при 0° С

$$v = 330 \text{ м/сек}$$

Заряд электрона

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ к}$$

Масса электрона

$$m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

Удельный заряд электрона

$$\frac{e}{m_e} = 1{,}759 \cdot 10^{11} \text{ к/кг.}$$

Масса протона

$$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Электронвольт

$$1 \text{ эв} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ дж.}$$

Число Фарадея

$$F = 9{,}65 \cdot 10^{7} \text{ к/кмоль.}$$

Диэлектрическая проницаемость вакуума

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$$

Магнитная проницаемость вакуума

$$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м.}$$

Скорость света в вакууме

$$c = 2{,}998 \cdot 10^{8} \text{ м/сек.}$$

Постоянная Планка

$$h = 6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ дж} \cdot \text{сек.}$$

Постоянная Стефана — Больцмана

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ дж/м}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4.$$

Коган Борис Юрьевич

РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Москва, 1967 г., 72 стр. с илл.

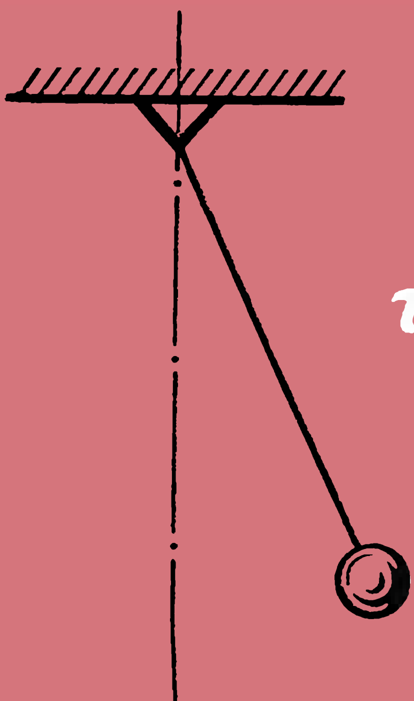
Редактор *А. В. Чеботарева*
Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 30/XII 1966 г.
Подписано к печати 8/I 1968 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$ Физ. печ. л 2,25 Условн
печ л. 3,77. Уч.-изд л 3,02 Тираж 100 000 экз.
Т-01831 Цена 8 коп. Заказ № 220.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Отпечатано с матриц в Киргизполиграфкомбинате

Цена 8 коп.



$$\tau = C\sqrt{\frac{l}{g}}$$