http://web.snauka.ru

Электронный журнал
Современные научные исследования и инновации

ISSN 2223-4888
Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 – 54049

О ПОНЯТИИ ДИВЕРГЕНЦИИ ПОЛЯ ВЕКТОРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Чуев А.С.
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Аннотация
Устоявшееся в математической теории поля и физических приложениях представление о дивергенции (расходимости) векторных полей с нулевым значением вне источников и стоков поля и практически неопределяемым значением внутри последних не корректно. Это представление не соответствует фактам очевидно наблюдаемой пространственной расходимости потоков физических векторных полей. Предлагается уточненное понимание их дивергенции (расходимости) как изменения объемной плотности потока векторной величины в той или иной точке поля или, по иному, как пространственной производной вектора в данной точке поля (изменение вектора в своем собственном направлении).

Рубрика: 01.00.00 ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Ключевые слова: divergence, field theory, magnetic field, physical fields, the electric field, the magnetization, дивергенция, магнитное поле, намагниченность, теория поля, физические поля, электрическое поле

Просмотреть статью на английском языке

Выходные данные статьи:
Чуев А.С. О понятии дивергенции поля векторных физических величин. // Современные научные исследования и инновации. – Январь, 2013 [Электронный ресурс]. URL: http://web.snauka.ru/issues/2013/01/20234

Опубликовано пользователем: Чуев Анатолий

Истина бытия – это сущность,

истина сущности есть понятие.

Гегель

ВВЕДЕНИЕ

Понятие «дивергенция» переводится на русский язык как расходимость (можно к этому отнести и сходимость) линий векторного поля. Логически это понятно, в пространственно неоднородном векторном поле (когда есть изменение плотности линий поля) дивергенция не нулевая. В однородном векторном поле дивергенция равна нулю.

На практике, если брать математическое определение дивергенции, то ненулевое значение дивергенции приписывается исключительно только в истоках и стоках поля без определенности их размера. Например, для центральных полей типа электрического и гравитационного, дивергенция считается равной нулю всюду, кроме истоков и стоков. Если же брать в качестве примера магнитное поле, то равенство нулю дивергенции вектора магнитной индукции **B** вообще возведено в закон (четвертое уравнение Максвелла).

Автор считает, что с точки зрения логики и здравого физического смысла **дивергенция в любой точке векторного поля – это скорость пространственного изменения вектора в своем собственном направлении (изменение модуля)**, а смысл ротора – скорость пространственного изменения направления вектора. Поскольку выделенная в тексте позиция не соответствует общепринятой точке зрения, попробуем пояснить и защитить ее, привлекая наглядные изображения векторных полей, логику понятий и математический аппарат.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Хорошо известны изображения расходящихся и сходящихся силовых линий полей центрального типа (рис.1) и вихреобразных силовых линий стержневого магнита (рис.2). Силовые линии поля строятся по касательным, определяющим направление силы в любой точке пространства, окружающего электрический заряд или магнит.

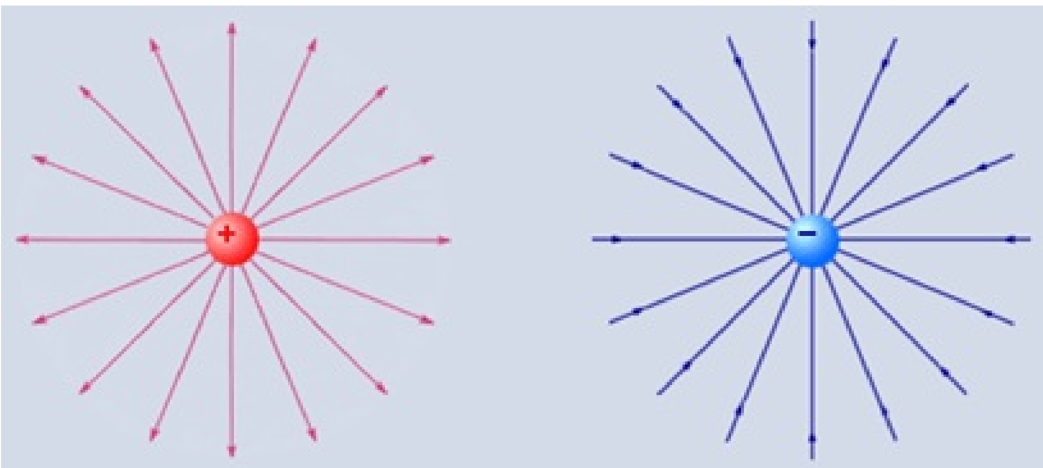

Рис.1 Пространственная расходимость и сходимость линий электрического

поля

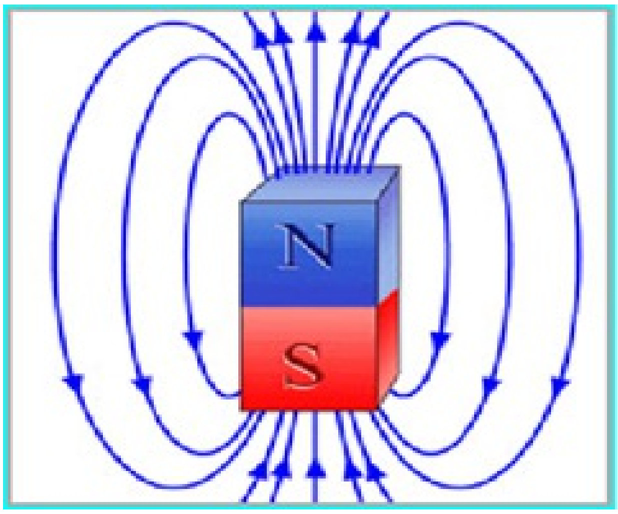

Рис.2. Пространственная расходимость и сходимость силовых линий магнитного поля

Известно, что густота силовых линий определяет числовое значение вектора в любой точке поля, а его направление определяется по касательной к линии в этой точке.

По рис.1, хотя пространственная расходимость и сходимость силовых линий электрического поля очевидны и густота линий убывает при отдалении от центра, дивергенция таких полей (центрального типа) всюду вне источника или стока считается равной нулю.

По рис.2 ситуация сложнее. Считается, что источников магнитного поля нет и линии поля замкнуты сами на себя. В соответствии с четвертым уравнением Максвелла дивергенция силового вектора магнитной индукции **B** всюду равна нулю. Однако приводимая картина наглядно иллюстрирует, что значение индукции **B**, определяемое густотой линий, вблизи торцов магнита максимально большое, а в отдалении оно становится меньше. На бесконечно большом удалении от магнита значение магнитной индукции будет нулевым. Таким образом можем констатировать, что в окружающем магнит пространстве тоже имеет место изменение модуля вектора **B** – это эмпирический факт.

Но если есть изменение модуля вектора (хотя сам поток не изменяется $\Phi_B = BS_n$), то неизбежно будет и дивергенция вектора (или поля, если дивергенцию понимать как пространственную расходимость или сходимость линий поля). Поэтому утверждение четвертого уравнения Максвелла о равенстве нулю дивергенции вектора **B** в любой точке магнитного поля применительно к рис.2, со всей очевидностью, – ложно.

Несмотря на очевидность приводимых фактов, известных почти каждому, в физике почему-то общепринято и не подвергается сомнению известное положение о нулевом значении дивергенции векторных полей вне источников и стоков поля [1-3]. Заблуждение это, по мнению автора, частью связано с гидродинамической аналогией, а частью с привычкой упрощенного описания центральных полей в сферической системе координат.

Приведем конкретные примеры из классических учебников с имеющейся там трактовкой понятия дивергенции. Возьмем классический учебник Тамма И.Е. «Основы теории электричества» [1, стр.586]. Тамм пишет: «Отметим в заключение, что в гидродинамике дивергенция скорости жидкости **v** имеет непосредственное физическое значение. Действительно, в каждой точке жидкости

$$div\ \vec{v} = \lim \frac{\oint v_n dS}{dV} \quad \text{при} \quad dV \to 0 \qquad (1)$$

равна рассчитанному на единицу объема количеству жидкости, вытекающей из элемента объема dV, окружающего рассматриваемую точку. Название «дивергенция», что значит по-латыни *расхождение* или *расходимость*, было избрано для этой величины именно потому, что жидкость растекается или расходится из тех или только тех точек или участков занимаемого ею пространства, в которых div **v** > 0. Очевидно, что в этих точках должны быть расположены источники жидкости. По аналогии, те точки поля произвольного вектора **a**, в которых div **a** $\neq$ 0, принято называть *истоками* этого поля. Числовое же значение div **a** называется *силой*, или *обильностью истоков* поля; в зависимости от знака дивергенции сила истоков может быть как положительной, так и отрицательной. Иногда отрицательным истокам поля дают название *стоков* поля. Векторные поля, у которых div **a** = 0, называются свободными от источников, или *соленоидальными*».

Слова *сила* или *обильность* истоков и стоков поля здесь применены правильно, они очень хорошо подходят в качестве характеристики для источников и стоков поля. Но причем тут *дивергенция* (расходимость) поля?

Другой источник, более современный, описывая дивергенцию конкретного электрического поля [2, стр.24], излагает так: «В дифференциальной форме теорема Гаусса является локальной теоремой: дивергенция поля **E** в данной точке зависит только от плотности электрического заряда ρ в этой точке и больше ни от чего. Это одно из замечательных свойств электрического поля. Например, в разных точках поля точечного заряда поле **E** отличается друг от друга. Это же относится, вообще говоря, и к пространственным производным $\partial E_x/\partial x$, $\partial E_y/\partial y$, $\partial E_z/\partial z$. Однако, как утверждает теорема Гаусса, сумма этих производных, которая определяет дивергенцию **E**, оказывается во всех точках поля (вне самого заряда) равной нулю».

В этой фразе чувствуются сильные нотки сомнения в излагаемом материале, но они прикрыты ссылкой на авторитет теоремы Гаусса. Но вообще-то защищать позицию, при которой производные по координатам есть, а их сумма всегда равна нулю – это против здравого смысла. Ведь пространственные изменения по трем координатам вполне могут быть одного знака, а также изменение может быть только по одной координате. В последнем случае вообще некуда деваться, ведь при изменении вектора по одной единственной координате, совпадающей с направлением вектора, как ни крути, а придется признавать наличие ненулевой дивергенции.

Наглядная иллюстрация к этому случаю приведена на рис.3. Здесь изображено изменение плотности электрического тока в линейном однородном проводнике переменного сечения. Очевидно, что на участках Б и Г, где происходит переход от одного значения плотности тока к другому значению, $div\ j \neq 0$. Аналогичный пример можно привести и для жидкости, текущей в линейной трубе переменного сечения. Для скоростного потока жидкости в трубе, как и для плотности тока, дивергенция потокового вектора в местах расширения и сужения трубы не будет равна нулю – это факт.

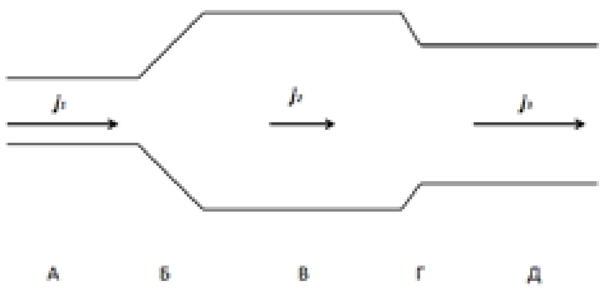

Рис.3. Изменение плотности тока в линейном проводнике переменного сечения

Если рассматривать потенциальное электрическое поле точечных зарядов (рис.1), то ситуация с критикуемым пониманием дивергенции вообще забавная. Вне заряда дивергенция признается равной нулю, а в самом заряде она неопределенна ввиду немыслимо большой плотности заряда. Тогда о каком значении дивергенции вообще можно вести речь?

Приведем еще один пример из зарубежных источников (заблуждение не знает границ) [3, стр.73]. Рассматривается электрическое поле, создаваемое заряженным источником в виде бесконечно длинного цилиндра. «Вне цилиндра, где нет заряда, конечный поток, вытекающий из любого объема – и большого и малого, – равен нулю, так что предел отношения потока к объему, конечно, равен нулю. Внутри цилиндра мы получили результат, следующий из фундаментального соотношения (54) (примеч. в ссылке div **E** = $4\pi\rho$)».

Интересно, как это понимать: «дивергенция внутри цилиндра». Еще более нелепым будет определение дивергенции «внутри» электрона или протона.

Если же отойти от слова «внутри», то возникает вопрос – на каком расстоянии от источника или в каком объеме вычислять дивергенцию. Если в расчет брать только размер микрочастиц, то значение дивергенции (и плотности ρ) будет чудовищно большим из-за малой величины размера микрочастиц. Так, для отдельного электрона div **E** = $1{,}93\cdot10^{35}$ В/м^2, при этом данная цифра совсем ничего не говорит о пространственной расходимости векторного поля, создаваемого электроном. Значит, здесь что-то не так.

В этой же книге [3] приводится иллюстрация, изображенная на рис.4, позволяющая трактовать дивергенцию точно так же, как ее понимает автор настоящей статьи.

Выделенная область на рис. 4 б) не содержит источников и стоков, однако дивергенция поля в этой области не равна нулю и это правильно. Дивергенция есть в любой точке неоднородного поля, неоднородного в реальном трехмерном физическом пространстве. То есть в любой точке поля, где наблюдается расходимость или сходимость линий векторного поля.

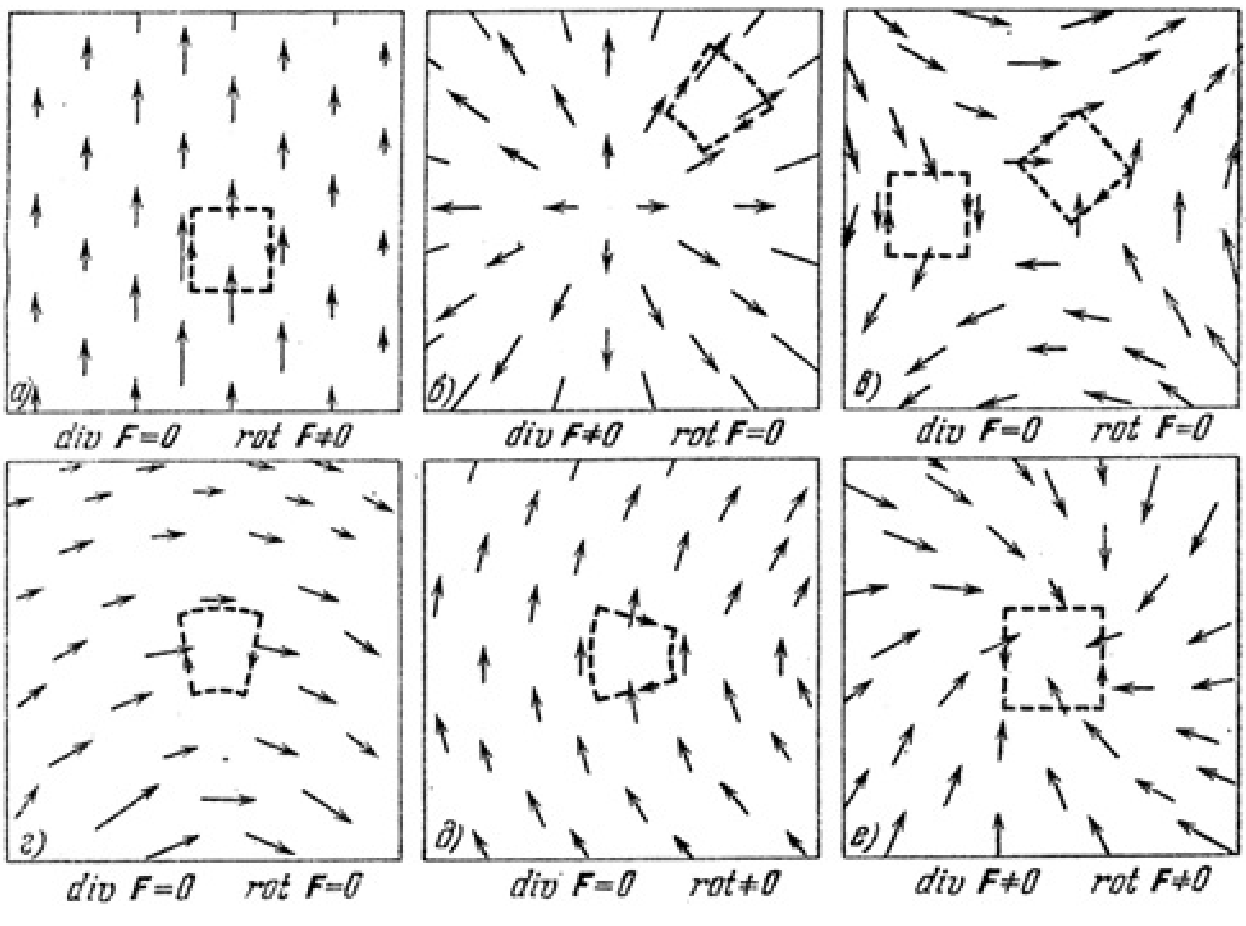

Рис.4. Значения дивергенции и ротора в выделенной области векторного поля

Исходя из описываемого здесь понятия дивергенции, можно предположить, что в случае центрального электрического поля (берем вектор **D** в системе СИ), дивергенция в любой точке поля будет численно равняться объемной плотности заряда, приходящегося на объем шара с радиусом, равным удалению данной точки поля от центрального источника. В этом случае работают и теорема Гаусса и наше понимание дивергенции векторного поля.

Одним из оппонентов данной точки зрения на дивергенцию автору была высказана претензия в том, что он «придумал» свое определение дивергенции и не вправе пользоваться общепринятым. Помилуйте! Я ничего не придумывал и пользуюсь таким определением, как оно есть [4, стр. 358]. Дивергенцией называется функция

$$div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

, (2)

а то, что она входит в подынтегральное выражение формулы Остроградского

$$\iiint_V div\,\vec{A} dV = \iint_S A_n dS$$

, (3)

так эта формула, при допущении равномерной плотности потока, применима для поверхностей и объемов любого размера. При отсутствии такого допущения формулой (3) пользоваться практически невозможно.

Наше понимание дивергенции, как изменения вектора в своем собственном направлении, математически обоснована тем, что формула (2) обязательно дает нулевой результат только при неизменности модуля вектора $\vec{A}$. Это определяется свойством любого вектора - сохранять свое значение по модулю при любых поворотных изменениях системы координат. Заметим, прямо противоположное качество у функции ротора вектора.

Осознание ложности привязки понятия дивергенции лишь к источникам и стокам поля уже появилось в гидродинамике [5]. По мнению автора, не за горами признание аналогичного положения и в других областях физики, в частности, в электростатике и магнитостатике. Отмеченное соответствует математическому положению о том, что «всякое векторное поле **A** дает некоторое скалярное поле div**A**, а именно поле своей расходимости» [4, стр.359]. Если векторное поле непрерывно и дифференцируемо в своей области, то в той же области должно существовать и быть непрерывным скалярное поле его дивергенции.

К сожалению, большинство математических и физических источников трактуют сегодня понятие дивергенции совершенно иначе. Например [6, пример 7.10, стр.406]: «Силовое поле, создаваемое в пустоте помещенным в начало координат электрическим зарядом q_0 , имеет аналогичный вид …, дивергенция рассмотренных силовых полей при $r \neq 0$ равна нулю». Правда наблюдаются и попытки вынести понятие дивергенции из «прокрустова ложа» истоков и стоков поля. В источнике [7, стр.171] приводится такая формула:

$$div\,\vec{F}(\vec{r}) = \lim \frac{\int_{S_1} d\vec{S}\cdot\vec{F}(\vec{r}_1)}{\int_{V_1} dV}$$

при $\delta \to 0$ (4)

где: V_1 - область, содержащая точку ($\vec{r}$), S_1 - замкнутая поверхность, ограничивающая область V_1, δ - наибольшее расстояние от точки ($\vec{r}$) до точек поверхности S_1.

В формуле (4) имеет место уход от устремления объема в точку, анализируются поверхность и объем, внутри которых расположена рассматриваемая точка поля. При правильной интерпретации этой формулы и применительно к полям центрального типа она дает результат, близкий к верному.

В источнике [8] для физических полей приводится еще одно, несколько иное, определение дивергенции. Здесь дивергенция определяется как показатель объемной плотности потока векторной величины в той или иной точке пространства векторного поля. Дивергенция в этом случае математически выражается так:

$$div\,\vec{F} = \lim \frac{\Phi_F}{V}$$

при $S \to 0$ (5)

где: Φ_F – поток векторного поля $\vec{F}$ через сферическую поверхность площадью *S*, ограничивающую объем *V*. Считается, что такое определение дивергенции применимо не только к декартовым системам координат. Надо отметить, что здесь не очень понятно требование сферичности, а не замкнутости поверхности.

В чем-то аналогичный подход обнаруживается и в работе [9, стр.22]: «…дивергенция векторного поля **a**(M) является объемной плотностью потока векторного поля **a**(M) в данной точке M». По мнению автора, такой подход более близок к истине.

В источнике [8] приводится интересный пример наглядной физической модели дивергенции: «Например, если в качестве векторного поля взять совокупность направлений наискорейшего спуска на земной поверхности, то дивергенция покажет местоположение вершин и впадин, причём на вершинах дивергенция будет положительна (направления спуска расходятся от вершин), а на впадинах отрицательная (ко впадинам направления спуска сходятся)».

По мнению автора, такая модель дивергенции не совсем логична. На вершинах и впадинах наискорейшего спуска совсем нет, а в источниках или стоках дивергенция по модулю должна быть максимальна. Кроме того, данная модель, во-первых, исключает гладкость вершин и впадин, поскольку значения дивергенции скачут от плюса к минусу, а правило перехода не обозначено. Во-вторых, надо заметить, принимая пространственное направление за векторную величину, ее нельзя определять в том же пространстве направлений. Пример из логики: нельзя определить понятие через само это понятие, иначе получится тавтология.

В наглядных примерах по рис.1 и рис.2 видно, что дивергенция (расходимость) электрических и магнитных силовых линий есть и заведомо есть плавное уменьшение модуля вектора при отдалении рассматриваемых точек окружающего пространства от источника и стока поля. Для центральных полей вычислить дивергенцию как объемную плотность потока вектора в той или иной точке поля не сложно. Но для соленоидального магнитного поля определение дивергенции как объемной плотности потока векторного поля затруднительно, поскольку это поле не сферично. К тому же заметим, дивергенция, по сути, должна быть не плотностью потока векторного поля, что присуще и однородным векторным полям, а пространственным изменением плотности потока вектора в той или иной точке поля. Математически это можно выразить так:

$$div\,\vec{F} = \lim \frac{\Delta(\vec{F}\vec{S}_n)}{V} = \frac{d|F|}{d\vec{\tau}_F} \quad \text{при} \quad V \to 0 \quad \text{и} \quad S \to 0 \qquad (6)$$

где: $\frac{\Delta(\vec{F}\vec{S}_n)}{V}$ - изменение плотности потока векторной величины $\vec{F}$ в рассматриваемом объеме V предельно малого размера; $\vec{\tau}_F$ - единичный вектор, касательный к направлению вектора $\vec{F}$ в данной точке.

Кажется не вполне осознаваемое, но почти полное соответствие авторскому пониманию дивергенции удалось обнаружить в источнике [10, стр.206]: «Дивергенцию векторной функции … еще называют расходимостью. Она определяет скорость изменения каждой компоненты вектора в своем «собственном» направлении». Но если есть изменения компонентов вектора в своем «собственном направлении», то не замечать или отрицать такое же изменение самого вектора – просто грешно.

<u>Обсуждение полученных результатов</u>.

В заключение приведем и рассмотрим для сравнения в табличном формате различные варианты определения дивергенции, в том числе, предлагаемые автором и защищаемые им как наиболее подходящие (см. таблицу 1).

Таблица 1. Возможные определения и толкования дивергенции

Определение дивергенции	Математическое	Условие	Физический смысл дивергенции

дивергенции	определение	определения	дивергенции
Общепринятое и разделяемое			

автором

$$div\ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Пространственная производная в точке поля

Пространственная расходимость или сходимость векторного поля

Общепринятое, но не разделяемое автором

$$div\ \vec{F}(M) = \lim \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{S}}{dV}$$

при $dV \to 0$

Объемная плотность потока через замкнутую поверхность предельно малого объема

Дивергенция – это истоки и стоки векторного поля

Вариант, встречающийся как возможный

$$div\vec{F} = \frac{\vec{F}\vec{S}_к}{V}$$

при $S \to 0$ и $V \to 0$

Объемная плотность потока при $S \to 0$ и $V \to 0$

Объемная плотность потока векторного поля

Авторский

вариант 1

$$div\ \vec{F} = \lim \frac{\Delta(\vec{F}\vec{S}_к)}{V}$$

при $S \to 0$ и $V \to 0$

Дивергенция численно равна градиенту объемной плотности потока

Пространственное изменение объемной плотности потока векторной величины

Авторский

вариант 2

$$div\ \vec{F} = \frac{d|\vec{F}|}{d\vec{\tau}_F}$$

Дивергенция – это изменение модуля вектора

Пространственное изменение векторной величины в ее собственном направлении

Рассмотрим отличия в оценке дивергенции, применительно к вектору $\vec{D}$ электростатического поля в точке М, находящейся на расстоянии r от центрального заряда q_0. Общепринятое значение дивергенции вне истоков и стоков поля равно нулю ($div\ \vec{D}$ = 0). Значение, вычисленное из условия равномерной объемной плотности заряда, приходящегося на весь рассматриваемый сферический объем, о чем говорилось ранее, как о возможном приблизительном определении дивергенции, составляет:

$$div\ \vec{D} = \frac{q_0}{V} = \frac{3q_0}{4\pi r^3}.$$

Авторские варианты определения дивергенции по вариантам 1 и 2, по идее, должны быть эквивалентны. Значение дивергенции по варианту 1:

$$div\ \vec{D} = 1\lim \frac{\Delta(\vec{D} \cdot \vec{S}_к)}{\Delta V} = \frac{d\vec{D}}{dr} = -\frac{q_0}{2\pi r^3},$$

а по варианту 2:

$$div\ \vec{D} = -\frac{d\vec{D}}{dr} = \frac{q_0}{2\pi r^3}.$$

Критики нашего понимания дивергенции говорят: пусть это даже так и есть, но что это дает нового? Стоит ли из-за этого все учебники переписывать? Ответим так: новое знание о природе никогда не бывает излишним. Ведь устоявшееся представление о дивергенции тоже в чем-то право (математика – это тоже наука). Например, применительно к электрическому полю в точках полевого пространства, в которых дивергенция поля не равна нулю, нужно найти объяснение наличия вполне определенной объемной плотности заряда. И этому есть объяснение, попробуем его сформулировать.

Физическое объяснение отличной от нуля дивергенции в любом месте расходящегося или сходящегося векторного поля с определенными значениями величины и знака можно найти, опираясь на представление о наличии в каждой точке физического пространства объемной плотности виртуальных частиц вакуума [11]. Поскольку виртуальные частицы вакуума появляются и исчезают, как считается, парами, то в случае электрического поля наличие того или иного знака объемной плотности заряда, а также его числовое значение, должны определяться пространственным распределением объемной плотности электрического заряда этих пар. Можно сказать по иному, должны определяться неоднородностью поляризации вакуума или тем, частицы какого знака в виртуальных парах (данного места поля) «живут» несколько дольше, по сравнению со своими напарницами.

Для электрического поля исходной «материальной» [12] векторной физической величиной, к которой применимо понятие дивергенции, является *поляризованность*. Причем поляризованностью вакуума является известная *индукция электрического поля* **D**, зачастую причисляемая к вспомогательным и не существующим величинам. Не исключено существование еще одной «материальной» векторной ФВ электрического поля - *электрического векторного потенциала* $\mathbf{A}^e$, об объективном существовании которого давно и настойчиво говорит и пишет В.В. Сидоренков [13, 14]. Без этой физической величины, видимо, нельзя обойтись при описании в «материальных» параметрах вихревых электрических полей.

Для магнитного поля интенсивность и направление дивергенции, видимо, будет определяться пространственным распределением суммарного *магнитного дипольного момента* виртуальных частиц и, в конечном счете, объемной плотностью этой векторной величины, которую иначе как *намагниченностью* вакуума [15] не назовешь.

Выводы

1. Математические и физические толкования дивергенции с приписыванием ей нулевого значения вне истоков и стоков поля не соответствуют реальности. Дивергенция (расходимость - сходимость) силовых линий электрического, магнитного и гравитационного полей, неоднородных в трехмерном физическом пространстве, - это эмпирический факт.

2. Используемые иногда определение дивергенции - как объемной плотности потока векторной величины в той или иной точке поля, близко к сущности понятия дивергенции, но более точно определение дивергенции

пространственным изменением этого потока.

3. Наиболее простое и точное толкование дивергенции векторного поля в любой его точке – это скорость пространственного изменения вектора в данной точке поля в своем собственном направлении, то есть по модулю. Данное толкование дивергенции совпадает с математическим определением дивергенции через вектор набла.

Библиографический список

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Учеб. Пособие для вузов. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.
2. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. Изд. 4-е испр.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2003. – 320 с.
3. Парселл Э. Электричество и магнетизм: Учебное руководство; Пер с англ./Под ред. А.Н. Школьникова и А.О. Вайсберга. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1983. – (Берклеевский курс физики). – 410 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. Изд. 19 испр. – М.: НАУКА. 1965.
5. Волков П.К. О природе движения жидкости./ Вестник Югорского государственного университета. 2011 г. Выпуск 2 (21). С. 8–28.
6. Гаврилова В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с.
7. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Г. Корн, Т. Корн. – М.: НАУКА. 1973. 832 с.
8. Дивергенция. URL: http://ru.math.wikia.com/wiki/Дивергенция (дата обращения - 10.11.2012).
9. Болсун А.И., Гронский В.К., Бейда А.А. Методы математической физики: Учеб. пособие. – Минск.: Высш. шк., 1988. – 199 с.
10. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Под ред. А.Н. Тихонова. Бл.Х. М.: Изд. МГУ, 1987. 358 с.
11. Смолянский С.А. Вакуумное рождение частиц в сильных электромагнитных полях. // Соросовский образовательный журнал, 2001, № 2, с. 69-75.
12. Чуев А.С. Системный подход в физическом образовании инженеров // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. - 2012.- № 2.- URL: http://technomag.edu.ru/doc/299700.html (дата обращения: 2.02.2012).
13. Сидоренков В.В. Электромагнитный векторный потенциал – это первичное собственное поле частиц микромира. URL: http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11702.html (дата обращения: 18.01.2012 г.)
14. Сидоренков В.В. Современная система уравнений электродинамики

Максвелла – анахроничный фетишь физической науки. URL: http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12268.html (дата обращения: 04.10.2012 г.)

15. Чуев А.С. Магнитное поле – какие векторы первичны и что мы измеряем?/ Журн. «Законодательная и прикладная метрология». 2012. №5.