

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Физика»

М.Ю. Докукин

**ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВ КВАНТОВОЙ
ФИЗИКИ, ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА,
АТОМНОЙ ФИЗИКИ**

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине «Физика и естествознание»

Под редакцией *Л.К. Мартинсона*

М о с к в а
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2016

УДК 539.1

Рецензент: проф., д.т.н. Владимир Иванович Хвесьюк

Докукин М.Ю.

Изучение основ квантовой физики, физики твердого тела, атомной физики: Учебное пособие по дисциплине «Физика и естествознание» / Под ред. Л.К. Мартинсона. Электронное учебное издание. - М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2015. 20 с.

В учебном пособии изложены методы решения задач по ряду разделов курса «Физика и естествознание», а именно: тепловое излучение, фотоэффект, волновые свойства микрочастиц и элементы квантовой механики, электронный газ в металле и его свойства, радиоактивный распад. Приведены необходимые краткие теоретические сведения, содержащие фундаментальные законы, гипотезы и принципы естествознания, а также даны примеры решения типовых задач.

Для подготовки бакалавров по направлению «Инноватика», а именно – студентов 2-го курса 4-го семестра факультета ИБМ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Рекомендовано учебно-методической комиссией факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Электронное учебное издание

Докукин Михаил Юрьевич

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ, ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, АТОМНОЙ ФИЗИКИ

© 2015 МГТУ имени Н.Э. Баумана

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
1. Элементы квантовой оптики	5
1.1. Основные теоретические сведения	5
1.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Тепловое излучение. Фотоэффект»	13
1.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Тепловое излучение. Фотоэффект»	14
2. Элементы квантовой механики	15
2.1. Основные теоретические сведения	15
2.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Основы квантовой механики»	25
2.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Основы квантовой механики»	26
3. Элементы физики твердого тела	27
3.1. Основные теоретические сведения	27
3.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Электронный газ в металле. Эффект Холла»	35
3.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Электронный газ в металле. Эффект Холла»	35
4. Элементы атомной и ядерной физики	37
4.1. Основные теоретические сведения	37
4.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Радиоактивный распад»	47
4.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Радиоактивный распад»	48
Приложение	51
Список рекомендуемой литературы	60

Предисловие

Учебная дисциплина «Физика и естествознание» сейчас рассматривается как обязательный компонент в процессе подготовки бакалавров и дипломированных специалистов по гуманитарным направлениям, в частности специалистов в области организации производства. Это принципиально новая общеобразовательная дисциплина из цикла «Общие математические и естественнонаучные дисциплины» в Государственном образовательном стандарте (ГОС) последнего третьего поколения, разработанном Минобразования Российской Федерации. В ГОСе и сопутствующих нормативных документах отмечается назначение данной дисциплины: «...повышение общекультурного статуса и уровня эрудиции студентов через ознакомление с достижениями в области современного естествознания, овладение будущими бакалаврами целым набором общекультурных и профессиональных компетенций, в частности, - способностью использовать законы, методы и принципы естественнонаучных дисциплин в их будущей профессиональной деятельности».

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов ряда специальностей факультета ИБМ МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих дисциплину «Физика и естествознание», входящую в основную программу подготовки бакалавров по направлению «Инноватика», и направлены на оказание помощи при выполнении студентами расчетного домашнего задания, посвященного таким физическим вопросам как тепловое излучение и фотоэффект, волновые свойства микрочастиц и элементы квантовой механики, свойства электронного газа в металле, радиоактивный распад.

1. Элементы квантовой оптики

1.1. Основные теоретические сведения

Любой процесс электромагнитного (э/м) излучения связан с потерей энергии (того или иного вида) у источника (излучателя). В зависимости от вида энергии, которую теряет излучатель различают:

- *тепловое излучение*, т.е. испускание э/м волн нагретыми телами за счет их внутренней энергии (причиной излучения является возбуждение атомов, молекул вещества вследствие их теплового хаотического движения);
- *люминесценцию*, т.е. излучение (свечение) тел за счет всех других видов энергии (кроме внутренней энергии) или, иначе говоря, это излучение света телами, избыточное над тепловым излучением этих тел.

Тепловое излучение имеет место при любой температуре $T > 0$ К; однако при невысоких температурах излучаются практически лишь длинные (инфракрасные $\lambda_{m2} \sim 1...10$ мкм, рис. 1) э/м волны, а при высоких температурах излучателя доминирует ультрафиолетовая ($\lambda_{m1} \sim 0,1$ мкм) область в спектре излучения.

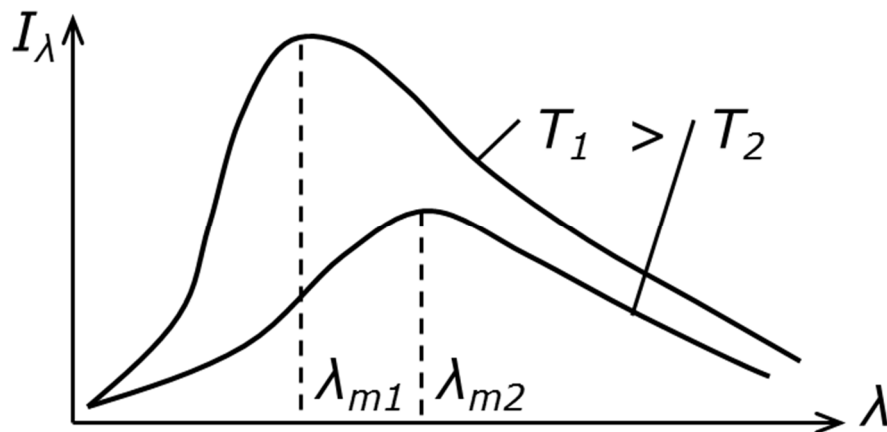


Рис. 1. Спектральная интенсивность теплового излучения в зависимости от температуры

Опыт показывает, что единственным видом э/м излучения, которое может находиться в термодинамическом равновесии с излучающими телами, является тепловое излучение.

Если поместить в замкнутую откакумированную полость (рис. 2) с идеально отражающими стенками тела с различными температурами (T_1 , T_2), то в такой системе начнется теплообмен путем испускания и поглощения э/м волн между телами и телами и стенками полости. Через некоторое время (оно зависит от свойств излучателей и их исходного неравновесного состояния) неизбежно установится термодинамическое равновесие в этой системе, соответствующее определенной температуре $T_{\text{рав}}$. За любой промежуток времени испускаемая телами энергия становится равной поглощаемой энергии, и плотность энергии излучения в пространстве между телами достигает определенной величины, соответствующей $T_{\text{рав}}$. Такое состояние излучения в полости остается неизменным во времени (в отсутствии внешних воздействий).

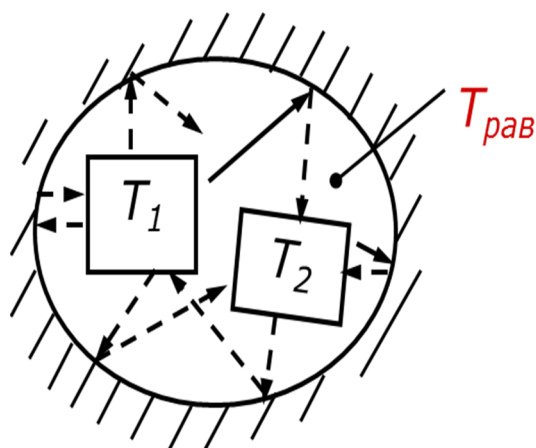


Рис. 2. Теплообмен в замкнутой полости

Интегральные и спектральные характеристики теплового излучения. Интенсивность излучения будем характеризовать мощностью, излучаемой с единицы поверхности тела. Тепловое излучение складывается из волн различных частот ω или длин, в основном в оптическом диапазоне: $\lambda \approx 0,01 \dots 1000$ мкм, и имеет сплошной спектр (рис. 1).

- *Энергетическая светимость* – величина, измеряемая потоком э/м излучения Φ_3 , испускаемым единицей поверхности тела (с температурой T) по всем направлениям (в пределах телесного угла 2π , т.е. в полусфере):

$$R_3 = \Phi_3 / S, \quad (\text{Вт/м}^2) \quad (1)$$

где S – площадь излучающей поверхности. Энергетическая светимость – это интегральная характеристика излучения.

- *Испускательная способность* или *спектральная плотность энергетической светимости* – функция, характеризующая распределение энергии в спектре излучения и задаваемая формулой:

$$r_{\omega,T} = dR_{\omega,T}/d\omega, \text{ (Дж/м}^2\cdot\text{рад)} \quad (2)$$

где $dR_{\omega,T}$ – мощность излучения, испускаемая в узком спектральном интервале $d\omega$ единицей поверхности при заданной T .

Испускательная способность зависит от температуры T и частоты ω (или длины волны λ), т.е. является функцией: $r_{\omega,T} = f(\omega, T)$ (или функцией: $r_{\lambda,T} = f'(\lambda, T)$) и относится к спектральным характеристикам излучения.

Если известна функция $r_{\omega,T}$, то энергетическая светимость может быть определена как: $R_{\omega} = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega$ или $R_{\lambda} = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda$, где $d\omega$ и $d\lambda$ – принадлежат одному и тому же спектральному интервалу и, соответственно, равны элементарные мощности:

$$dR_{\omega,T} = dR_{\lambda,T} \text{ или } r_{\omega,T} d\omega = r_{\lambda,T} d\lambda.$$

- *Поглощательная способность тела* – это отношение поглощённого единицей поверхности тела лучистого потока $d\Phi_{\omega}''$, заключённого в узком спектральном интервале $[\omega, \omega+d\omega]$, к потоку излучения $d\Phi_{\omega}$, падающему на 1 поверхности в этом же спектральном интервале, т.е.

$$a_{\omega,T} = \frac{d\Phi_{\omega}''}{d\Phi_{\omega}} \quad (3)$$

Замечание. Иногда $a_{\omega,T}$ – называют коэффициентом монохроматического поглощения, причем – $a_{\omega,T} = f(\omega, T, \text{ материал тела})$. Поглощательную способность также относят к спектральным характеристикам излучения.

Определение. Тело, у которого поглощательная способность $a_{\omega,T} = 1$, называется *абсолютно чёрным*. *Реальные тела*, для которых $a_{\omega,T} < 1$, называются *серыми*.

- *Модель абсолютно черного тела (АЧТ)* – почти замкнутая полость с малым отверстием, через которое проникает внутрь излучение (тепловой

луч). Температура стенок поддерживается постоянной. Попавшее излучение после многократных отражений от внутренних стенок практически полностью поглотится ими. Поэтому само малое отверстие можно принять за АЧТ, так как для него $a_{\omega,T} = 1$ (отверстие полностью поглотило излучение).

Закон Кирхгофа установлен в 1859г. немецким физиком Густавом Кирхгофом; он также предложил модель АЧТ.

Формулировка. Отношение испускательной способности к поглотительной способности не зависит от природы тела (вещества) и является для всех тел одной и той же (универсальной) функцией частоты (или длины волны) и температуры.

$$\left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_{1-\text{тело}} = \dots = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_{i-\text{тело}} = f(\omega, T) = r_{0_{\omega,T}} \quad (4)$$

Вывод. Зная испускательную способность АЧТ, и определив экспериментально спектральный коэффициент поглощения для рассматриваемого тела, можно определить испускательную способность этого тела (как серого тела): $r_{\omega,T} = a_{\omega,T} \cdot r_{0_{\omega,T}}$.

Закон Стефана-Больцмана впервые открыт в 1879 г. Йозефом Стефаном, который показал, что энергетическая светимость любого тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Этот закон затем в 1884 г. был теоретически выведен Людвигом Больцманом для АЧТ:

$$R_{\Sigma 0} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (5)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}\right)$ – постоянная Стефана.

Замечание. Для серых тел закон излучения должен быть дополнен поправочным коэффициентом $\varepsilon = R_{\Sigma \text{сер}} / R_{\Sigma 0} < 1$, который часто называют *степенью черноты*. Поэтому закон (5) принимает вид:

$$R_{\Sigma \text{сер}} = \varepsilon \sigma T^4 \quad (6)$$

Закон смещения Вина был получен как естественное следствие из формулы, предложенной в 1893 г. Вильгельмом Вином для описания испускательной способности АЧТ или иначе функции Кирхгофа:

$$f(\omega, T) = \omega^3 \cdot F(\omega/T), \quad (7)$$

где $F(\omega/T)$ – некоторая функция отношения частоты излучения к температуре. Формула (7) может быть также представлена в виде:

$$\hat{f}(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda \cdot T), \quad (8)$$

где $\psi(\lambda \cdot T)$ – некоторая функция произведения $(\lambda \cdot T)$. Если последнюю формулу для $\hat{f}(\lambda, T)$ продифференцировать по λ и полученное выражение приравнять к «0», то можно получить трансцендентное уравнение для аргумента $(\lambda_m \cdot T)$, где λ_m – длина волны, отвечающая положению экстремума в соответствующей функции $\bar{\psi}(\lambda_m \cdot T)$. Так как $\lambda_m \neq 0$, то произведение $\lambda_m \cdot T$ должно равняться некоторой константе b , т.е.

$$\lambda_m \cdot T = b, \quad (9)$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3}(\text{м} \cdot \text{К})$ – постоянная Вина. Формуле (9) можно придать классический вид *закона смещения Вина*:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \quad (10)$$

Формулировка. Длина волны в спектре излучения АЧТ, соответствующая наибольшей испускательной способности λ_m , обратно пропорциональна абсолютной температуре T тела (излучателя). Поведение функции $\hat{f}(\lambda, T)$ аналогично поведению распределения интенсивности излучения, показанному на рис. 1.

Квантовая гипотеза излучения и формула Планка. В 1900 г., исследуя проблему теплового излучения, Макс Планк высказал гипотезу о том, что излучение испускается телами не непрерывно, а порциями (или квантами) энергии, величина которых пропорциональна частоте излучения (ν или ω):

$$E = h \cdot \nu \text{ или } E = \hbar \cdot \omega, \quad (11)$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}(\text{Дж} \cdot \text{с})$ или $\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34}(\text{Дж} \cdot \text{с})$ – постоянная Планка.

Замечание. Так как размерность постоянной Планка - «энергия \times время» - совпадает с размерностью величины, которую в механике называют «действием», то h часто называют «квантом действия».

Рассуждая принципиально по-новому, неклассически, т.е. отталкиваясь от квантовых положений, Планк, используя положения статистики Больцмана, вывел формулу для универсальной функции Кирхгофа (или испускательной способности АЧТ):

$$f(\omega, T) = r_{0\omega, T} = \frac{c}{4} w(\omega, T) = \frac{\hbar \cdot \omega^3}{4\pi^2 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} \quad (12)$$

Или в виде функции длины волны и температуры:

$$f'(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \cdot \hbar \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT \cdot \lambda}\right) - 1} \quad (13)$$

Формулы (12 – 13) принято называть *формулами Планка* для излучения АЧТ. Они точно совпадают с экспериментом во всем спектральном диапазоне $[0; \infty]$ и могут быть использованы в расчетах.

Фотоэффект – процесс испускания (эмиссии) электронов с поверхности тела, подвергнутой воздействию э/м излучению, в окружающую среду (вакуум). Чаще всего рассматривается поверхность твердого тела, хотя возможна эмиссия электронов с поверхности расплавов.

Замечание. Данное явление также называют *внешним фотоэффектом*, отличая его от *внутреннего фотоэффекта*, когда фотоэмиссии не наблюдается, а происходит только высвобождение электронов из атомов в пределах самого облучаемого вещества и, соответственно, наблюдается увеличение электропроводности вещества.

Фотоэффект был открыт Г. Герцем в 1887 году, который обнаружил, что проскакивание искры в его электромагнитном вибраторе облегчается, если промежуток между электродами – осветить.

В 1888 - 1889 гг. русский физик А.Г. Столетов (а также независимо Вильгельм Гольвакс) подверг фотоэффект систематическому исследованию с помощью установки (рис. 3), содержащей «конденсатор» из проволочной сетки и сплошной пластины, гальванометр и источник питания.

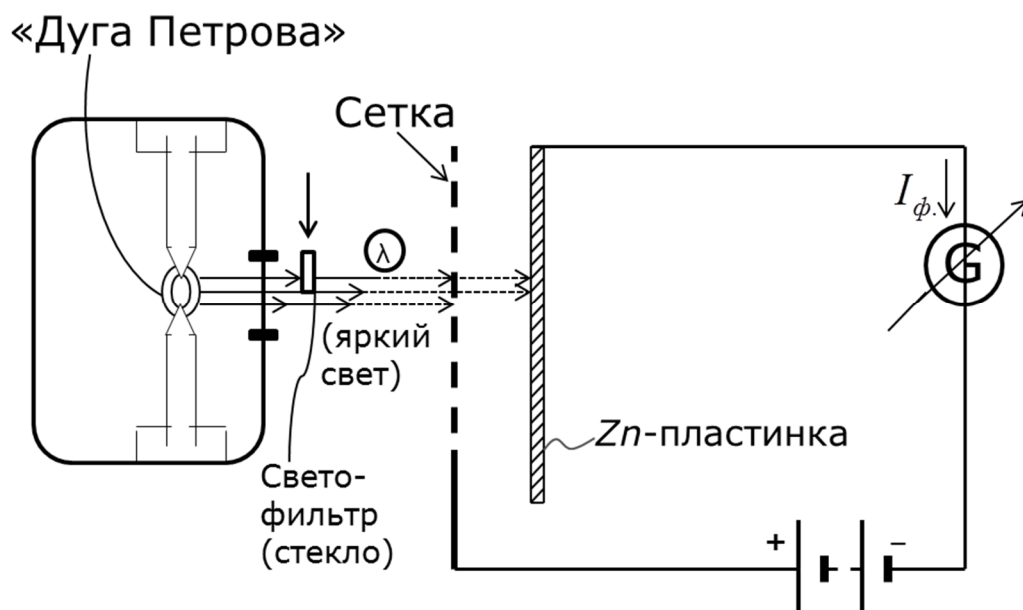


Рис. 3. Экспериментальная установка Столетова

Свет от интенсивного источника (например, электрическая дуга) проходя через сетку падал на пластинку (например, - из цинка), в результате в электрической цепи возникал ток I_{ϕ} , регистрируемый гальванометром.

Проведя большую серию опытов А.Г. Столетов пришел к следующим выводам:

- сила тока (фототок) в цепи возрастает с увеличением освещенности пластины (т.е. пропорционально интенсивности падающего света при фиксированном спектральном составе);
- наибольшее действие на пластину оказывают ультрафиолетовые лучи (это было установлено путем постановки светофильтров);
- испускаемые под действием света электрические заряды имеют отрицательный знак.

Законы фотоэффекта. Уже к 1905 г. (в ходе работ Столетова, Ленарда, Томсона, Миллекена и др.) было выяснено.

- Фототок насыщения пропорционален падающему световому потоку (при фиксированном спектральном составе излучения), т.е. $I_{\text{н}} \sim \Phi_{\text{з}}$ – закон Столетова (рис. 4).

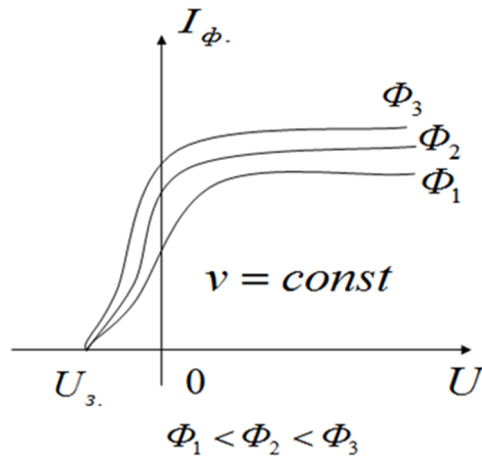


Рис. 4. ВАХ фотоэлемента в зависимости от светового потока

- Для каждого (облучаемого) металла (вещества) существует такая максимальная длина волны λ_0 (или минимальная частота ω_0), при которой еще происходит «вырывание» электронов с поверхности или, иначе говоря, если $\lambda > \lambda_0$ («красная граница фотоэффекта»), фотоэффект исчезает даже при достаточно большой интенсивности света.

- Максимальная кинетическая энергия K_{\max} фотоэлектронов линейно зависит от частоты ω и не зависит от интенсивности света. Т.к. $K_{\max} = e \cdot U_з$, то можно построить зависимость $U_з = f(\omega)$; так согласно экспериментальным данным Р. Миллекена получаем: $U_з = a \cdot \omega - b$, где a и b – постоянные.

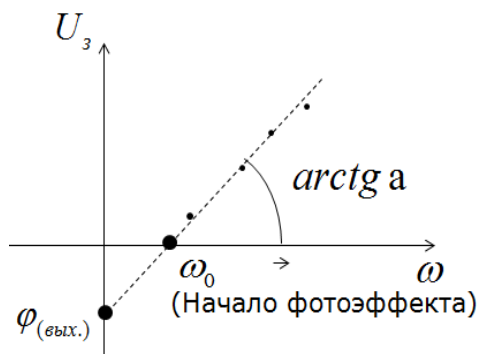


Рис. 5. Зависимость задерживающего напряжения от частоты

- Фотоэффект – это практически безынерционное явление, промежуток времени между началом освещения поверхности тела и появлением фототока не превышает $\sim 0,1 \dots 1,0$ нс.

Квантовая теория фотоэффекта была разработана А. Эйнштейном, который объяснил внешний фотоэффект как неупругое столкновение фотонов с электронами вещества. При поглощении фотона его энергия целиком передается одному электрону; при этом электрон приобретает кинетическую энергию не постепенно, а мгновенно. Этим и объясняется безынерционность фотоэффекта.

Часть энергии фотона ($\hbar\omega$) затрачивается на освобождение электрона из металла, т.е. на преодоление потенциального барьера у поверхности тела (металла) или, как говорят, на *совершение работы выхода* (A), а оставшаяся часть – переходит в кинетическую энергию вылетевшего с облучаемой поверхности фотоэлектрона.

Следовательно, для фотоэлектронов с максимальной кинетической энергией закон сохранения энергии при элементарном акте поглощения фотона электроном принимает вид:

$$\hbar\omega = A + K_{\max}, \quad (14)$$

где $K_{\max} = \frac{1}{2} m_e \cdot v_{\max}^2$ - максимальная кинетическая энергия электронов, эмитируемых из приповерхностных слоев облучаемого тела. Формула (14) получила название – *формула Эйнштейна для фотоэффекта*, а ее автор был удостоен Нобелевской премии.

1.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Тепловое излучение. Фотоэффект»

В условиях предлагаемых задач по теме «Тепловое излучение», как правило, оговаривается температура излучателя T или длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности тела, а требуется определить полную энергию излучения или сравнить энергетическую светимость излучателя при изменении его параметров.

Такого рода задачи рекомендуется решать путем составления уравнения энергетического баланса, если известны температуры излучающих тел, их характеристики (например, степень черноты ε или поглощающая способность $a_{\omega,T}$) и предполагается изолированность рассматриваемой

системы. При этом используются законы Стефана-Больцмана, смещения Вина, положения закона Кирхгофа.

В задачах по теме «Фотоэффект», как правило, используется формула Эйнштейна, которая выражает закон сохранения энергии при взаимодействии фотонов с облучаемым веществом. При этом может быть известна длина волны падающего излучения λ , по которой легко определяется энергия воздействующих фотонов, как $E = hc/\lambda$, кроме того известна работа выхода электронов A из облучаемого материала или «красная граница» фотоэффекта для этого материала λ_0 , а следует определить максимальную скорость вырываемых электронов или их кинетическую энергию. В некоторых задачах с фотоэлементом известно задерживающее напряжение U_0 , по которому определяется максимальная кинетическая энергия эмитируемых электронов из уравнения $e \cdot U_0 = \frac{1}{2} m v_{max}^2$, остальные характеристики режима работы устройства могут быть также найдены из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта.

1.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Тепловое излучение. Фотоэффект»

Задача 1. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум его испускательной способности приходится на длину волны $\lambda_m = 500$ нм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить: 1) энергетическую светимость Солнца; 2) поток энергии, излучаемый Солнцем; 3) массу вещества светила, уносимую с излучением за 1 с.

Решение. 1. Энергетическую светимость Солнца как АЧТ найдем по закону Стефана-Больцмана, т.е. $R_{\text{с0}} = \sigma T^4$, где температуру излучающей поверхности можно определить из закона смещения Вина: $T = \frac{b}{\lambda_m}$. Таким образом, для Солнца имеем: $R_{\text{с0}} = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-7}} \right)^4 = 6,4 \cdot 10^7 = 64$ (МВт/м²).

2. Поток энергии Φ , излучаемый Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь S его поверхности как шара:

$\Phi = 4\pi r^2 R_{\odot}$, где $r = 6,95 \cdot 10^8$ м – средний радиус Солнца. Таким образом, получаем: $\Phi = 4\pi(6,95 \cdot 10^8)^2 6,4 \cdot 10^7 = 3,9 \cdot 10^{26}$ (Вт).

3. Массу m , уносимую с Солнца излучением за $t = 1$ с, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии: $E = mc^2$. Энергию электромагнитных волн, излучаемых за время t , определим как произведение: $E = \Phi t$; тогда уносимая масса: $m = \Phi t / c^2 = 3,9 \cdot 10^{26} / (3 \cdot 10^8)^2 = 4,3 \cdot 10^9$ (кг) = 4,3 (Гкг).

Задача 2. При некоторой задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития, освещаемого излучением с длиной волны λ_1 , прекращается. Изменив длину волны в $n = 1,5$ раза, установили, что для прекращения фототока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в $\eta = 2,0$ раза. Работа выхода электрона с поверхности лития $A = 2,39$ эВ. Определить λ_1 .

Решение. Запишем в соответствии с формулой Эйнштейна для фотоэффекта и условием задачи два уравнения:

$$eU_0 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - A, \quad \eta eU_0 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1/n} - A.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим: $\eta = \frac{2\pi\hbar c n - A\lambda_1}{2\pi\hbar c - A\lambda_1}$, откуда определим $\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar c(\eta - n)}{A(\eta - 1)} = \frac{2\pi \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} (2,0 - 1,5)}{2,39 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} (2,0 - 1)} = 2,6 \cdot 10^{-7} = 0,26$ (мкм).

2. Элементы квантовой механики

2.1. Основные теоретические сведения

Двойственная корпускулярно-волновая природа света. В результате углубления представлений о природе света выяснилось, что в оптических явлениях обнаруживается своеобразный дуализм: тепловое излучение, фотоэффект, рентгеновское излучение, эффект Комптона служат доказательством квантовых (корпускулярных) представлений о свете как о потоке фотонов; такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия света, подтверждают волновую (электромагнитную) природу света.

Волновые свойства микрочастиц. Луи де Бройль в 1924 г. выдвинул смелую гипотезу о том, что дуализм имеет универсальный характер и распространяется не только на световые корпускулы, но и на все частицы вещества (материи), а именно: микрочастицы (например, электроны) наряду с корпускулярными обладают также и волновыми свойствами.

Л. де Бройль связывает с движущейся частицей, обладающей массой покоя m_0 , некоторую волну, которая распространяется в направлении скорости \vec{v} частицы.

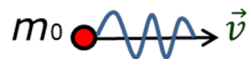


Рис. 6. Микрочастица как волна

Впоследствии было выяснено, что волны материи имеют не электродинамическую природу, а особую, квантовомеханическую природу, для которой нет аналога в классической физике.

Л. де Бройль предположил, что соотношения типа $E = \frac{hc}{\lambda}$ и $p = \frac{h}{\lambda}$, записанные для фотонов, работают и для вещественных микрочастиц, а движение любой частицы представляется волновым процессом, длина волны которого равна: $\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}$, а частота $\omega = \frac{E}{\hbar}$. Позже λ_B была названа *дебройлевской длиной волны* частицы с импульсом p , равным (mv) .

Можно также определить фазовую скорость дебройлевской волны через волновое число k (как это делается в оптике): $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \cdot \hbar}{k \cdot \hbar} = \frac{E}{p}$ ($k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$)

1. Для случая нерелятивистской свободной частицы имеем:

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot K}}, \quad v_\phi = \frac{E}{\sqrt{2m_0 \cdot K}} = \sqrt{\frac{E}{2m_0}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m_0}} \quad (\text{здесь учтено: } p = \sqrt{2m_0 K} \text{ и } K=E).$$

2. Для случая релятивистской частицы имеем:

$$\lambda_B = \frac{h \cdot c}{\sqrt{K(K+2m_0c^2)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot K}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{K}{2m_0c^2}}} \quad (\text{здесь учтено: } p = \frac{1}{c} \sqrt{K(K+2m_0c^2)}).$$

Для *плоской волны де Бройля*, распространяющейся в направлении \vec{r} можно записать волновую функцию в комплексном виде:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})}, \quad (15)$$

где для микрочастицы выполняются соотношения $\omega = \frac{E}{\hbar}$ и $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$.

Волны де Бройля (волны материи) могут отражаться, преломляться, интерферировать друг с другом, испытывать дифракцию при взаимодействии с неоднородностями среды. В этом смысле можно говорить о дифракции частиц и наблюдать дифракционные эффекты в экспериментах с потоками (пучками) частиц в неоднородных средах.

В 1927 г. американские физики Клинтон Дэвиссон и Лестер Джермер проводят серию опытов по дифракции электронов на кристалле. Они рассуждали: если пучок ускоренных электронов обладает волновыми свойствами, то можно ожидать (даже не зная механизма отражения этих волн), что их отражение от кристалла будет иметь такой же интерференционный характер, как у рентгеновских лучей, для которых интерференционные максимумы отражения от атомных плоскостей наблюдаются при условии Вульфа – Брэггов (1913 г.): $2d \sin\alpha = m\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$; α – угол скольжения).

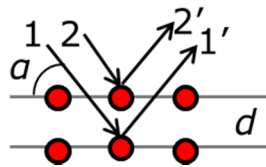


Рис. 7. Дифракция на кристалле

Также в 1927 г. Джордж Томсон осуществил опыты с быстрыми электронами (~ 10 кэВ), а коллектив под руководством П.С. Тартаковского – со сравнительно медленными электронами (до 1,7 кэВ) по «просвечиванию» ими металлических фольг. В обоих экспериментах были получены дифракционные картины (по «методу Дебая») в виде системы колец при прохождении электронных пучков через поликристаллическую фольгу. Кроме того, было установлено воздействие внешнего магнитного поля на дифрагированные лучи – они заметно отклонялись, что свидетельствовало об их электронной природе.

Принцип неопределенности. В классической механике полное описание состояния частицы (как материальной точки) определяется динамическими параметрами, такими как координата (x, y, z) , импульс (p_x, p_y, p_z) , момент импульса (L_x, L_y, L_z) , энергия (E) и др. Для материальной точки в каждый момент времени эти параметры однозначно определены и могут быть измерены.

Однако анализ реального поведения микрочастицы показывает, что существует принципиальный предел точности, с которой подобные переменные могут быть указаны и измерены макроскопическими приборами. Этот предел часто называют *принципом неопределенности*. В 1927 г. немецкий физик Вернер Гейзенберг выдвинул идею о принципиальной невозможности одновременного точного измерения определенных пар связанных между собой характеристик (канонически сопряженных величин) частицы.

В. Гейзенберг установил, что при наличии у микрочастицы волновых свойств, существует связь (*соотношения*) между неопределенностями координат и соответствующими неопределенностями компонент импульса частицы:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2 \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar/2 \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar/2 \end{cases} \quad (16)$$

Соотношения (16) обычно дополняют соотношением между неопределенностью в энергии микрочастицы и неопределенностью во времени пребывания частицы в данном энергетическом состоянии:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2 \quad (17)$$

Следует также отметить, что в связи с (16) классическое понятие траектории у микрочастицы становится вырожденным.

Задание состояния микрочастицы. Волновая функция, ее статистическая интерпретация и физический смысл. В соответствии с

корпускулярно-волновым дуализмом в квантовой механике состояние частицы задается (описывается) «пси» - функцией $\Psi(r, t)$.

Согласно Максу Борну (высказывание 1926 г.) движение любой микрочастицы в отдельности подчиняется вероятностным законам. Распределение вероятности, характеризующее это движение, проявляется в регистрации достаточно большого числа частиц. Это распределение оказывается таким же, как распределение интенсивности волны, а именно: там, где интенсивность больше, регистрируется и бóльшее число частиц. Он записывает: $dP = \kappa A^2 \cdot dV$, т.е. квадрат амплитуды световой волны в данной точке является мерой вероятности попадания фотонов в эту точку (в объем dV).

В квантовой теории постановка вопроса состоит не в точном предсказании событий, а в определении вероятностей этих событий. А затем по значениям этих вероятностей (согласно определенным правилам) можно найти средние значения случайно изменяющихся физических величин, которые и доступны в эксперименте. В связи с этим волновая функция $\Psi(r, t)$ должна интерпретироваться – статистически, т.е. она является величиной, которая позволяет находить все вероятности.

Физический смысл Ψ -функции проявляется через *плотность вероятности*, т.е. вероятность нахождения частицы в единице объема:

$$dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* \quad (18)$$

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в некотором конечном объеме, согласно теореме сложения вероятностей, можно определить, как интеграл:

$$P = \int dP = \int_V |\Psi|^2 dV \quad (19)$$

В наиболее общем случае волновая функция должна удовлетворять условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1, \quad (20)$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ – нормированная волновая функция, и предполагается, что $\Psi \neq 0$.

Также волновая функция должна удовлетворять условиям КОН, т.е. должна быть:

- *конечной* (К), потому что вероятность не может быть больше 1;
- *однозначной* (О), так как вероятность не может быть неоднозначной величиной;
- *непрерывной* (Н), потому что вероятность не может изменяться скачком.

Дополнительными условиями для волновой функции являются:

- *гладкость* Ψ -функции, т.е. отсутствие изломов;
- *непрерывность производных* типа $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ и т.п.

Уравнение Шрёдингера. В 1926 г. Эрвин Шрёдингер записал (а по сути, постулировал) фундаментальное уравнение для нерелятивистской частицы во

$$i \cdot \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi, \quad (21)$$

внешнем силовом поле относительно волновой функции. Это уравнение впоследствии получило название «*нерелятивистское временное (или общее) уравнение Шрёдингера*»:

где m – масса частицы, $U = U(x, y, z, t)$ – потенциальная функция частицы в силовом поле, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в декартовой системе координат.

Замечания. Уравнение Шрёдингера (21) является основным уравнением нерелятивистской квантовой механики; оно играет в квантовой теории такую же роль, как основное уравнение динамики (2-ой закон Ньютона) в классической механике. Уравнение (21) не может быть выведено из других соотношений (законов), его следует рассматривать как исходное, постулирующее положение, справедливость которого доказывается тем, что все его следствия полностью согласуются с экспериментом.

Особую роль в квантовой механике играют *стационарные состояния* – состояния, в которых наблюдаемые физические величины не изменяются во времени. Для этих состояний записывается *стационарное уравнение Шрёдингера*:

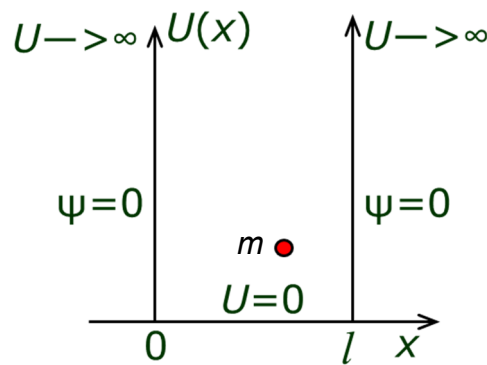
$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - U)\psi = 0, \quad (22)$$

где ψ – координатная часть полной волновой функции (для последней всегда можно записать $\Psi = \psi \cdot e^{-i\omega t}$), $U = U(x, y, z)$ – потенциальная энергия частицы во внешнем стационарном силовом поле.

Нахождение частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Рассматриваемая «яма» описывается следующей потенциальной функцией:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x < 0 \\ 0, & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \infty, & \text{при } x > l \end{cases}$$

где l – ширина потенциальной ямы (рис. 8).



**Рис. 8. Микрочастица
в прямоугольной потенциальной яме**

Замечание. Эта стационарная задача имеет принципиальное значение, поскольку такая потенциальная яма есть первое приближение силового поля, связывающего электроны в атоме, а также атомы в кристаллической решетке.

Предполагается, что изначально микрочастица массы m находится внутри ямы, а так как на потенциальных барьерах действуют огромные силы, то

стенки ямы являются идеально отражающими, и частица не может покинуть яму, т.е. она никогда не будет за пределами ямы ($x < 0$; $x > l$), где всегда $\psi = 0$.

В пределах ямы ($0 \leq x \leq l$) волновая функция частицы удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \cdot \psi = 0 \text{ или в каноническом виде } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \cdot \psi = 0, \quad (23)$$

где $k^2 = 2mE / \hbar^2$.

С учетом регуляризации волновой функции и граничных условий данной задачи получаем так называемые *собственные функции* для частицы в прямоугольной яме:

$$\psi(x) = A \sin(\pi n x / l), \text{ где } n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Коэффициент A определяется из условия нормировки:

$$\int_0^l |\psi|^2 dx = A^2 \cdot \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

Тогда выражение для *нормированных собственных функций* принимает вид:

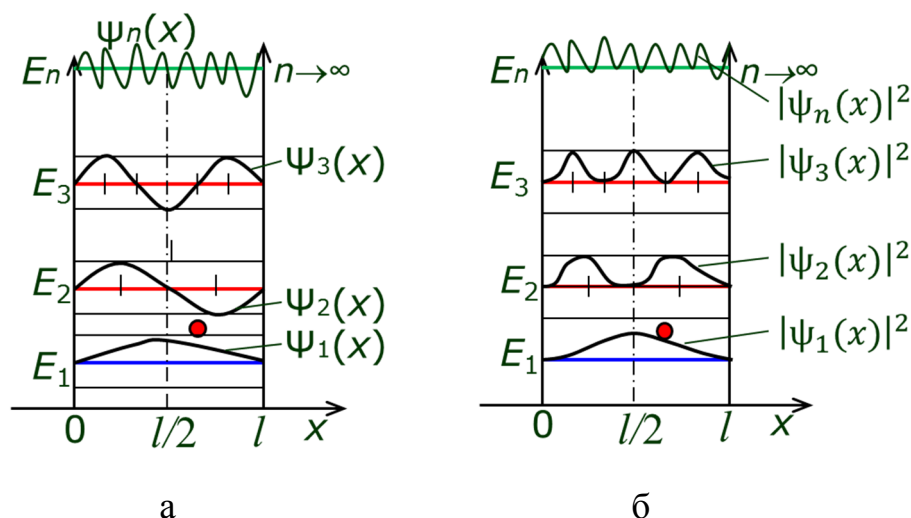
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

В частности, для основного состояния $n = 1$: $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

Определяя $k = \pm \pi n / l$ и подставляя в выражение для k^2 , получаем *собственные значения полной энергии частицы*:

$$E_n = \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2m \cdot l^2} \cdot n^2 \quad (26)$$

Значения E_n также называются *энергетическими уровнями* возможных состояний частицы, а n – *главным квантовым числом* (т.к. оно определяет значение E_n).



**Рис. 9. а - собственные функции ψ_n , энергетические уровни E_n ;
б – плотности вероятности $|\psi_n|^2$ для различных состояний**

• *Выводы по рассмотренной задаче.*

1. Даже в основном состоянии с $n = 1$ полная энергия частицы отлична от «0» и равна $E_{min} = E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$.
2. Энергия микрочастицы – квантуется (см. 26), т.е. принимает ряд дискретных значений E_n .
3. Дискретный характер энергии проявляется для сравнительно малых масс (m) и малых областей (l).
4. При $n \rightarrow \infty$ квантовое распределение энергии частицы переходит в классическое (непрерывное). Это одна из сторон *принципа соответствия Н. Бора*.

Прохождение частицы через высокий потенциальный барьер – туннельный эффект. Микрочастица массой m с энергией E налетает на барьер высотой U_0 ($U_0 > E$) и шириной l .

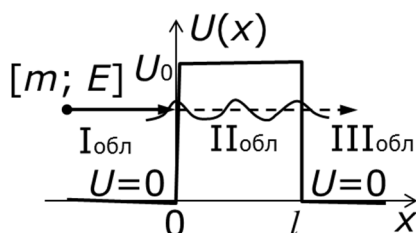


Рис. 10. Туннельный эффект

Разобьем все одномерное пространство на три области (рис. 10): I_{обл} ($x < 0$), II_{обл} ($0 \leq x \leq l$), III_{обл} ($x > l$); запишем уравнения Шредингера для этих областей в каноническом виде:

– для областей I и III $\frac{\partial^2 \psi_{1;3}}{\partial x^2} + k_{1;3}^2 \psi_{1;3} = 0$, где $k_{1;3} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$;

– для области II $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0$, где $k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$.

Общие решения уравнений для областей:

$$\psi_1(x) = A_1 \cdot e^{ik_{1;3}x} + B_1 \cdot e^{-ik_{1;3}x} \quad \text{I}_{\text{обл}}$$

$$\psi_2(x) = A_2 \cdot e^{k_2x} + B_2 \cdot e^{-k_2x} \quad \text{II}_{\text{обл}}$$

$$\psi_3(x) = A_3 \cdot e^{ik_{1;3}x} + B_3 \cdot e^{-ik_{1;3}x} \quad \text{III}_{\text{обл}}$$

В области I есть как прямая (падающая) волна де Бройля с амплитудой A_1 , так и обратная (отраженная) волна с амплитудой B_1 .

В области II решение $\psi_2(x)$ – уже не соответствует плоским волнам де Бройля, поскольку показатели экспонент не мнимые, а действительные.

В области III есть только прямая (прошедшая) волна де Бройля, поэтому следует принять $B_3 = 0$, и тогда здесь получаем $\psi_3(x) = A_3 \cdot e^{ik_{1;3}x}$.

Из условий непрерывности и гладкости волновой функции и ее первой производной на границах барьера ($x = 0$; $x = l$), а также с учетом выражений соответствующих функций: $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ получаем систему уравнений для коэффициентов A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 :

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (\text{обычно принимают } A_1 = 1)$$

$$ik_{1;3}(A_1 - B_1) = k_2(A_2 - B_2)$$

$$A_2 \cdot e^{k_2l} + B_2 \cdot e^{-k_2l} = A_3 \cdot e^{ik_{1;3}l}$$

$$k_2(A_2 \cdot e^{k_2l} - B_2 \cdot e^{-k_2l}) = ik_{1;3} \cdot A_3 \cdot e^{ik_{1;3}l}$$

Разрешая последнюю систему уравнений относительно A_2, B_2, A_3 , получаем:

$$A_2 = \frac{A_3}{2} \left(1 + \frac{ik_{1;3}}{k_2} \right) \cdot e^{(ik_{1;3} - k_2)l}; \quad B_2 = \frac{A_3}{2} \left(1 - \frac{ik_{1;3}}{k_2} \right) \cdot e^{(ik_{1;3} + k_2)l};$$

$$A_3 = \frac{4 i k_{1;3} k_2 \cdot e^{i k_{1;3} l}}{(k_{1;3} + i k_2)^2 \cdot e^{-k_2 l} - (k_{1;3} - i k_2)^2 \cdot e^{k_2 l}}$$

Обычно величина $k_2 l \gg 1$, поэтому в этом случае в знаменателе для A_3 можно пренебречь слагаемым с $e^{-k_2 l}$, по сравнению со слагаемым с $e^{k_2 l}$. В результате выражение для A_3 примет вид:

$$A_3 \approx \frac{4 i k_{1;3} k_2 \cdot e^{i k_{1;3} l}}{-(k_{1;3} - i k_2)^2 \cdot e^{k_2 l}} = - \frac{4 i k_{1;3} k_2 \cdot e^{i k_{1;3} l}}{(k_{1;3} - i k_2)^2} e^{-k_2 l}.$$

Таким образом, получаем для частицы, налетающей на высокий барьер коэффициент отражения $R = \frac{P'}{P} = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2$, коэффициент пропускания $D = \frac{P''}{P} =$

$$\left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 \approx \left| \frac{4 i k_{1;3} k_2 \cdot e^{i k_{1;3} l}}{(k_{1;3} - i k_2)^2} \right|^2 \cdot e^{-2k_2 l}. \quad \text{Коэффициент при экспоненте } D_0 = \left| \frac{4 i k_{1;3} k_2 \cdot e^{i k_{1;3} l}}{(k_{1;3} - i k_2)^2} \right|^2 \approx 1, \text{ поэтому обычно записывают:}$$

$$D = D_0 \cdot e^{-2k_2 l} = D_0 \cdot \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \cdot \sqrt{2m(U_0 - E)} \cdot l \right] \quad (27)$$

Коэффициент отражения R после вычисления D может быть определен также из условия нормировки: $R + D = 1$.

- *Выводы* по рассмотренной задаче.

1. «Классическая» частица, подходя к высокому барьеру, всегда отражается от него.

2. Квантовая частица может пройти через высокий потенциальный барьер конечной ширины, причем вероятность ее прохождения испытывает сильную зависимость от массы частицы (m), ее энергии (E) и от формы и размеров барьера. В этом как раз и заключается туннельный эффект.

2.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Основы квантовой механики»

Если в условиях предлагаемых задач по теме «Основы квантовой механики» рассматривается движение микрочастицы в малой локальной области с заданным размером, то характеристики частицы (ее импульс, энергия) могут быть оценены из соотношения неопределенностей

Гейзенберга. А если требуются определить волновые характеристики у частицы (длина волны, частота), то следует воспользоваться формулами, предложенными Л. де Бройлем, предварительно проанализировав с какой частицей (нерелятивистской или релятивистской) мы имеем дело в данной задаче. Последний анализ проводится путем сопоставления заданной энергии частицы с ее энергией покоя.

В стационарных квантовомеханических задачах рекомендуется записать уравнение Шрёдингера для микрочастицы, движущейся в пространстве с заданными условиями, и попытаться его решить, используя граничные условия. Дальнейшие расчеты энергии частицы для рассматриваемых состояний, вероятности пребывания частицы в указанной области пространства, коэффициента пропускания барьера следует вести по известным формулам и правилам (см. раздел 2.1).

2.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Основы квантовой механики»

Задача 1. Найти дебройлевскую длину волны протонов, если в однородном магнитном поле с индукцией B радиус кривизны их траектории – окружности – равен R .

Решение. Согласно формуле для волны де Бройля сначала надо определить импульс протонов. Для этого воспользуемся уравнением динамики: $m \frac{v^2}{R} = evB$, откуда импульс $p = mv = ReB$. Таким образом, длина волны де Бройля для рассматриваемых протонов:

$$\lambda_B = 2\pi\hbar/ReB.$$

Задача 2. Электрон с энергией $E = 4,9$ эВ движется в положительном направлении оси x . На его пути находится прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ. При какой ширине d барьера вероятность прохождения электрона через него будет равна 0,2?

Решение. Вероятность P прохождения частицы через потенциальный барьер по своему физическому смыслу совпадает с коэффициентом пропускания D , т.е. $P = D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}d\right]$, где m - масса электрона.

Логарифмируя последнее равенство, получим:

$$\ln P = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}d, \text{ откуда можно получить для ширины барьера:}$$

$$d = \frac{\hbar \ln(1/P)}{2\sqrt{2m(U-E)}} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34} \ln(1/0,2)}{2\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (5,0 - 4,9)}} = 4,95 \cdot 10^{-10} = 0,495 \text{ (нм)}.$$

3. Элементы физики твердого тела

3.1. Основные теоретические сведения

Распределение Ферми-Дирака для свободных электронов в металле.

В первом приближении свободные (несвязанные с атомами) электроны в металле можно рассматривать как *идеальный ферми-газ*, находящийся в прямоугольной потенциальной яме.

Сначала рассмотрим электронный ферми-газ при $T = 0$ К. В этом случае функция заполнения или иначе функция распределения частиц $f(E_i)$ с энергией E_i в фазовых ячейках принимает следующие значения (рис. 11):

$$\begin{cases} f(E \leq \mu) = 1 \rightarrow \text{заполнены все состояния} \\ f(E > \mu) = 0 \rightarrow \text{все состояния свободны.} \end{cases} \quad \text{Состояния - квантованы и}$$

энергетические уровни - дискретны, но расположены так густо, что энергетический спектр можно считать квазинепрерывным.

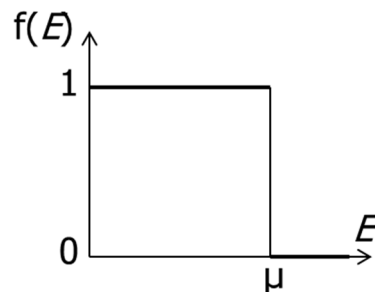


Рис. 11. Функция заполнения

для электронного газа при $T = 0$ К

В рассматриваемом случае ($T = 0$ К) величину μ (химический потенциал) принято называть *энергией* (или *уровнем*) *Ферми*: $E_F = \mu$.

Определение. Энергия Ферми – это энергия, которая является максимально возможной для свободных электронов в металле при $T = 0$ К.

Определим число фазовых ячеек (число квантовых состояний) dz для свободных электронов с энергиями в интервале $[E, E+dE]$ в расчете на единицу объема, занимаемого электронным газом, эту величину часто называют *плотностью квантовых состояний* для электронного ферми-газа. Это число может быть определено через импульс как отношение полного числа фазовых ячеек dZ к объему V в физическом пространстве:

$$dz = \frac{dZ}{V} = \frac{4\pi}{h^3} p^2 dp, \quad (28)$$

где принято, что объем одной фазовой ячейки $\delta\Lambda \approx h^3$.

Зная число dz и функцию заполнения f , можно найти концентрацию частиц dn в интервале энергий $[E, E+dE]$:

$$dn = \gamma \cdot f \cdot dz, \quad (29)$$

где $\gamma \sim 1$ – коэффициент, определяемый спецификой частиц.

По известной связи между энергией и импульсом электрона: $E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow$

$p = \sqrt{2mE}$, $dp = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dE}{\sqrt{E}}$ и, следовательно, с учетом (28) получаем

$$dz = \frac{4\pi}{h^3} (2mE) \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dE}{\sqrt{E}} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE \quad (30)$$

или с учетом обозначения $\alpha = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2}$ имеем:

$$dz = \alpha \sqrt{E} dE. \quad (31)$$

Концентрация свободных электронов с энергиями в $[E, E+dE]$, согласно (29) определяется как $dn = 2 f dz$, где $\gamma = 2$ – соответствует фермионам, число

которых в каждой фазовой ячейке может быть равным 2 (с противоположно направленными спинами).

В нашем случае ($T = 0$ К) свободные электроны заполняют все квантовые состояния с энергиями $E \leq E_F$ и, следовательно, $f = 1$, т.е. здесь с учетом (31) имеем:

$$dn = 2\alpha\sqrt{E}dE \quad (32)$$

Соответствующее отношение dn/dE определяет так называемую *функцию распределения свободных электронов по энергиям* (рис. 12).

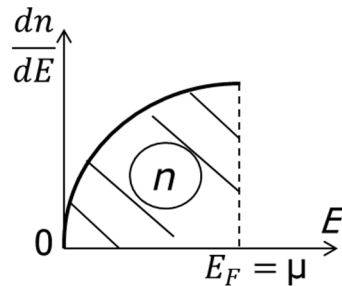


Рис. 12. Функция распределения свободных электронов по энергиям

Площадь под кривой dn/dE определяет полную концентрацию n свободных электронов в металле при $T = 0$ К:

$$n = \int_0^{E_F} dn = \frac{4}{3}\alpha E_F^{3/2} \quad (33)$$

Расчет энергии Ферми. Из (33) легко определяется энергия Ферми (в предположении известной концентрации n):

$$E_F = \left(\frac{3n}{4\alpha}\right)^{2/3} = \left(\frac{3h^3n}{4 \cdot 2\pi}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{2m} = \frac{h^2}{8m} \cdot \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} \quad (34)$$

или через $\hbar = h/2\pi$ получаем $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot (3\pi^2n)^{2/3}$.

Определение средней энергии электронов.

$$\langle E \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{E_F} E \cdot dn = \frac{1}{n} \int_0^{E_F} 2\alpha E^{3/2} dE = \frac{3}{5} E_F \quad (35)$$

Пример. Для средних концентраций электронов $n \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$ имеем по формуле (34) $E_F \cong 5 \text{ эВ}$ и по (35) $\langle E \rangle = 3 \text{ эВ}$.

Распределение Ферми-Дирака при $T > 0$ К. Функция заполнения $f(E)$ вида (2) для фермионов при температурах, отличных от 0 К, несколько «размывается» в окрестности уровня Ферми. Это происходит вследствие взаимодействия свободных электронов с атомами кристалла, подверженными тепловым колебаниям; энергетическая область размыва составляет $\sim kT$ (рис. 13).

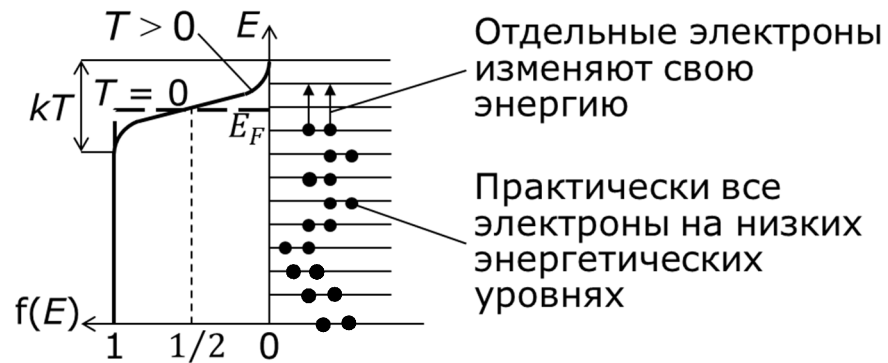


Рис. 13. Функция заполнения для фермионов при $T > 0$ К

Определение. (Дополнительно). Энергия Ферми – это энергия такого уровня, вероятность заполнения которого свободными электронами равна $1/2$.

Аналогично деформируется и функция распределения свободных электронов по энергиям, т.е. dn/dE (рис. 14).

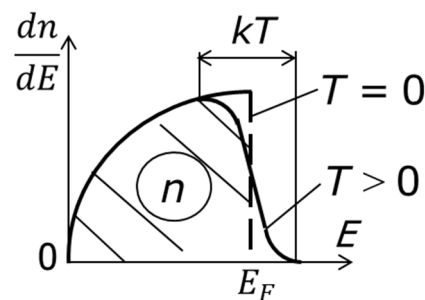


Рис. 14. Функции распределения свободных электронов по энергиям

Замечание. При нагревании металла энергию могут изменить только те свободные электроны, которые находятся на самых верхних уровнях, примыкающих к уровню Ферми. Основная же масса электронов – на более низких уровнях – остается в прежнем состоянии и поглощать энергию при нагреве не будет.

Вырожденный электронный газ, температура вырождения.

Поведение электронного газа в сильной степени зависит от соотношения между температурой кристалла и температурой Ферми. Величина, равная $T_F = \frac{E_F}{k}$, называется *температурой Ферми*.

Различают два предельных случая:

- 1) если $T \ll T_F$, т.е. $kT \ll E_F$, *электронный газ* называется *вырожденным*;
- 2) если $T \gg T_F$, т.е. $kT \gg E_F$, *электронный газ* называется *невырожденным*.

Замечание. Даже при температурах порядка температуры плавления металла электронный газ остается вырожденным.

При $T < T_F$ пользуются распределением Ферми-Дирака; при $T > T_F$ пользуются распределением Максвелла-Больцмана.

Определение. Температура, ниже которой начинают проявляться квантовые свойства (электронного) газа, обусловленные тождественностью его частиц, называется *температурой вырождения*. Поэтому $T_{\text{выр}} = T_F$.

Образование зон из энергетических уровней отдельных атомов.

Валентные электроны в кристалле движутся не вполне свободно – на них действует потенциальное периодическое поле решетки, обусловленное взаимодействием близкорасположенных атомов. Электроны при этом обобществляются. Весь квазинепрерывный энергетический спектр электронов распадается под действием этого поля на ряд чередующихся *разрешенных и запрещенных зон*.

Определение. Разрешенную зону, возникшую из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома, называют *валентной зоной*.

При абсолютном нуле валентные электроны заполняют попарно нижние уровни валентной зоны, а более высокие уровни могут быть свободны.

Определение. Зону, расположенную над валентной зоной, называют *свободной*.

Классификация кристаллов. В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны все кристаллы подразделяют на: *металлы, полупроводники и диэлектрики*.

Определение. Вещества, у которых валентная зона заполнена не полностью, называют *металлами*.

Металлам достаточно сообщить совсем небольшую энергию ($\sim 10^{-23} - 10^{-22}$ эВ), чтобы перевести их электроны на более высокие свободные уровни валентной зоны, где они проявляют себя или в теплоемкости, или в электропроводности. Например, включение внешнего электрического поля обеспечивает перевод этих электронов в зону проводимости и их направленный дрейф против поля.

Определение. Вещества с полностью заполненными валентными зонами относятся либо к *полупроводникам* (у них ширина запрещенной зоны невелика $\Delta E \sim 0,1 - 1$ эВ), либо к *диэлектрикам* (у последних – $\Delta E > 1$ эВ).

Для собственных полупроводников (чистых, беспримесных полупроводников) нагрева (энергии теплового движения) оказывается достаточным для того, чтобы перевести часть электронов из валентной зоны в верхнюю свободную зону (она становится *зоной проводимости*); одновременно оказывается возможным переход электронов валентной зоны на ее освободившиеся верхние уровни (начинается миграция «дырок» в валентной зоне), таким образом, в полупроводнике электропроводность будет обеспечиваться электронами в зоне проводимости и «дырками» в валентной зоне.

У диэлектриков – большая запрещенная зона ΔE , и поэтому тепловое движение не сможет «забросить» в свободную зону заметную порцию электронов и обеспечить проводимость этих веществ. Они являются изоляторами.

Электропроводность собственных полупроводников. Количество образовавшихся электронов (в зоне проводимости) и дырок (в валентной зоне) пропорционально $f(E)$, а так как электропроводность σ

пропорциональна числу носителей заряда, то имеем *температурную зависимость проводимости полупроводников* в виде:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right), \quad (36)$$

где $\sigma_0 \approx const$ (она слабо изменяется с температурой), ΔE – ширина запрещенной зоны.

В собственном полупроводнике осуществляется электронный и дырочный механизмы токопереноса.

Число образующихся (в результате нагрева) электронов в зоне проводимости всегда равно числу образующихся дырок в валентной зоне. Если обозначить: μ_e и μ_d - подвижности электронов и дырок, а n_e и n_d - их соответствующие концентрации, то согласно общей теории проводимости

$$\sigma = n_e e \mu_e + n_d e \mu_d, \quad (37)$$

а с учетом $n_e = n_d = n$ имеем:

$$\sigma = ne(\mu_e + \mu_d) \quad (38)$$

Замечание. При встрече свободного электрона с дыркой – они рекомбинируют (соединяются), т.е. электрон нейтрализует избыточный положительный заряд, имеющийся в окрестности дырки, и теряет свободу передвижения до тех пор, пока снова не получит от кристаллической решетки энергию, достаточную для своего высвобождения.

Эффект Холла заключается (рис. 15) в возникновении поперечного электрического поля и соответствующей разности потенциалов в образце-пластинке из проводника (или из полупроводника), по которому течет электрический ток I , при помещении образца в магнитное поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной к направлению тока.

На верхней и нижней гранях пластинки образуется холловская разность потенциалов:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = U_X = R_X \cdot \frac{I \cdot B}{b}, \quad (39)$$

где R_X – постоянная Холла.

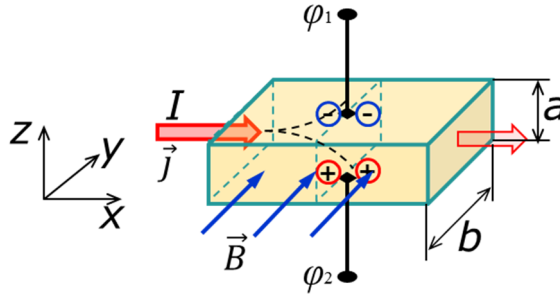


Рис. 15. Иллюстрация эффекта Холла

При включении магнитного поля на каждый носитель тока начинает действовать магнитная сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{u}, \vec{B}]$, направленная вдоль стороны пластинки a . В результате, если носителями являются электроны, происходит их накопление на верхней грани, а у нижней грани получается избыток положительных зарядов. Таким образом, образуется дополнительное, поперечное электрическое поле, которое называют холловским \vec{E}_B . Для положительных носителей – картина обратная.

В ходе эксперимента наступает такой момент, когда напряженность поперечного поля \vec{E}_B достигает такого значения, что его действие на заряды будет уравнивать силу Лоренца: $q \cdot E_B = q \cdot u \cdot B$, при этом $E_B = u \cdot B$ или в векторном виде $\vec{E}_B = -[\vec{u}, \vec{B}]$.

В результате холловское напряжение принимает вид:

$$U_X = E_B \cdot a = u \cdot B \cdot a,$$

а определив скорость дрейфа u из выражения для тока, т.е. $u = \frac{I}{q \cdot n \cdot (ab)}$, получаем после подстановки искомое напряжение:

$$U_X = \frac{I}{q \cdot n \cdot (a \cdot b)} \cdot B \cdot a = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \frac{I \cdot B}{b}.$$

Сопоставляя последнее выражение для U_x с формулой (39), приходим к заключению, что постоянная Холла равна:

$$R_X = \frac{1}{q \cdot n}. \quad (40)$$

Видно, что знак R_X совпадает со знаком носителей, а поэтому определив знак U_X , можно установить знак носителей тока.

3.2. Методические рекомендации к решению задач по теме

«Электронный газ в металле. Эффект Холла»

В задачах по теме «Электронный газ в металле» обычно задан уровень Ферми, по которому с использованием формулы (33) можно определить концентрацию электронов в металле при $T = 0$ К. Также при известном E_F с использованием формулы (35) можно определить среднее значение энергии электронов $\langle E \rangle$, а их максимальную скорость v_{\max} можно рассчитать из уравнения $\frac{mv_{\max}^2}{2} = E_F$.

При необходимости определения средней скорости электронов $\langle v \rangle$ следует воспользоваться правилом нахождения среднего значения, т.е.

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_{\max}} v \cdot dn(v)}{\int_0^{v_{\max}} dn(v)},$$
 где $dn(v)$ – распределение свободных электронов по

скоростям при $T = 0$ К, полученное из известного распределения этих электронов по энергиям (см. формулу (32)) с учетом того, что $E = \frac{mv^2}{2}$ и $dE = mv dv$.

Электропроводность собственного полупроводника по известным подвижностям электронов и дырок и концентрации носителей следует рассчитывать по формуле (38). При условии нагрева образца из полупроводника его электропроводность можно определить по формуле (36).

Для определения холловского напряжения в образце-пластинке следует использовать формулу (39), где постоянная Холла определяется по известной концентрации носителей n как $R_X = \frac{1}{q \cdot n}$.

3.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Электронный газ в металле. Эффект Холла»

Задача 1. Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия при $T = 0$ К, если уровень Ферми $E_F = 3,07$ эВ. Плотность натрия считать известной $\rho = 0,97$ г/см³.

Решение. 1) Определим концентрацию атомов Na:

$$n_A = \frac{\rho}{m_A} = \frac{\rho}{A_{Na} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = \frac{0,97 \cdot 1000}{23 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} \cong 2,54 \cdot 10^{28} (\text{м}^{-3});$$

2) Концентрация свободных электронов при $T = 0$ К:

$$n = \frac{2\sqrt{2}m^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} E_F^{3/2} = \frac{2\sqrt{2}(9,11 \cdot 10^{-31})^{3/2}}{3\pi^2(1,05 \cdot 10^{-34})^3} (3,07 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})^{3/2} \cong 2,47 \cdot 10^{28} (\text{м}^{-3});$$

3) Таким образом, искомое число электронов:

$$N_{/A} = \frac{n}{n_A} = \frac{2,47 \cdot 10^{28}}{2,54 \cdot 10^{28}} \cong 0,97.$$

Задача 2. При измерении эффекта Холла пластинку из полупроводника p -типа толщины $a = 10$ мм и длины $l = 50$ мм поместили в магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. К концам пластинки (продольное направление) приложили разность потенциалов $U = 10$ В. При этом холловская разность потенциалов $U_X = 50$ мВ и удельное сопротивление пластинки $\rho = 2,5$ Ом·см. Найти концентрацию дырок и их подвижность.

Решение. 1) Для полупроводника p -типа характерно, что концентрация дырок $n_d \gg n_e$ концентрации электронов, и в эффекте Холла постоянная может быть определена как $R_X \approx \frac{1}{en_d}$. Постоянная Холла также может быть рассчитана через измеренную разность потенциалов U_X как: $R_X = \frac{U_X}{a \cdot j \cdot B}$, где j – плотность тока через сечение пластинки, которую можно определить по закону Ома в предположении однородного электрического поля $j = \frac{1}{\rho} E = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$. Таким образом, $R_X = \frac{U_X l \rho}{a U B}$.

3) Концентрацию дырок найдем из уравнения для R_X : $\frac{1}{en_d} = \frac{U_X l \rho}{a U B}$, т.е.

$$n_d = \frac{a U B}{e l \rho U_X} = \frac{10^{-2} \cdot 10 \cdot 0,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \cong 5 \cdot 10^{21} (\text{м}^{-3}) = 5 \cdot 10^{15} (\text{см}^{-3});$$

4) Т.к. плотность тока в пластинке можно представить как $j = en_d u$ или $j = en_d \mu_d E$, где $\mu_d = \frac{u_d}{E}$ – подвижность дырок, а с учетом закона Ома $j = \frac{1}{\rho} E$ получаем:

$$\mu_d = \frac{1}{e \rho n_d} = \frac{1}{e \rho} \frac{e l \rho U_X}{a U B} = \frac{l U_X}{a U B} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{10^{-2} \cdot 10 \cdot 0,5} = 0,05 \left(\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} \right).$$

4. Элементы атомной и ядерной физики

4.1. Основные теоретические сведения

Введение в строение атома.

Определение. Атом – наименьшая часть химического элемента, являющаяся носителем его свойств.

Атом состоит из тяжелого ядра, обладающего положительным зарядом, и окружающих его легких частиц – электронов, обладающих отрицательным зарядом. В целом, атом – электрически нейтральное образование, т.е.

$$|q_{\text{я}}| = |q_{\Sigma e}|$$

Ядро атома состоит из Z – протонов и $(A - Z)$ – нейтронов, массы которых приблизительно одинаковы ($m_p \approx m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг). Z – называется *зарядовым числом* (оно же порядковый номер химического элемента в Периодической системе Менделеева), определяет заряд ядра $q_{\text{я}} = +Z \cdot e$; A – *массовое число* (в углерод. ед.). Практически вся масса атома сосредоточена в ядре, так как $m_{p;n} \approx 1833 \cdot m_e$, где масса электрона $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Размер атома $\sim 10^{-10}$ м, а – ядра $\sim 10^{-15}$ м, поэтому атом относительно «прозрачен» (для других ядер и элементарных частиц).

Важнейшими характеристиками проявления оптических свойств атомов являются их *спектры излучения*.

Определение. Излучение невзаимодействующих друг с другом атомов состоит из отдельных спектральных линий, поэтому *спектр испускания атомов является линейчатым*.

Именно изучение и объяснение спектров, наблюдаемых в экспериментах, послужило «толчком» к познанию строения атома. Прежде всего, было замечено, что линии в спектрах атомов расположены не беспорядочно, а объединяются в группы, или, как их называют, *серии линий*.

Рассмотрим наиболее изученный спектр атомарного водорода. Так для видимой области наблюдается *серия Бальмера* (рис. 16).

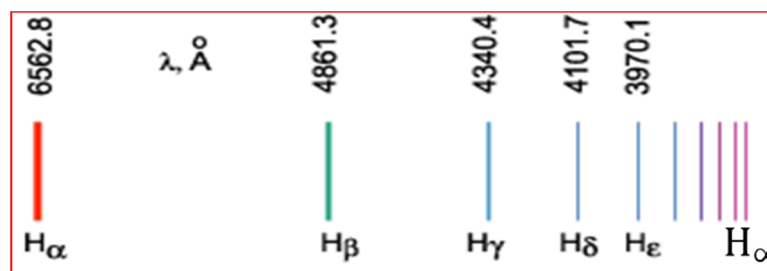


Рис. 16. Серия Бальмера в спектре водорода

Частоты всех линий спектра водорода подчиняются *обобщенной формуле И. Бальмера* (1885 г.):

$$\omega = R \left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (41)$$

где $n_0 = 1, 2, 3, 4, \dots$; n – целочисленный параметр, начиная с $(n_0 + 1)$; $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{c}^{-1}$ – постоянная Ридберга. Так для серии Бальмера выполняется: $\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, где $n = 3, 4, 5, \dots$

Ядерная модель атома – модель Резерфорда. В 1911 г. Эрнест Резерфорд предложил *ядерную (или планетарную) модель атома*, явившуюся важным шагом на пути к современным представлениям о строении атома. Согласно этой модели, вокруг тяжелого положительного ядра с зарядом $q_{\text{я}} = +Ze$ по круговой орбите под действием сил электростатического притяжения движутся электроны (подобно тому, как планеты обращаются вокруг Солнца под действием сил гравитации). Заряд ядра равен суммарному заряду электронов, поскольку атом электрически нейтрален. Почти вся масса атома сосредоточена в ядре, размеры которого значительно (\sim в 100 раз) меньше размеров атома, т.е., иначе говоря, «атом – достаточно прозрачен».

Заключение о такой модели Резерфорд сделал после серии экспериментов, проведенных его командой, по рассеянию α – частиц (ядра атомов гелия) на тонкой металлической фольге.

Большинство α – частиц отклонялось на небольшие углы $\theta \sim 3^\circ$, но отдельные частицы рассеивались на большие углы - до 180° .

Э. Резерфорд сделал вывод, что такие частицы появляются в результате единичного акта их взаимодействия с ядром атома, которое обуславливает

сильное электрическое поле, приводящее к отклонению положительно заряженных α – частиц (действие кулоновской силы).

Однако модель Резерфорда оказалась в резком противоречии с законами классической электродинамики.

Поскольку система неподвижных зарядов не может находиться в устойчивом состоянии (теорема Ирншоу), Резерфорду пришлось отказаться от статической модели атома и предположить, что электроны движутся вокруг ядра, описывая искривленные траектории. Но в этом случае электрон будет двигаться с ускорением, а значит (согласно электромагнитной теории) должен непрерывно излучать электромагнитные волны и терять энергию. А последнее должно привести к падению электрона на ядро. Время жизни такого атома оказывается $\sim 10^{-11}$ с, что явно не согласуется с длительным, устойчивым состоянием большинства атомов.

Постулаты Бора. Абсолютная неустойчивость планетарной модели атома по Резерфорду и вместе с тем наблюдаемая в экспериментах удивительная закономерность в атомных спектрах (см. формулу 41), а именно: их дискретность (линейчатость), привели Н. Бора к необходимости сформулировать в 1913 г. два важнейших постулата квантовой физики.

1. Из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются в действительности только некоторые дискретные орбиты, удовлетворяющие определенным квантовым условиям. Или, иначе говоря, атом может длительное время ($\sim 10^{-8}$ с – это значительно больше периода обращения электрона вокруг ядра $T_{\text{обр}} \approx 10^{-16}$ с) находиться только в определенных, так называемых стационарных состояниях, которые характеризуются дискретными значениями энергии E_1, E_2, \dots В этих состояниях, когда электрон находится на одной из стационарных орбит, несмотря на то, что он движется с ускорением, – он не излучает электромагнитных волн (света).

2. Постулат Бора (или *правило частот*). При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое происходит испускание (или

поглощение) светового кванта энергии $\hbar\omega$, величина которого определяется разностью энергий тех состояний, между которыми совершается квантовый «скачок» (переход) электрона:

$$\hbar\omega = E_{n(o)} - E_{m(k)} \quad (42)$$

где E_n и E_m соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения) фотона; причем при $E_m < E_n$ происходит излучение фотона, а при $E_m > E_n$ – поглощение фотона.

Замечание. Набор возможных дискретных частот $\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ квантовых переходов и определяет линейчатый характер спектра атома.

Элементарная боровская теория водородного атома. Чтобы получить согласие с результатами наблюдений, Н. Бор предположил, что электрон в атоме водорода движется только по тем круговым орбитам, для которых его момент импульса удовлетворяет условию квантования:

$$L = m_e v_n r_n = n \cdot \hbar \quad (43)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; v_n - скорость электрона на n -ой орбите радиуса r_n .

Электрон при своем вращении по орбите r_n - находится в поле действия центральной кулоновской силы положительного ядра с зарядом $(+Ze)$, а согласно 2-му закону Ньютона $m_e \cdot a_n = F_{\text{кул}}$ получаем для водородоподобных систем (H, He⁺, Li⁺²):

$$\frac{m_e \cdot v_n^2}{r_n} = \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_n^2} \quad (44)$$

Решив это предложенное ещё Резерфордом уравнение, подставив в него выражение v_n из условия (43), т.е. $v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}$, Н. Бор получил формулу для *радиуса n -ой стационарной орбиты:*

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_e e^2 Z} \quad (45)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; в частности для 1-ой боровской орбиты атома водорода ($n = 1, Z = 1$) имеем:

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \cong 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,529 \text{ \AA} \quad (46)$$

Из (45) также следует, что для водорода радиусы орбит квантуются как $r_n = n^2 \cdot r_1$.

Полная энергия электрона в атоме водорода (E) складывается из его кинетической энергии $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r}$, и отрицательной потенциальной энергии $U = -\frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, т.е.

$$E = K + U = \frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r}.$$

А с учётом того, что под r понимается радиус n -ой стационарной орбиты (45) получаем:

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

Эта формула – описывает энергетические уровни стационарных состояний электрона в атоме водорода; видно, что энергия электрона квантуется.

В основном состоянии $n = 1$ имеем энергию: $E_1 = -13,53$ эВ – эта энергия (по модулю) является *энергией связи* электрона в основном состоянии: $E_{\text{св}} = |E_1| = 13,53$ эВ. Именно эту энергию надо сообщить электрону, находящемуся в основном состоянии, чтобы удалить его из атома водорода, т.е., как говорят, ионизовать атом водорода, поэтому энергию связи также называют энергией ионизации: $E_i = E_{\text{св}} = 13,53$ эВ.

Замечание. Теория Н. Бора, сделав значительный шаг вперед для описания атома водорода и его спектров, не смогла ответить на ряд важных вопросов, например: почему осуществляются переходы между одними энергетическими уровнями и не осуществляются между другими (в ней проявляется недостаток правил квантования – «правил отбора квантовых чисел»); почему электроны на стационарных орбитах – не излучают электромагнитную энергию; какова природа излучения более сложных атомов (уже начиная с «He»)?

Следующий и завершающий шаг в развитии теории строения атома – это создание квантовомеханической теории водородоподобных систем.

Водородоподобные системы – это системы, состоящие из ядра с зарядом $(+Ze)$ и одного электрона, который движется в кулоновском поле ядра (например, H , ион He^+ , ион Li^{++} и др.).

Стационарное уравнение Шредингера для атома водорода.

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром равна: $-\frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, где r – расстояние между электроном и ядром. Условие калибровки потенциальной энергии: $U(\infty) \rightarrow 0$.

Рассмотрим центрально-симметричное поле.

Как известно, состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$, удовлетворяющей стационарному уравнению Шрёдингера:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (48)$$

где $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$ – оператор Лапласа в сферических координатах.

Уравнение (48) решается методом разделения переменных в предположении, что: $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ и ψ -функция удовлетворяет естественным условиям (К.О.Н., гладкость).

Показывается, что этим требованиям можно удовлетворить:

а) при любых положительных значениях полной энергии $E > 0$ (случай свободного электрона); б) только при дискретных отрицательных значениях энергии (собственные значения энергии):

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Собственные функции уравнения (48) содержат, как выяснилось, три целочисленных параметра n, l, m , т.е. $\psi = \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, где:

- $n = 1, 2, 3, \dots$ – *главное квантовое число*;
- $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ – *орбитальное квантовое число*;
- $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ – *магнитное квантовое число*. ψ_{nlm} – полностью описывает состояние электрона в атоме.

Физический смысл квантовых чисел. Главное квантовое число n определяет энергетический уровень (возможный ряд энергий – формула

(47)); орбитальное квантовое число l определяет модуль орбитального момента импульса электрона: $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$; магнитное квантовое число m определяет проекцию момента импульса на особое направление z : $L_z = \hbar m$.

Магнитный и механический моменты атомов могут быть обусловлены орбитальными магнитным и механическим моментами электронов, которые связаны с орбитальными движениями электронов вокруг ядер атомов.

Можно легко показать, что отношение магнитного момента p_m к механическому моменту L_e (моменту импульса) есть *гиромагнитное отношение* для орбитального движения электрона и оно равно: $g = -\frac{e}{2m_e}$.

С учетом правила квантования момента импульса можно записать для орбитального магнитного момента:

$$p_m = gL_e = -\frac{e}{2m_e} \hbar \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (49)$$

где $\mu_B = \frac{e}{2m_e} \hbar \cong 0,927 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ – магнетон Бора, $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Аналогично квантуется проекция магнитного момента на особое направление z (обычно это направление внешнего магнитного поля):

$$p_{mz} = -\frac{e}{2m_e} L_{ez} = -\frac{e}{2m_e} \hbar \cdot m = -\mu_B \cdot m, \quad (50)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

Гипотеза спина. Спин – это чисто квантовая величина, не имеющая классического аналога. Спин характеризует внутреннее свойство частицы (электрона), подобное массе или электрическому заряду.

Впервые в 1925 г. для объяснения наблюдаемой тонкой структуры в ряде спектров (расщепление отдельных линий в спектрах щелочных металлов) С. Гаудсмит и Дж. Уленбек выдвинули гипотезу о том, что электрон обладает собственным моментом импульса L_s , названным впоследствии *спином*. Идея спина позволила объяснить также результаты ряда проведенных ранее экспериментов, в частности, знаменитый эксперимент Штерна-Герлаха по расщеплению невозбужденного атомарного пучка в поперечном неоднородном магнитном поле на две симметричные компоненты.

Впоследствии выяснилось, что спин является свойством одновременно квантовым и релятивистским. В 1928 г. П. Дирак показал, что спин и все его свойства автоматически вытекают из релятивистского волнового уравнения квантовой механики.

Согласно общим законам квантовой теории модуль *собственного момента импульса* электрона определяется как:

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad (51)$$

где $s = 1/2$ – спиновое квантовое число (скаляр). Таким образом, собственный механический момент электрона принимает только одно значение $L_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$.

Проекция спинового механического момента на выбранное направление z имеет вид:

$$L_{sz} = \hbar m_s, \quad (52)$$

где $m_s = \pm s = \pm 1/2$ (для электрона) – магнитное спиновое квантовое число.

Собственному механическому моменту электрона L_s соответствует *собственный магнитный момент* p_{ms} , направленный в противоположную сторону:

$$p_{ms} = -\frac{e}{m_e} L_s, \quad (53)$$

где $g = -\frac{e}{m_e}$ – гиромагнитное спиновое отношение. Подставляя (51) в (53), получаем:

$$p_{ms} = -\frac{e\hbar}{m_e} \sqrt{s(s+1)} = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)}, \quad (54)$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,92710^{-23} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}\right)$ – магнетон Бора.

Проекция собственного магнитного момента электрона на ось z :

$$p_{msz} = -\frac{e}{m_e} L_{sz} = -\frac{e\hbar}{m_e} m_s = -\frac{e\hbar}{m_e} \left(\pm \frac{1}{2}\right) = \mp \mu_B \quad (55)$$

Итак, состояние электрона в атоме с учетом спина определяется четырьмя квантовыми числами:

- главным n ($n = 1, 2, 3, \dots$),

- орбитальным l ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$),
- магнитным m ($m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$),
- магнитным спиновым m_s ($m_s = \pm 1/2$).

Классификация частиц по спину. Все микрочастицы по спину подразделяются на два класса:

- *фермионы* – частицы, имеющие полуцелый спин ($1/2, 3/2$ и т.п.), они подчиняются квантовомеханической статистике Ферми-Дирака, фермионы образуют вещество материи, яркими представителями фермионов являются: электрон, протон, нейтрон;

- *бозоны* – частицы с нулевым или целым спином (мезоны с нулевым спином, кванты полей со спином, равным единице), они подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, представителями бозонов являются: фотон, π -мезон.

Радиоактивность – это самопроизвольное превращение (распад) одних (нестабильных) атомных ядер в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц. Такие ядра и соответствующие им атомы называют *радионуклидами*. Необходимое условие радиоактивного распада – масса исходного ядра (материнского ядра) должна превышать сумму масс продуктов распада (дочерних ядер). Поэтому каждый распад происходит с выделением энергии в форме невидимого (ультракороткого) излучения.

К числу радиоактивных процессов относятся:

- α – *распад*, т.е. самопроизвольное испускание радионуклидом α -частицы (ядра атома гелия ${}^4_2\text{He}$); распад происходит по схеме ${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + {}^4_2\text{He}$; вылетающие с большими скоростями ($\sim 10^7$ м/с) α -частицы растрачивают свою энергию преимущественно на ионизацию атомов окружающей среды и поэтому обладают малой длиной пробега λ (в воздухе при нормальном давлении их $\lambda \sim 1 - 3$ см); современная квантовая

теория объясняет α -распад как туннельный эффект; спектр α -излучения носит линейчатый, сериальный характер.

- β – *распад*, т.е. самопроизвольный процесс превращения материнского ядра в дочернее ядро с тем же массовым числом A , но с зарядовым числом Z , отличающимся от исходного на ± 1 , и сопровождающимся испусканием β -частиц (электрон или позитрон) или возможным захватом электрона из собственной оболочки атома; соответственно различают: β^- – распад по схеме ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e + \tilde{\nu}$, β^+ – распад по схеме ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_{+1} e + \nu$, электронный захват по схеме ${}^A_Z X + {}^0_{-1} e \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu$; при β -распаде образуются также практически безмассовые нейтральные ультрарелятивистские частицы – нейтрино (или антинейтрино), в связи с этим спектр β -излучения достаточно широкий и непрерывный (сплошной); длина свободного пробега может достигать значений $\lambda \sim 1$ м;

- γ – *распад* заключается в испускании возбужденным ядром (при переходе его в основное состояние) γ -квантов, энергия которых варьируется в пределах от 10 кэВ до 5 МэВ; возбужденные ядра образуются при β -распаде в случае, если распад материнского ядра в основное состояние дочернего ядра запрещен; спектр испускаемых γ -квантов дискретный (линейчатый), так как дискретны энергетические уровни самих ядер; γ -излучение обладает большой проникающей способностью (от него можно защититься только свинцовыми экранами толщиной ~ 1 см);

- *спонтанное деление тяжелых ядер* – по своим характеристикам близко к вынужденному делению ядер под действием нейтронов;

- *протонная радиоактивность* – здесь ядро испытывает превращение, испуская один или два протона.

Основной закон радиоактивного распада и его характеристики.

Процесс распада радионуклидов носит стохастический, вероятностный, характер и подчиняется экспоненциальной зависимости от времени:

$$N = N_0 \cdot \exp(-\lambda t), \quad (56)$$

где N_0 – количество радионуклидов на начальный момент времени, N – количество нераспавшихся ядер на момент времени t , λ – постоянная распада (характеристика радионуклида).

Интенсивность радиоактивного распада характеризуют числом распадов в единицу времени, т.е. отношением:

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda \cdot N. \quad (57)$$

Эту величину принято обозначать как A и называть *активностью*; единицей измерения активности в СИ считается беккерель $1 \text{ (Бк)} = 1 \left(\frac{\text{распад}}{\text{с}} \right)$, также на практике используется кюри $1 \text{ (Ки)} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ (Бк)}$.

Определение. Период полураспада T – время, за которое распадается половина первоначального количества ядер; это время определяется из условия:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad (58)$$

4.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Радиоактивный распад»

Часто в задачах на радиоактивность требуется определить *среднее время жизни радионуклида* τ . Для этого надо воспользоваться правилами нахождения среднего: в данном случае следует усреднять по общему количеству ядер на начальный момент времени, т.е. по N_0 . Количество ядер $dN(t)$, испытавших распад за промежуток времени $[t, t + dt]$, определяется согласно закона (56) как $dN(t) = \lambda N(t) dt$. Время жизни каждого из этих ядер равно t . Следовательно, сумма времен жизни всех N_0 имевшихся изначально ядер определяется интегрированием по t : $\int_0^\infty t \cdot dN(t)$. Разделив эту сумму на число ядер N_0 , получаем:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot dN(t) = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot N(t) dt = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot N_0 \exp(-\lambda t) dt = \\ &= \int_0^\infty t \lambda \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Связь периода полураспада и среднего времени жизни радионуклида:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \ln 2 \cdot \tau.$$

Если в задачах на радиоактивность задан (предполагается известным из справочных данных) период полураспада радионуклида и – контрольный срок, то для дальнейших расчетов вероятности распада, доли распавшихся ядер и т.п. необходимо воспользоваться выражением основного закона радиоактивного распада в виде (56) и произвести соответствующие вычисления.

В задачах на расчет активности следует воспользоваться специальной формой закона распада через активность, т.е.

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t) = A_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right), \quad (59)$$

где A_0 – активность радиоактивного препарата на начальный момент времени.

При заданной массе препарата обычно предварительно следует рассчитать полное количество ядер на начальный момент времени по известному массовому числу для заданного радионуклида.

Если оговаривается конкретный вид радиоактивного распада, необходимо, прежде всего, записать соответствующую реакцию распада (см. параграф 4.1) и проанализировать выход возможных частиц.

4.3. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Радиоактивный распад»

Задача 1. При радиоактивном распаде ядер нуклида X_1 образуется радионуклид X_2 . Их постоянные распада равны λ_1 и λ_2 . Полагая, что в момент $t = 0$ препарат содержал только нуклид X_1 в количестве N_{10} , определить: а) количество ядер нуклида X_2 как функцию времени, т.е. $N_2(t)$; б) момент t_m , когда количество ядер нуклида X_2 достигает максимума.

Решение. 1) В данном случае изменения во времени количеств N_1 и N_2 ядер обоих радионуклидов будут описываться следующими уравнениями:

$$-\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2.$$

Первое из этих уравнений отвечает элементарному акту распада и легко может быть преобразовано к стандартному закону радиоактивного распада,

т.е. может быть записано как $N_1 = N_{10}e^{-\lambda_1 t}$. Второе же уравнение описывает приращение в единицу времени количества ядер радионуклида X_2 . Оно происходит за счет распада ядер X_1 в количестве $\lambda_1 N_1$ и убыли дочерних ядер из-за их распада ($-\lambda_2 N_2$).

Перепишем второе уравнение в виде:

$$\dot{N}_2 + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}.$$

Решение этого дифференциального неоднородного уравнения ищем как сумму решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$N_2(t) = C_1 e^{-\lambda_2 t} + C_2 e^{-\lambda_1 t}.$$

Из начального условия $N_2(0) = 0$ находим для констант интегрирования $0 = C_1 + C_2$, поэтому уравнение для $N_2(t)$ можно переписать в виде:

$$N_2(t) = C_1 (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}).$$

После подстановки этого решения в исходное дифференциальное уравнение определим константу $C_1 = N_{10} \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_2)$. Тогда $N_2(t)$ примет вид:

$$N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

А взяв производную dN_2/dt и приравняв ее нулю, получим искомое время:

$$t_m = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Задача 2. При определении периода полураспада короткоживущего радионуклида использован счетчик импульсов. За время $\Delta t = 1$ мин с начала наблюдения было насчитано $n_1 = 250$ импульсов, а в момент времени $t = 1$ час – $n_2 = 92$ импульса. Определить постоянную распада и период полураспада изотопа.

Решение. Число импульсов, регистрируемых счетчиком за время Δt , пропорционально числу распавшихся ядер ΔN . Таким образом, при первом измерении было насчитано

$$n_1 = k \Delta N_1 = k N_1 (1 - e^{-\lambda \Delta t}),$$

где N_1 – количество радионуклидов к моменту начала отсчета, k – коэффициент пропорциональности (постоянный для данного счетчика и данного расположения счетчика относительно препарата).

При повторном измерении (предполагается постоянное расположение счетчика) имеем:

$$n_2 = k\Delta N_2 = kN_2(1 - e^{-\lambda\Delta t}),$$

где N_2 – количество радионуклидов к моменту начала второго измерения.

Разделив соотношение для n_1 на соотношение для n_2 и приняв во внимание, что по условию задачи Δt одинаково в обоих случаях, а также, что N_1 и N_2 связаны между собой соотношением $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$, получим:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\lambda t},$$

где t – время, прошедшее от первого до второго измерения.

Для вычисления постоянной распада λ последнее отношение следует прологарифмировать, и тогда получим:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1} \ln \frac{250}{92} = 1 \text{ (час}^{-1}\text{)},$$

а период полураспада:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{1} = 0,693 \text{ (час)} = 41,5 \text{ (мин)}.$$

**Домашние задания по дисциплине «Физика и естествознание»
для студентов II курса IV семестра факультета ИБМ**

Варианты домашних заданий

Вариант	Номера задач			
	Модуль 5 ДЗ № 1		Модуль 6 ДЗ № 2	
1	1.1	2.1	3.1	4.1
2	1.2.1	2.2	3.2.1	4.2
3	1.2.2	2.3	3.2.2	4.3
4	1.2.3	2.4	3.2.3	4.4
5	1.3	2.5	3.2.4	4.5
6	1.4	2.6	3.3.1	4.6
7	1.5	2.7	3.3.2	4.7
8	1.6	2.8	3.3.3	4.8
9	1.7	2.9	3.3.4	4.9
10	1.8	2.10	3.4.1	4.10
11	1.9.1	2.11	3.4.2	4.11
12	1.9.2	2.12.1	3.4.3	4.12
13	1.9.3	2.12.2	3.4.4	4.13
14	1.9.4	2.12.3	3.5.1.	4.14
15	1.10	2.12.4	3.5.2	4.15
16	1.11	2.13.1	3.5.3	4.16
17	1.12.1	2.13.2	3.5.4	4.17
18	1.12.2	2.13.3	3.6	4.18
19	1.12.3	2.13.4	3.7	4.19
20	1.13	2.13.5	3.8	4.20

Модуль 5. Домашнее задание № 1

Задача 1. Тепловое излучение. Фотоэффект

- 1.1. При увеличении температуры абсолютно черного тела в $\eta = 2$ раза длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности этого тела, сокращается на $\Delta\lambda = 0,8$ мкм. Определите начальную температуру тела.
- 1.2. Определить, какую мощность необходимо подводить к медному шарикю диаметром d , чтобы при температуре окружающей среды $T_0 = 295$ К поддерживать его температуру равной T (см. табл. 1). Потери считать обусловленными только излучением. Поглощательная способность меди a_T .
- 1.3. Определить, во сколько раз необходимо уменьшить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость R_ν снизилась в n раз.
- 1.4. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии (окне) площадью 30 см^2 равна $1,3$ кК. Принимая отверстие за черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками печи, если последняя потребляет $1,5$ кВт.
- 1.5. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум испускательной способности сместился с $\lambda_1 = 2,4$ мкм до $\lambda_2 = 0,8$ мкм. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость R_ν этого тела?
- 1.6. Мощность (P) излучения шара радиусом $R = 10$ см при некоторой постоянной температуре (T) равна 1 кВт. Определить эту температуру, рассматривая шар как серое тело с поглощательной способностью $a_T = 0,25$.
- 1.7*. Полость объемом $V = 1,0$ л заполнена тепловым излучением при температуре $T = 1000$ К. Определить теплоемкость C_V этого излучения.
- 1.8. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн $\lambda_1 = 0,35$ мкм и $\lambda_2 = 0,54$ мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в $\eta = 2$ раза. Определить работу выхода с поверхности этого металла.

1.9. Определить красную границу фотоэффекта для указанного металла и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с его поверхности излучением с длиной волны $\lambda = 250$ нм (см. табл. 2)

1.10. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектронов, если красная граница фотоэффекта составляет $\lambda_0 = 307$ нм и максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона равна 1 эВ?

1.11. Максимальная скорость фотоэлектронов при освещении цезиевого электрода монохроматическим светом оказалась равной $v_{\max} = 0,55$ Мм/с. Работа выхода для цезия $A_{\epsilon} = 1,89$ эВ. Определить длину волны света, падающего на электрод.

1.12. Определить энергию падающих фотонов и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности указанного металла, если фототок прекращается при приложении задерживающего напряжения U_0 (см. табл. 3).

1.13. Плоский серебряный электрод освещается монохроматическим излучением с длиной волны $\lambda = 80$ нм. Определите, на какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E = 10$ В/см. Красная граница фотоэффекта для серебра $\lambda_0 = 264$ нм.

Таблица 1.

Таблица 2.

Таблица 3.

Зад.	d , см	T , К	a_T	Зад.	Металл	A , эВ	Зад.	Металл	A , эВ	U_0 , В
1.2.1	1,5	473	0,6	1.9.1	Цинк	3,74	1.12.1	Барий	2,29	7,1
1.2.2	2,0	523	0,5	1.9.2	Железо	4,36	1.12.2	Титан	3,92	6,4
1.2.3	2,5	573	0,4	1.9.3	Медь	4,47	1.12.3	Золото	4,58	5,0
				1.9.4	Никель	4,84				

Задача 2. Основы квантовой механики

- 2.1. Электрон с кинетической энергией $E_K = 4$ эВ локализован в области размером $l = 1$ мкм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.
- 2.2. Поток нейтронов проходит через узкие радиальные щели в двух дисках из кадмия, поглощающего нейтроны. Диски насажены на общую ось так, что щели повернуты друг относительно друга на угол α . Диски вращаются с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с, расстояние между ними $L = 1$ м. Найти угол α , если длина волны де Бройля пропускаемых таким устройством нейтронов равна $\lambda = 0,1$ нм.
- 2.3. Вычислить длину волны де Бройля теплового нейтрона, т.е. нейтрона, находящегося в тепловом равновесии с окружающей средой, имеющей комнатную температуру $T = 295$ К.
- 2.4. Найти дебройлевскую длину волны молекул водорода, соответствующую их средней квадратичной скорости при температуре $T = 293$ К.
- 2.5. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля для него была равна λ .
- 2.6. Электрон движется по окружности радиуса $r = 0,5$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Определить длину волны де Бройля этого электрона.
- 2.7. Параллельный пучок электронов, движущихся со скоростью $v = 1$ Мм/с, падает нормально на диафрагму с длинной щелью шириной $b = 1$ мкм. Пройдя щель, электроны рассеиваются и образуют дифракционную картину на экране, удаленном от плоскости щели на расстоянии $l = 0,5$ м. Определить ширину x центрального максимума интенсивности.
- 2.8. Определить длину волны де Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на боровской орбите с номером n .
- 2.9. Используя соотношение неопределенностей, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \sim 0,1$ нм.

2.10. Приняв, что минимальная энергия нуклона в составе ядра атома равна $E = 10$ МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

2.11. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau \approx 10^{-8}$ с и длина волны излучаемого фотона $\lambda = 0,55$ мкм.

2.12. Микрочастица массой m находится в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной l ($0 < x < l$) в указанном состоянии n . Определить энергию частицы E_n на соответствующем энергетическом уровне и вероятность W ее нахождения в указанном участке ямы $x_1 < x < x_2$ (см. табл. 4). Решение пояснить графически.

2.13. Электрон проходит через высокий прямоугольный потенциальный барьер шириной $d = 0,5$ нм. Высота U барьера больше энергии E электрона на 2 %. Вычислить коэффициент прозрачности D , если энергия электрона принимает указанные значения (см. табл. 5).

Таблица 4.

Зад.	n	$x_1 < x < x_2$
2.12.1	1	$\frac{1}{3}l < x < \frac{2}{3}l$
2.12.2	2	$\frac{1}{4}l < x < \frac{3}{4}l$
2.12.3	3	$\frac{1}{3}l < x < \frac{2}{3}l$
2.12.4	4	$\frac{1}{4}l < x < \frac{1}{2}l$

Таблица 5. Таблица 5.(продолжение)

Зад.	E , эВ
2.13.5	150

Модуль 6. Домашнее задание № 2

Задача 3. Электронный газ в металле. Эффект Холла

3.1. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К. Энергию Ферми E_F принять равной 2 эВ.

3.2. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом металла при температуре $T = 0$ К. Уровень Ферми E_F и плотность ρ металла указаны в табл. 6.

3.3. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ электронов в металле при температуре $T = 0$ К, если задан уровень Ферми (см. табл. 7).

3.4. Оценить температуру вырождения $T_{кр}$ для заданного металла, если принять, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность ρ металла указана в табл. 8.

3.5. Определить максимальную v_{max} и среднюю $\langle v \rangle$ скорости электронов в металле при $T = 0$ К, если задан уровень Ферми (см. табл. 9).

3.6. Собственный полупроводник (кремний) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,96$ Ом·м. Определить концентрацию n носителей заряда, если подвижности b_n и b_p электронов и дырок соответственно равны 0,18 и 0,08 м²/(В·с).

3.7. Полупроводник в виде пластины шириной $l = 1$ см и длиной $L = 10$ см помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению L) приложено постоянное напряжение $U = 300$ В. Определить холловскую разность потенциалов U_H на гранях пластины, если постоянная Холла $R_H = 0,1$ м³/Кл, удельное сопротивление материала пластины $\rho = 0,5$ Ом·м.

3.8. Определить постоянную Холла для натрия, если для него отношение концентрации электронов проводимости к концентрации атомов составляет 0,984. Плотность натрия $\rho = 0,97$ г/см³.

Таблица 6.

Таблица 7.

Зад.	Металл	ρ ,	E_F , эВ		Зад.	Металл	E_F ,
3.2.1	Калий	860	1,9		3.3.1	Калий	1,9
3.2.2	Натрий	970	3,1		3.3.2	Натрий	3,1
3.2.3	Алюминий	2700	11,7		3.3.3	Медь	7,0
3.2.4	Медь	8930	7,0		3.3.4	Алюминий	11,7

Таблица 8.

Зад.	Металл	ρ ,
3.4.1	Железо	7870
3.4.2	Никель	8800
3.4.3	Серебро	10500
3.4.4	Вольфрам	19300

Таблица 9.

Зад.	Металл	E_F , эВ
3.5.1	Литий	4,7
3.5.2	Натрий	3,1
3.5.3	Медь	7,0
3.5.4	Алюминий	11,7

Задача 4. Радиоактивный распад

4.1. Какова вероятность того, что данный атом в изотопе радиоактивного йода I^{131} распадается в течение ближайшей секунды?

4.2. Какая часть начального количества атомов распадается за один год в радиоактивном изотопе тория Th^{229} ?

4.3. Какая доля радиоактивных ядер кобальта Co^{60} распадается за месяц?

4.4. Сколько β -частиц испускает за один час 1,0 мкг Na^{24} , период полураспада которого 15 ч?

4.5. При изучении β -распада Mg^{23} в момент $t = 0$ был включен счетчик. К моменту $t_1 = 2,0$ с он зарегистрировал N_1 β -частиц, а к моменту $t_2 = 3 t_1$ – в 2,66 раза больше. Найти среднее время жизни данных ядер.

4.6. За какое время t распадается $\frac{1}{4}$ начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T_{1/2} = 24$ ч?

4.7. За время $t = 8$ сут распалось $\eta = \frac{3}{4}$ начального количества ядер радиоактивного изотопа. Определить период полураспада.

4.8. Активность некоторого радионуклида уменьшилась в 2,5 раза за 7 сут. Найти его период полураспада.

4.9. В начальный момент активность некоторого радиоизотопа составляла $1,2 \cdot 10^6$ Бк. Какова будет его активность по истечении половины периода полураспада?

4.10. Найти постоянную распада и среднее время жизни радиоактивного Co^{55} , если его активность уменьшается на 4,0 % за 1 ч.

- 4.11. Препарат U^{238} массы 1,0 г излучает $1,24 \cdot 10^4$ альфа-частиц в секунду. Найти его период полураспада.
- 4.12. В урановой руде отношение числа ядер U^{238} к числу ядер Pb^{206} составляет $\eta = 2,8$. Оценить возраст руды, считая, что весь свинец Pb^{206} является конечным продуктом распада уранового ряда. Период полураспада U^{238} равен $4,5 \cdot 10^9$ лет.
- 4.13. Удельная активность препарата, состоящего из активного кобальта Co^{58} и неактивного Co^{59} , составляет $2,2 \cdot 10^{12}$ Бк/г. Период полураспада Co^{58} равен 71,3 сут. Найти отношение массы активного кобальта в этом препарате к массе препарата.
- 4.14. Периоды полураспада ядер U^{238} и U^{235} равны $T_1 = 4,5 \cdot 10^9$ лет и $T_2 = 7,1 \cdot 10^8$ лет соответственно. В настоящее время в природном уране относительные распространенности этих изотопов составляют $C_1 = 99,27 \%$ и $C_2 = 0,72 \%$. Считая, что в момент образования Земли имелись равные количества этих изотопов, оцените возраст Земли.
- 4.15. Масс-спектрометрический анализ образцов лунной породы показал, что отношение количества атомов Ar^{40} и K^{40} в ней составляет $\eta = 10,3$. Считая, что аргон целиком образовался из калия в результате радиоактивного распада, определите возраст лунной породы. Период полураспада изотопа K^{40} составляет $T = 1,25 \cdot 10^9$ лет.
- 4.16. Определить число радиоактивных ядер в свежеприготовленном препарате Vr^{82} , если известно, что через сутки его активность стала равной $7,4 \cdot 10^9$ Бк.
- 4.17. Вычислить постоянную распада, среднее время жизни и период полураспада радионуклида, активность которого уменьшается в 1,07 раза за 100 сут.
- 4.18. Свежеприготовленный препарат содержит 1,4 мкг радиоактивного Na^{24} . Какую активность он будет иметь через сутки?
- 4.19. Ra^{226} , являясь продуктом распада U^{238} , содержится в последнем в количестве одного атома на каждые $2,8 \cdot 10^6$ атомов урана. Найти период

полураспада U^{238} , если известно, что он значительно больше периода полураспада Ra^{226} , который равен 1620 лет.

4.20. Определить возраст древних деревянных предметов, у которых удельная активность C^{14} составляет $3/5$ удельной активности этого же радионуклида в только что срубленных деревьях.

Список рекомендуемой литературы

1. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Квантовая физика: Учебное пособие. 2-ое изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 528 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн. 5: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: ООО «Изд-во Астрель», ООО «Изд-во АСТ», 2001. – 368 с.
3. Винтайкин Б.Е. Физика твердого тела: Учебное пособие. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 360 с.
4. Иродов И.Е. Квантовая физика. Основные законы: Учебное пособие для вузов – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 272 с.
5. Докукин М.Ю. Концепции современного естествознания: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 147 с.
6. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: БИНОМ, 1998. – 448 с.
7. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 640 с.
8. Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спиринов Г.Г. КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ: Учебник для бакалавров. В 3 кн.: Кн. 2 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ, ОПТИКА, КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.– М.: Изд-во ЮРАЙТ, 2015. – 441 с.
9. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. «Квантовая природа излучения. Гипотеза Планка». – М.: МГТУ, 2001.
10. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. «Волновые свойства частиц. Гипотеза де Бройля». – М.: МГТУ, 2002.

11. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. «Уравнение Шредингера. Стационарные задачи квантовой механики». – М.: МГТУ, 2002.
12. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. «Квантовые свойства атомов». – М.: МГТУ, 2003.
13. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. «Физика атомного ядра и элементарных частиц». – М.: МГТУ, 2006.