

Программа для подготовки к рубежному контролю № 1
по аналитической геометрии
ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ; 2019–2020 уч. год

Теоретические вопросы

(как они сформулированы в билетах рубежного контроля)

Часть А

1. Дать определение равенства геометрических векторов.
2. Дать определение суммы векторов и умножения вектора на число.
3. Дать определения коллинеарных и компланарных векторов.
4. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
5. Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.
6. Дать определение базиса и координат вектора.
7. Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.
8. Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.
9. Дать определение скалярного произведения векторов.
10. Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.
11. Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.
12. Записать формулу для косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.
13. Дать определение правой и левой тройки векторов.
14. Дать определение векторного произведения векторов.
15. Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.
16. Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.
17. Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.
18. Дать определение смешанного произведения векторов.
19. Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.
20. Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.
21. Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

22. Записать общее уравнение плоскости и уравнение “в отрезках”. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.
23. Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.
24. Сформулировать условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
25. Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
26. Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.
27. Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.
28. Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.
29. Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
30. Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Часть Б

1. Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.
2. Доказать теорему о разложении вектора по базису.
3. Доказать свойство линейности скалярного произведения.
4. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.
5. Вывести формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных в правом ортонормированном базисе.
6. Доказать свойство линейности смешанного произведения.
7. Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.
8. Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
9. Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
10. Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Примеры задач

Часть А

1. Разложить вектор $\vec{c} = (-7, 5)$ по векторам $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (4, -3)$.
2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $5 : 3$, точка M — середина AB , а точка N делит сторону CD в отношении $2 : 3$. Разложить вектор \vec{MN} по векторам $\vec{a} = \vec{AD}$ и $\vec{b} = \vec{AB}$.

- Даны точки $A(3, -1, 4)$ и $B(17, 6, -3)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $3 : 4$.
- Найти объём тетраэдра, вершинами которого служат точки $A(-1, -1, 1)$, $B(1, -1, -1)$, $C(-1, 1, -1)$, $D(1, 1, 1)$.
- Вершинами треугольника служат точки $A(-2, 1, 1)$, $B(1, -2, 1)$, $C(1, 1, -2)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .
- Найти расстояние от точки $M(7, 7, 7)$ до плоскости $2x + 2y + z = 2$.
- Прямую $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -4x + y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ задать параметрически.
- Составить общее уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{7}$ перпендикулярно плоскости $x + y + z = 0$.
- Найти расстояние от точки $M(4, -2, 1)$ до прямой $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 + 4t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$.
- Составить канонические уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$ параллельно оси OX .

Часть Б

- Найти угол между векторами $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, угол между \vec{a} и \vec{b} равен $2\pi/3$.
- Вершинами треугольной пирамиды служат точки $A(-2, -2, 10)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 11)$. Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины D на грань ABC .
- Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \\ z = -4 + 3t \end{cases}.$$

- Найти точку Q , симметричную точке $P(3, 18, 18)$ относительно прямой $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{2}$.
- Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

относительно плоскости $x + y + z = 1$.

Примерный вариант билета РК1

Часть А

необходимо сделать по крайней мере 6 пунктов, из них не менее 4 задач; оценка 16 баллов

Теория

- Дать определение линейно зависимой и независимой системы векторов.
- Сформулировать условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
- Записать формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

Задачи

- Образуют ли базис векторы $\vec{a} = (3, -2, 5)$, $\vec{b} = (-9, 14, -21)$, $\vec{c} = (3, 2, 2)$?
- Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(-7, -7, -7)$, $B(13, 0, -6)$, $C(-3, -6, -7)$.
- Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, 2, 1)$ параллельно плоскости $2x - 4y + 5z + 3 = 0$.
- Найти проекцию Q точки $P(-5, 5, 5)$ на плоскость $3x - 2y - 2z + 18 = 0$.
- Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить по крайней мере одну задачу; оценка 3–15 баллов

Теория

- Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Задачи

- Треугольная пирамида имеет объём 8, вершины $A(-7, -3, -3)$, $B(-5, -1, 0)$, $C(-5, 0, -1)$, а о вершине D известно, что она лежит на положительной части оси OX . Найти координаты вершины D .
- Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(0, 1, 1)$ и пересекает прямые

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 8 + 2t \\ z = 8 + 2t \end{cases}$$