УДК 537.61
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-57-71

ТЕРМОДИНАМИКА СИСТЕМЫ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Алиев И.Н., Докукин М.Ю., Самедова З.А.
Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана,
105005, г. Москва, 2-я Бауманская, д. 5, Российская Федерация

Аннотация. В работе в рамках большого канонического распределения с помощью потенциалов Гиббса проводится детальный анализ термодинамических характеристик ансамбля невзаимодействующих свободных электронов с последующей целью развития модернизированной классической теории сверхпроводимости.

Ключевые слова: свободные электроны, термодинамические потенциалы Гиббса, теплоёмкость

THERMODYNAMICS OF THE SYSTEM OF NONINTERACTING FREE ELECTRONS

I. Aliev, M. Dokukin, Z. Samedova
Bauman Moscow State Technical University,
105005 Moscow, 2nd Baumanskaya st., 5, Russian Federation

Abstract. Within the limits of the large canonical distribution by means of Gibbs potentials, a detailed analysis is performed of the thermodynamic characteristics of an ensemble of noninteracting free electrons with the subsequent purpose of the development of the modernised classical theory of superconductivity.

Keywords: free electrons, thermodynamic Gibbs potentials, heat capacity.

Введение

В последнее время вновь усилился интерес к классической теории сверхпроводимости, в частности к вопросам, связанным с двухфазной термодинамической моделью Гортера–Казимира, описывающей

© Алиев И.Н., Докукин М.Ю., Самедова З.А., 2016

сверхпроводник как смесь двух электронных жидкостей, каждая из которых по-разному ведет себя во внешнем магнитном поле, то есть, фактически, речь идет о двухфазной системе [1]. Различные подходы при анализе этой проблемы разбирались в работах последних лет [2-4]. Исследования в этой области были инициированы тем обстоятельством, что был получен с помощью термодинамического условия равновесия Гиббса несколько неожиданный результат - а именно, что в случае достаточно хорошо проводящего тела (не обязательно сверхпроводника) постоянный электрический ток, а вместе с ним и магнитное поле вытесняются на поверхность [5]. В связи с этим возникает необходимость по-новому взглянуть на базовые работы по сверхпроводимости [6-7]. Дело в том, что прямого измерения объёмного тока в сплошном твёрдом проводнике не существует и, скорее всего, это измерение принципиально не может быть проведено. В самом деле, начиная с классических экспериментов Мейсснера-Оксенфельда [8], измерялись лишь магнитные поля вокруг проводников, т.е. интегральные характеристики. Так, например, в опубликованной недавно работе [9] измерялось, как обычно, магнитное поле, а затем в рамках так называемой обратной задачи Био-Савара-Лапласа делался вывод о распределении токов. На наш взгляд, это не совсем корректно: по значению определённого интеграла, как правило, нельзя делать вывод о виде подынтегральной функции.

Напомним, что Лондоны исходили из простой идеи, казавшейся после открытия эффекта Мейсснера очень естественной: в теории сверхпроводимости в первую очередь надо учитывать свойство сверхпроводников выталкивать постоянные магнитные поля (то есть свойство идеального диамагнетика), а уж затем объяснять свойство нулевого электросопротивления, или обращения в бесконечность электропроводности. Однако, в недавней работе авторов [5] с помощью магнитного принципа виртуальных работ и, используя термодинамическую гипотезу Гиббса, вычислялось равновесное распределение поверхностных и объёмных стационарных токов и было показано, что постоянные токи действительно выдавливаются на поверхность. Но постоянство токов возможно в двух случаях: либо требуется наличие регулируемых источников тока, что весьма трудно учесть, либо мало электрическое сопротивление тела.

В связи с вышесказанным возникла необходимость детального анализа квантово-механического поведения ансамбля электронов в широком диапазоне температур, в частности, анализ термодинамических характеристик. В недавней работе [10] представлен анализ равновесного состояния двухфазной термодинамически равновесной системы, в настоящей же работе предпринята попытка детального анализа указанных свойств на основе квантово-механического описания на базе операторов вторичного квантования, как это было сделано для электрических свойств твердого тела при низких температурах.

В связи с этим появилась также необходимость рассмотрения классической термодинамической двух жидкостной теории Гортера–Казимира [11–12]. Детальный анализ этой работы представлен авторами в недавних публикациях [1; 5]. В настоящей работе предпринята попытка дополнения этих исследований выводом из условия термодинамического равновесия выражений для термодинамических потенциалов, энтропии и теплоёмкости в широком диапазоне температур. Полученный результат имеет смысл применить для дальнейших попыток развития модернизированной классической теории сверхпроводимости, основы которой изложены в работах [13–14].

В целях полноты изложения остановимся вначале на общих вопросах термодинамики намагничивающегося вещества. Для железосодержащих материалов этот вопрос довольно подробно разбирался в работе [15], причём предложен перенос этого метода на магнитные элементы (Ni, Co) и композитные материалы (Fe_3C).

В любом случае вопрос о первопричине сверхпроводимости и связанными с ней эффектами остаётся открытым, поэтому столь важны, на наш взгляд, разнообразные попытки анализа смежных вопросов.

Система невзаимодействующих электронов

Поместим систему, состоящую из N невзаимодействующих электронов в среду с заданной абсолютной температурой T и заданным химическим потенциалом μ. Система может, таким образом, обмениваться со средой энергией и самими электронами, так что теперь число электронов в системе неопределённое, и можно говорить только о среднем их числе, также не определена точно энергия системы. Температуру будем выражать в энергетических единицах и использовать так называемую «энергетическую» температуру $\theta = kT$, где k – постоянная Больцмана.

Хотя теперь число электронов в системе не фиксировано, объём V, занимаемый системой невзаимодействующих свободных электронов, остаётся строго определённым и неизменным.

Термодинамический потенциал Ω (свободная энергия Гиббса, потенциал Гиббса) системы, соответствующий взятому её окружению, зависит от θ, V, μ и связан с обычной свободной энергией Гельмгольца F системы соотношением (при пренебрежении флуктуациями числа N) [16]:

$$\Omega = F - \mu N, \text{ где } N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{\theta,V}. \tag{1}$$

Зная свободную энергию, можно вычислить энтропию и теплоёмкость по формулам:

$$S = -k\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{V,N} = -k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\right)_{V,\mu}$$

$$C_V = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{V,N} \tag{2}$$

Термодинамический потенциал Ω рассчитывается по формуле [17]:

$$\Omega(\theta, V, \mu) = -\theta \ln\left(Sp\left[e^{-\beta(\widehat{H_0} - \mu N)}\right]\right), \tag{3}$$

в которой $\beta = \frac{1}{\theta}$ - обратная температура. Под знаком логарифма стоит статистическая сумма, которая представляет собой след (шпур) оператора $\exp(-\beta\widehat{H})$ ($\widehat{H}$ - гамильтониан системы). Шпур берётся по всему пространству, в котором действуют электронные операторы рождения и уничтожения, то есть по всему квантово-механическому пространству, содержащему состояния всех многоэлектронных систем невзаимодействующих электронов (содержащих произвольное число электронов N=0,1,2 и т.д.).

Собственные состояния невозмущенного гамильтониана $\widehat{H_0}$ в данном N-электронном подпространстве характеризуются совокупностями $\{\dots n_{\vec{p},s} \dots\}$ чисел заполнения $n_{\vec{p},s}$, рассматриваемых для различных состояний $\vec{p}, s$ ($\vec{p}$ – импульс электрона), каждое из которых может быть равным либо 0, либо 1, причём в нужном нам N-электронном подпространстве надо рассматривать только такие совокупности чисел заполнения, для которых

$$\sum_{\vec{p},s} n_{\vec{p},s} = N, \tag{4}$$

где суммирование ведётся по $\vec{p}, s$, то есть по всем возможным одноэлектронным состояниям.

Напомним, что каждый электрон обладает спином, равным $s = \frac{1}{2}$, проекция которого σ, например, на ось z в пространстве декартовой системы может принимать только два значения: $\sigma = \pm\frac{1}{2}$.

Для свободных электронов в объёме $V = L^3$ одноэлектронные волновые функции запишутся в стандартном виде:

$$\Psi_{\vec{p},s}(\vec{r},\sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p},\vec{r})} \delta_{s,\sigma} \ ,$$

причём они образуют полный квантово-механический набор ортонормированных одноэлектронных функций:

$$\sum_{\sigma} \int_V \Psi^*_{\vec{p}',s'}(\vec{r},\sigma) \Psi_{\vec{p},s}(\vec{r},\sigma) dV = \delta_{\vec{p}',\vec{p}} \delta_{s',s} \ ,$$

где $dV = dxdydz = d^3r = d\vec{r}$,а $\delta_{\vec{p}',\vec{p}}$ и $\delta_{s',s,}$ – импульсный и спиновый символы Кронекера ($\delta_{\vec{p}',\vec{p}} = 1$ при $\vec{p}' = \vec{p}$ и $\delta_{\vec{p}',\vec{p}} = 0$ при $\vec{p}' \neq \vec{p}$).

Для собственных значений энергии имеем следующие выражения:

$$E_{\dots n_{\vec{p},s} \dots} = \sum_{\vec{p},s} E(\vec{p})\, n_{\vec{p},s} \qquad (5)$$

Здесь $E(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m}$ кинетическая энергия электрона.

Вычислим статистическую сумму - выражение, стоящее в правой части формулы (3), с использованием нумерации многоэлектронных состояний совокупностями чисел заполнения, причём суммирование будем производить как по всем квантовым состояниям, так и по всем значениям чисел заполнения. Для гамильтониана $\widehat{H_0}$ собственные значения энергии записываем с учётом (4), а величину N, соответственно, через (5), используя формализм чисел заполнения $n_{\vec{p},s}$. В результате несложных вычислений получим:

$$Sp\left[e^{-\beta(\widehat{H_0}-\mu N)}\right] = \sum_{\{\dots n_{\vec{p},s} \dots\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p},s}(E(p)-\mu) n_{\vec{p},s}} =$$

$$= \prod_{\vec{p},s} \sum_{n_{\vec{p},s}} e^{-\beta(E(p)-\mu) n_{\vec{p},s}} = \prod_{\vec{p},s} \left(1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}\right).$$

Таким образом, для термодинамического потенциала $\Omega(\theta, V, \mu)$ системы невзаимодействующих электронов имеем выражение:

$$\Omega(\theta, V, \mu) = -\theta \sum_{\vec{p},s} ln\left(1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}\right) = -2\theta \sum_{\vec{p}} (1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}).$$

Переходя к пределу бесконечно большой системы $N \to \infty, V \to \infty$ при $\frac{N}{V} = n = const$, запишем выражение для объёмной плотности термодинамического потенциала:

$$\frac{\Omega}{V} = -\frac{\theta}{\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty p^2 dp ln(1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}) \quad (6)$$

Вычислим среднее число N электронов в системе. С учётом (1) получаем:

$$N = 2\sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu)} + 1}.$$

Вновь переходя к пределу бесконечно большой системы $N \to \infty, V \to \infty$ при $\frac{N}{V} = n = const$, получаем соотношение, связывающее μ и n:

$$n = \frac{1}{\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty p^2 dp \ \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu)}+1}. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой трансцендентное уравнение, с помощью которого можно отыскать функцию $\mu = \mu(\theta, n)$, то есть зависимость химического потенциала от объёмной плотности электронов и от температуры.

Исследуем это уравнение. Рассмотрим отдельно случаи низких и высоких температур. Как известно, при нулевой температуре химический потенциал принимает некоторое значение $\mu = \mu_0$, называемое уровнем Ферми E_F при нулевой температуре. Тогда:

$$\frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu)}} = \begin{cases} 0 \text{ при } E(p) > \mu_0 \\ 1 \text{ при } E(p) < \mu_0 \end{cases}.$$

Соотношение (7) принимает вид:

$$n = \frac{1}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^2} = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}(2m\mu_0)^{3/2},$$

где фермиевый импульс p_F связан с уровнем Ферми μ_0 условием:

$$E_F = E(p_F) = \frac{p_F^2}{2m} = \mu_0 = \mu = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} \quad (8)$$

При низких температурах можно считать, что $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$, где $\Delta\mu \ll \mu_0$ – малая добавка. Тогда подынтегральную функцию трансцендентного уравнения (5) разложим в ряд Тейлора по малому параметру:

$$n = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} I_1 + \beta\Delta\mu \frac{1}{\pi^2\hbar^3} I_2, \quad (9)$$

где $I_1 = \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1}$ и $I_2 = \int_0^\infty p^2 dp \frac{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}}{(e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1)^2}$.

Далее разложим полученные интегралы по малому параметру $\theta = \frac{1}{\beta}$. Для этого первый интеграл представим в более удобном виде, выделив из него главную часть:

$$I_1 = \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1} = \int_0^{p_F} p^2 dp + \int_0^{p_F} p^2 dp \left[\frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1} - 1\right] + \\ + \int_{p_F}^{\infty} p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1}.$$

При низких температурах основные вклады во второй и третий интегралы в правой части даёт только окрестность точки $p = p_F$. Поэтому в подынтегральных выражениях рассматриваемых интегралов удобно сделать растягивающую эту окрестность замену переменной интегрирования $p = p_F + \frac{m\theta}{p_F}x$. Коэффициент при x в этой замене подобран с таким расчётом, чтобы получить соотношение: $\beta[E(p)-\mu_0] = x + \frac{m\theta}{2p_F^2}x^2$, удобное для работы при низких температурах. После указанной замены разложим новые получившиеся подынтегральные выражения по малому θ и оставим только главные члены этих разложений. Так мы получим приближённую формулу, справедливую при низких температурах:

$$I_1 = \tfrac{1}{3}p_F^3 + A + B, \tag{10}$$

где

$$A = \int_0^{p_F} p^2\, dp \left[\frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1} - 1\right] = \\ = \int_{\frac{-p_F^2}{m\theta}}^{0} \left(p_F + \frac{m\theta}{p_F}x\right)^2 \frac{m\theta}{p_F} dx \left[\frac{1}{e^{x+\frac{m\theta}{2p_F^2}x^2}+1} - 1\right] = \\ = \int_{-\infty}^{0} p_F m\theta dx \left[\frac{1}{e^{x+\frac{m\theta}{2p_F^2}x^2}+1} - 1\right] + \int_{-\infty}^{0} 2\frac{m^2\theta^2}{p_F} dx \left[\frac{1}{e^{x+\frac{m\theta}{2p_F^2}x^2}+1} - 1\right] + \theta^3(\ldots) \\ == p_F m\theta \int_{-\infty}^{0} dx \left[\frac{1}{e^x+1} - 1\right] - \frac{m^2\theta^2}{2p_F}\int_{-\infty}^{0} dx \frac{x^2 e^x}{(e^x+1)^2} + \\ + 2\frac{m^2\theta^2}{p_F}\int_{-\infty}^{0} x dx \left[\frac{1}{e^x+1} - 1\right] + \theta^3(\ldots),$$

$$B = \int_{p_F}^{\infty} p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1} = \int_0^{\infty} \left(p_F + \frac{m\theta}{p_F}x\right)^2 \frac{m\theta}{p_F} dx \left[\frac{1}{e^{x+\frac{m\theta}{2p_F^2}x^2}+1} - 1\right] \\ = p_F m\theta \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} + \frac{2m^2\theta^2}{p_F}\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x+1} + \theta^3(\ldots).$$

При вычислении слагаемого A нижний предел интегрирования был заменен с $-\frac{p_F^2}{m\theta}$ на $-\infty$ в рамках разложения по параметру малости $\theta \to 0$. Отдельно выписаны не интересующие нас слагаемые более высокой степени (начиная с третьей) по θ.

При сложении выражений A и B первые интегралы взаимно уничтожаются:
$\int_{-\infty}^{0} dx \left[\frac{1}{e^x+1} - 1\right]$ =(замена x на-x)$= -\int_{\infty}^{0} dx \left[\frac{1}{e^{-x}+1} - 1\right] = -\int_{0}^{\infty} dx \frac{1}{e^x+1}$.

Тогда с учётом (8) получаем:

$$I_1 = \frac{1}{3}p_F^3 - \frac{m^2\theta^2}{2p_F}\int_{-\infty}^{0} dx \frac{x^2 e^x}{(e^x+1)^2} +$$
$$+2\frac{m^2\theta^2}{p_F}\int_{-\infty}^{0} x dx \left[\frac{1}{e^x+1} - 1\right] + \frac{2m^2\theta^2}{p_F}\int_{0}^{\infty}\frac{x dx}{e^x+1} + \theta^3(\dots)$$

При вычислении выражения I_2 воспользуемся теми же соображениями, что и в предыдущем случае. Как следует из выражения (7), во втором слагаемом уже есть в качестве множителя малая величина $\Delta\mu$. Поэтому в рамках принятого нами приближения будут опущены слагаемые, пропорциональные старшим степеням θ:

$$I_2 = \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}}{(e^{\beta(E(p)-\mu_0)}+1)^2} + \int_{-\frac{p_F^2}{m\theta}}^{\infty} \left(p_F + \frac{m\theta}{p_F}x\right)^2 \frac{m\theta}{p_F} dx \frac{e^x}{(e^x+1)^2} =$$
$$= p_F m\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx + \frac{m^2\theta^2}{p_F}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x e^x}{(e^x+1)^2} dx + \theta^3(\dots)$$

Далее: $\beta\Delta\mu \frac{1}{\pi^2\hbar^3} I_2 = \frac{\Delta\mu}{\pi^2\hbar^3}\left[p_F m \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx + \theta(\dots) + \theta^2(\dots)\right]$.

Все полученные соотношения подставим в (9):

$$n = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}p_F^3 - \frac{m^2\theta^2}{2p_F\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{0} dx \frac{x^2 e^x}{(e^x+1)^2} +$$
$$+2\frac{m^2\theta^2}{p_F\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{0} x dx \left[\frac{1}{e^x+1} - 1\right] + \frac{2m^2\theta^2}{p_F\pi^2\hbar^3}\int_{0}^{\infty}\frac{x dx}{e^x+1} + \frac{\Delta\mu m p_F}{\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx. \quad (11)$$

Вычислим стандартным образом определённые интегралы из (11):

$$\int_0^{\infty}\frac{x dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}; \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x dx}{(e^x+1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{t dt}{(t+1)^2} = 1;$$
$$\int_{-\infty}^{0} x dx \left[\frac{1}{e^x+1} - 1\right] = \int_{-\infty}^{0} x dx \frac{1}{e^{-x}+1} = (x \to -x) = \frac{\pi^2}{12};$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 e^x dx}{(e^x+1)^2} = (x \to -x) = \int_{0}^{\infty} \frac{x^2 e^x dx}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x dx}{(e^x+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Подставляя приведенные значения несобственных интегралов в трансцендентное уравнение (11), приходим к следующей приближённой формуле:

$$n = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3 + \frac{m^2\theta^2}{6p_F\hbar^3} + \frac{p_F \Delta\mu m}{\pi^2\hbar^3}.$$

Далее с учётом (8) окончательно получаем первую неисчезающую поправку к химическому потенциалу, которая оказалась отрицательной и пропорциональной квадрату температуры:

$$\mu - \mu_0 = \Delta\mu = -\frac{\pi^2\theta^2}{12\mu} + \theta^3(\dots). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь уравнение (9) для случая высоких температур. При больших θ оно принимает простой вид:

$$n = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{e^{-\beta(E(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(E(p)-\mu)}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp e^{-\beta(E(p)-\mu)}$$

$$= \frac{e^{\mu/\theta}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp e^{-\frac{E(p)}{\theta}}$$

$$= \frac{e^{\mu/\theta}}{2\pi^2\hbar^3} (2m\theta)^{3/2} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{e^{\frac{\mu}{\theta}}}{8} \left(\frac{2m\theta}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{13}$$

Таким образом, при высоких температурах μ выражается простой формулой:

$$\mu \cong \theta ln \left[8n \left(\frac{\pi\hbar^2}{2m\theta}\right)^{3/2} \right]. \tag{14}$$

На рис. 1 приведена зависимость химического потенциала μ от температуры при фиксированной плотности числа электронов n.

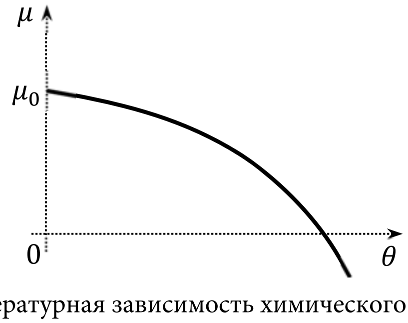

Рис. 1. Температурная зависимость химического потенциала.

Видно, что химический потенциал плавно убывает от значения μ_0 при нулевой температуре до бесконечно больших отрицательных значений при высоких температурах.

Получим теперь приближённые формулы для термодинамического потенциала Ω, а, следовательно, для свободной энергии Гельмгольца F, энтропии S и теплоёмкости при постоянном объёме C_V.

В случаях низких температур удобно выделить из исходного выражения (6) для объёмной плотности термодинамического потенциала его значение при $\theta = 0$ и записать полученное соотношение в виде:

$$\frac{\Omega}{V} = -\frac{\theta}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty} p^2 dp ln\left(1+e^{-\beta(E(p)-\mu)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F} p^2 dp (E(p)-\mu)$$

$$-\frac{\theta}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F} p^2 dp \left\{ln\left(1+e^{-\beta(E(p)-\mu)}\right)+\beta(E(p)-\mu)\right\}$$

$$-\frac{\theta}{\pi^2\hbar^3}\int_{p_F}^{\infty} p^2 dp ln\left(1+e^{-\beta(E(p)-\mu)}\right).$$

Во втором и третьем интегралах, которые являются поправками к первому, основной вклад снова дают только области, расположенные в непосредственной окрестности точки $p = p_F + \frac{m\theta}{p_F}x$. В результате получаем для термодинамического потенциала в расчёте на один электрон следующую приближённую формулу:

$$\frac{\Omega}{N} = \frac{\Omega}{V}n = -\frac{2\mu_0}{5} + \frac{\pi^2}{12}\frac{\theta^2}{\mu_0} - \frac{3\theta^2}{2\mu_0}\int_{-\infty}^{0} dx[ln(1+e^{-x})+x] - \frac{3\theta^2}{2\mu_0}\int_{-\infty}^{0} dx\, ln(1+$$
$$+e^{-x}) + \theta^3(\dots) = -\frac{2\mu_0}{5} - \frac{\pi^2}{6}\frac{\theta^2}{\mu_0} + \theta^3(\dots). \quad (15)$$

Свободная энергия Гельмгольца, энтропия и теплоёмкость в расчёте на один электрон выводятся достаточно просто с учётом (2), (12), (15):

$$\frac{F}{N} = \frac{\Omega+\mu N}{N} = \frac{\Omega}{N} + \mu = -\frac{2\mu_0}{5} - \frac{\pi^2\theta^2}{6\mu_0} + (\mu_0+\Delta\mu) = \frac{3\mu_0}{5} - \frac{\pi^2\theta^2}{4\mu_0} + \theta^3(\dots)$$

$$\frac{S}{N} = \frac{C_V}{N} = k\frac{\pi^2\theta}{\mu_0} + \theta^3(\dots) \quad (16)$$

Видно, что энтропия S и теплоёмкость C_V системы свободных электронов (отнесенные к одному электрону) в нормальном металле при температуре, стремящейся к нулю, обращается в нуль по линейному закону. В случаях высоких температур выражение для термодинамического потенциала (6) можно приближённо представить в виде:

$$\frac{\Omega}{V} = -\frac{\theta e^{\mu/\vartheta}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp\, e^{-\beta E(p)},$$

с учетом (13), выражение для термодинамического потенциала в расчёте на один электрон при высоких температурах приобретает вид:

$$\frac{\Omega}{N} \cong -2\theta. \tag{17}$$

Для свободной энергии Гельмгольца, энтропии и теплоёмкости в расчёте на один электрон при высоких температурах с учётом (14) и (16) получаем следующие приближённые формулы:

$$\frac{F}{N} \cong -2\theta + \theta ln\left[8n\left(\frac{\pi\hbar^2}{2m\theta}\right)^{3/2}\right];\ \frac{S}{N} \cong \frac{5}{2}k - kln\left[8n\left(\frac{\pi\hbar^2}{2m\theta}\right)^{3/2}\right];\ \frac{C_V}{N} \cong \frac{3}{2}k \tag{18}$$

На рис. 2 схематически приведена полученная зависимость теплоёмкости от температуры.

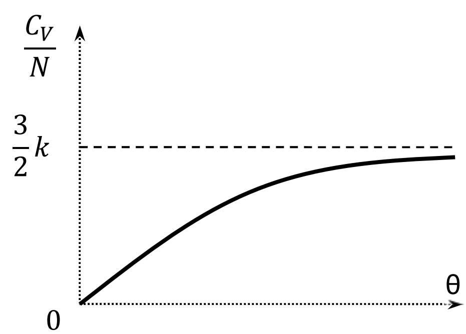

Рис. 2. Температурная зависимость теплоёмкости, приходящейся на один электрон.

При нулевой температуре она равна нулю, далее идет линейное возрастание (16), а затем при высоких температурах достигает постоянного значения $\approx \frac{3}{2}k$ (18).

Заключение

Температурная зависимость теплоемкости для ансамбля невзаимодействующих электронов, полученная с использованием аппарата квантовой механики, совпадает с аналогичной зависимостью, полученной в классической физике. При низких температурах теплоемкость пропорциональна абсолютной температуре. что соответствует экспериментальным данным, полученным для металлов, в то время как для диэлектриков теплоемкость пропорциональна третьей степени температуры.

При высоких температурах полученная зависимость достигает насыщения, что находится в согласии с законом Дюлонга-Пти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев И.Н., Копылов И.С. Об электродинамике модели Лондонов и двухжидкостной теории Гортера-Казимира // Поверхность. 2016. № 14. С. 20–31.
2. Müller K.-H. Magnetic viscosity // Reference Module in Materials Science and Materials Engineering. 2016. (Current as of 28 October 2015). 341 p.
3. Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. A thermodynamic approach to ferromagnetism and phase transitions // International Journal of Engineering Science. 2009. Vol. 47. Iss. 9. pp. 821–839.
4. Hallatshek K. Thermodynamic potential in local turbulence simulations // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. Iss. 12. pp. 125001-1-125001-4.
5. Алиев И.Н., Копылов И.С. Применение метода множителей Лагранжа к вычислению магнитного поля постоянного тока // Динамика сложных систем. 2015. Т.9, № 4. С. 3–10.
6. Моргулис В.А., Миронов В.А. Магнитный момент кольца Волкано. // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, В. 1. С. 148-153.
7. Николаев В.И. Термодинамический квадрат // Физическое образование в вузах. 1999. Т. 5, № 2. С. 40-51.
8. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neurer effect bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. V. 21. Iss. 44. pp. 787–788.
9. Руднев И.А, Осипов М.А., Подливаев А.И., Покровский С.В. Визуализация протекания электрического тока в проводящих структурах с применением техники магнито-силовой микроскопии // Поверхность. 2015. № 9. С. 19–26.
10. Алиев И.Н, Докукин М.Ю., Самедова З.А. Применение двойного квантования в диамагнетизме Ландау. Вестник Московского государственного технического университета им. Баумана. Серия: Естественные науки. 2016. № 4. С. 14–27.

11. Gorter C.J. Theory of supracondactivity // Nature. 1933. Vol. 132. P. 931.
12. Gorter C.J., Casimir H. Onsupracondactivity // Physica. 1934. Vol. 1. pp. 306–320.
13. Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О потенциалах в электродинамике Лондонов // Вестник Московского государственного технического университета им. Баумана. Серия: Естественные науки. 2016. № 2. С. 42–51.
14. Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О теоремах Пойнтинга и Абрагама в электродинамике сверхпроводников Лондонов // Вестник Московского областного государственного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 83–91.
15. Körmann F., Hickel T., Neugebauer J. Influence of magnetic excitations on the phase stability of metals and steels // Current Opinion in Solid State and Materials Science. 2016. Vol. 20. Iss. pp. 77–84.
16. Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир, 1970. С. 195–200.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука. 1964. Т. 5. С. 231–300.
18. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. М.: Иностранная литература. 1956. С. 156–200.

REFERENCES:

1. Aliev I.N., Kopylov I.S. Ob elektrodinamike modeli Londonov i dvukhzhidkostnoi teorii Gortera-Kazimira [Electrodynamics model, London theory and the two-fluid Gorter-Casimir] // Poverkhnost'. 2016. no. 14. pp. 20–31.
2. Müller K.-H. Magnetic viscosity // Reference Module in Materials Science and Materials Engineering. 2016. (Current as of 28 October 2015). 341 p.
3. Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. A thermodynamic approach to ferromagnetism and phase transitions // International Journal of Engineering Science. 2009. Vol. 47. Iss. 9. pp. 821–839.
4. Hallatshek K. Thermodynamic potential in local turbulence simulations // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. Iss. 12. pp. 125001-1-125001-4.
5. Aliev I.N., Kopylov I.S. Primenenie metoda mnozhitelei Lagranzha k vychisleniyu magnitnogo polya postoyannogo toka [The application of the method of Lagrange multipliers to the calculation of DC magnetic field] // Dinamika slozhnykh sistem. Vol. 9. 2015. no. 4. pp. 3–10.
6. Morgulis V.A., Mironov V.A. Magnitnyi moment kol'tsa Volkano. [The magnetic moment of the ring Volcano.] // Fizika tverdogo tela. T. 50, V. 1. [Physics of the solid state. Vol. 50, Iss. 1.]. 2008. pp. 148–153.
7. Nikolaev V.I. Termodinamicheskii kvadrat [The thermodynamic square] // Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh. Vol. 5. 1999. no. 2. pp. 40–51.

8. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neurer effect bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. V. 21. Iss. 44. pp. 787-788.
9. Rudnev I.A., Osipov M.A., Podlivaev A.I., Pokrovskii S.V. Vizualizatsiya protekaniya elektricheskogo toka v provodyashchikh strukturakh s primeneniem tekhniki magnito-silovoi mikroskopii [Visualization of electrical current flow in conducting structures using the technique of magnetic force microscopy] // Poverkhnost'. 2015. no. 9. pp. 19–26.
10. Aliev I.N., Dokukin M.YU., Samedova Z.A. Primenenie dvoinogo kvantovaniya v diamagnetizme Landau. [Use of double quantization in Landau diamagnetism.] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki. 2016. no. 4. pp. 14–27.
11. Gorter C.J. Theory of supracondactivity // Nature. 1933. Vol. 132. P. 931.
12. Gorter C.J., Casimir H. Onsupracondactivity // Physica. 1934. Vol. 1. pp. 306-320.
13. Aliev I.N., Melikyants D.G. O potentsialakh v elektrodinamike Londonov [Of the potentials in electrodynamics of London] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki. 2016. no. 2. pp. 42–51.
14. Aliev I.N., Melikyants D.G. O teoremakh Pointinga i Abragama v elektrodinamike sverkhprovodnikov Londonov [On the theorem of Poynting and Abraham in the electrodynamics of superconductors London] // Vestnik Moskovskogo oblastnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no. 4. pp. 83–91.
15. Körmann F., Hickel T., Neugebauer J. Influence of magnetic excitations on the phase stability of metals and steels // Current Opinion in Solid State and Materials Science. 2016. Vol. 20. Iss. pp. 77–84.
16. Kubo R. Termodinamika [Thermodynamics]. M., Mir, 1970. pp. 195–200.
17. Landau L.D., Lifshits E.M. Statisticheskaya fizika. T. 5 [Statistical physics. Vol. 5] M., Nauka, 1964. pp. 231–300.
18. Paierls R. Kvantovaya teoriya tverdykh tel [Quantum theory of solids] M., Inostrannaya literatura, 1956. pp. 156–200.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алиев Исмаил Новруз оглы– доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: alievprof@yandex.ru

Докукин Михаил Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: DMU252@yandex.ru

Самедова Зарифа Алышан кызы – магистрант по специальности «Техническая физика» Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: samezara@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aliev Ismail Novruz ogly– doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Physics at the Bauman Moscow State University;
e-mail: alievprof@yandex.ru

Dokukin Mikhail Yur'evich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of Physics at the Bauman Moscow State University;
e-mail:DMU252@yandex.ru

Samedova Zarifa Alishan kyzy – post-graduate student of Technical Physics at the Bauman Moscow State University
e-mail: samezara@bk.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Алиев И.Н., Докукин М.Ю., Самедова З.А. Термодинамика системы невзаимодействующих свободных электронов// Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 57–71.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-57-71.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

I. Aliev, M. Dokukin, Z. Samedova Thermodynamics of the system of noninteracting free electrons // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3.pp. 57–71.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-57-71.