

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ  
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ  
ГЕОМЕТРИИ, 2-Й СЕМЕСТР:

*Модуль 1 (Векторные и евклидовы пространства, линейные функции)*

*Модуль 2 (Линейные операторы)*

для специальности ИУ-9

О. В. Куликова, 2013 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Часть I. Векторные пространства. Линейные функции</b>	<b>3</b>
<b>1. Векторные пространства</b>	<b>3</b>
1.1. Основные определения	3
1.2. Координаты векторов. Преобразование координат при переходе к другому базису	8
1.3. Изоморфизм векторных пространств	10
1.4. Сумма и пересечение подпространств	13
<b>2. Сопряженное пространство</b>	<b>17</b>
2.1. Линейные функции	17
2.2. Взаимозаменяемость $V$ и $V^*$	19
2.3. Преобразование координат в $V^*$	20
2.4. Подпространства и линейные функции.	21
<b>Часть II. Евклидовы пространства. Билинейные и квадратичные функции</b>	<b>23</b>
<b>3. Евклидовы пространства</b>	<b>23</b>
3.1. Скалярное произведение	23
3.2. Ортогональные базисы	27
3.3. Матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому	30
3.4. Ортогональное дополнение	33
3.5. Изоморфизм евклидовых пространств	36
<b>4. Билинейные функции</b>	<b>38</b>
4.1. Билинейные функции и их матрицы	38
4.2. Симметрические билинейные функции	40
<b>5. Квадратичные функции</b>	<b>42</b>
5.1. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов	42
5.2. Формула Якоби	43
5.3. Нормальный вид квадратичных форм над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$ . Закон инерции	45
5.4. Положительно определенная квадратичная форма	46
<b>6. Унитарные пространства</b>	<b>49</b>
6.1. Полуторалинейные функции	49
6.2. Понятие унитарного пространства	51
6.3. Комплексификация вещественного пространства	53
<b>Часть III. Линейные операторы</b>	<b>56</b>
<b>7. Линейные отображения и линейные операторы. Основные определения</b>	<b>56</b>
7.1. Линейные отображения	56
7.2. Матрицы линейного оператора	61
7.3. Инвариантные подпространства	64

<b>8. Собственные векторы и собственные значения</b>	<b>66</b>
8.1. Характеристический многочлен . . . . .	66
8.2. Комплексные собственные значения . . . . .	67
8.3. Собственные подпространства . . . . .	69
8.4. Приведение линейного оператора к треугольному виду . . . . .	71
8.5. Минимальный многочлен . . . . .	75
<b>9. Жорданова нормальная форма</b>	<b>77</b>
9.1. Основные определения и вспомогательные утверждения . . . . .	77
9.2. Существование жорданова базиса . . . . .	81
9.3. Единственность жордановой нормальной формы . . . . .	83
9.4. Корневые подпространства . . . . .	87
9.5. Вычисление функций от матриц . . . . .	89
<b>10. Линейные операторы в евклидовом пространстве</b>	<b>93</b>
10.1. Связь между линейными операторами и билинейными функциями в евклидовом пространстве . . . . .	93
10.2. Операция перехода к сопряженному оператору . . . . .	94
10.3. Самосопряженные линейные операторы . . . . .	95
10.4. Приведение к главным осям . . . . .	99
10.5. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов . . . . .	100
10.6. Ортогональные операторы . . . . .	102
10.7. Полярное разложение . . . . .	106
<b>11. Линейные операторы в унитарном пространстве</b>	<b>110</b>
11.1. Сопряженный линейный оператор в унитарном пространстве . . . . .	110
11.2. Эрмитовый линейный оператор . . . . .	111
11.3. Унитарный линейный оператор . . . . .	111
11.4. Канонические виды для эрмитовых и унитарных операторов . . . . .	112
11.5. Аналогия с комплексными числами . . . . .	114
<b>Вопросы для самопроверки</b>	<b>116</b>
<b>Литература</b>	<b>119</b>

# Часть I

## Векторные пространства. Линейные функции

### Глава 1. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

#### 1.1. Основные определения

Второй семестр курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» посвящен линейной алгебре, начала которой были изложены в 1-м семестре. Линейная алгебра является наиболее прикладным разделом алгебры. Ее аппарат так же необходим каждому математику, как и аппарат математического анализа. Для полноты изложения начнем с напоминания определений и утверждений из 1-го семестра.

**Определение 1.1.** Множество  $V$  называется **векторным** (или **линейным**) **пространством** над полем<sup>1</sup>  $F$ , если

а) каждому двум элементам  $x, y \in V$  поставлен в соответствие элемент  $z \in V$ , называемый **суммой элементов**  $x$  и  $y$ ; сумма элементов  $x$  и  $y$  обозначается через  $x + y$ ,  
б) каждому элементу  $x \in V$  и каждому числу  $\lambda \in F$  поставлен в соответствие элемент  $\lambda x \in V$ , называемый **произведением числа  $\lambda$  на элемент  $x$** ,  
в) эти операции (**линейные операции**) удовлетворяют следующим требованиям (аксиомам):

- 1)  $x + y = y + x$  для любого  $x, y \in V$  (коммутативность);
- 2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  для любых  $x, y, z \in V$  (ассоциативность);
- 3) в  $V$  существует такой элемент  $0$  (нуль), что  $x + 0 = x$  для любого  $x \in V$ ;
- 4) для любого элемента  $x \in V$  существует такой элемент  $-x \in V$  (противоположный элемент), что  $x + (-x) = 0$ ;
- 5)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  для любых  $\lambda \in F, x, y \in V$ ;
- 6)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  для любых  $\lambda, \mu \in F, x \in V$ ;
- 7)  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$  для любых  $\lambda, \mu \in F, x \in V$ ;
- 8)  $1x = x$  для любого  $x \in V$ .

Отметим, что аксиомы 1)–4) векторного пространства  $V$  говорят о том, что относительно сложения  $V$  является абелевой группой.

Элементы векторного пространства называются **векторами**. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле, не должно нас смущать. Геометрические представления, связанные с этим словом, помогут нам уяснить, а иногда и предвидеть, ряд результатов. Элементы поля  $F$ , в отличие от векторов, мы будем иногда, допуская вольность речи, называть числами, даже если  $F$  не является числовым полем.

<sup>1</sup>Понятие поля изучалось в 1-м семестре. Самыми известными примерами поля являются множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел, множество  $\mathbb{R}$  действительных чисел, множество  $\mathbb{C}$  комплексных чисел относительно естественных операций сложения и умножения. Всюду ниже читателю, не знакомому с абстрактным понятием поля, достаточно под этим словом представлять себе  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . В том числе это относится к тем случаям, когда речь будет идти о поле  $F$  характеристики, отличной от двух ( $\text{char } F \neq 2$ ).

**Пример 1.** Векторы в смысле элементарной геометрии будем отныне называть *геометрическими векторами*. Операции над ними удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства, что, собственно, и послужило основой для данного выше определения. Пространство геометрических векторов евклидовой плоскости (соотв., трехмерного евклидова пространства) будем обозначать через  $V^2$  (соотв.,  $V^3$ ). Подчеркнем, что это векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$ .

**Пример 2.** Множество  $M_{m \times n}(F)$  прямоугольных матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из поля  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно стандартных операций сложения матриц и умножения матриц на число.

**Пример 3.** Множество  $F^n$  упорядоченных последовательностей  $(x_1, \dots, x_n)$  длины  $n$  с элементами  $x_i$  из поля  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно операций:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Это векторное пространство, по сути, есть векторное пространство матриц-строк  $M_{1 \times n}(F)$ . Отличие лишь формальное, так как первое определено как множество упорядоченных последовательностей чисел, а второе как множество матриц. Но элементы матрицы также записываются в определенном порядке. Ниже  $F^n$  часто будем называть пространством строк длины  $n$ .

**Пример 4.** Множество  $F^M$  всех функций на множестве  $M$  со значениями в поле  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно обычных операций над функциями:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

**Пример 5.** Множество  $C[a, b]$  непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  образует векторное пространство над  $\mathbb{R}$  относительно обычных операций над функциями.

Но множество непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  таких, что  $|f(x)| \leq 1$  не будет образовывать векторное пространство: из того, что  $|f_1(x)| \leq 1$  и  $|f_2(x)| \leq 1$ , не следует  $|f_1(x) + f_2(x)| \leq 1$ .

**Пример 6.** Множество  $F_n[x]$  всех многочленов степени, не превышающей натурального числа  $n$ , с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа образует векторное пространство над  $F$ .

Заметим, что множество многочленов степени, равной  $n$ , не образует векторного пространства, так как сумма двух многочленов степени  $n$  может оказаться многочленом более низкой степени: например,  $(t^n + t) + (-t^n + t) = 2t$ .

**Пример 7.** Множество  $F[x_1, \dots, x_n]$  всех многочленов от  $n$  переменных с коэффициентами из поля  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно обычных операций над многочленами.

**Пример 8.** Пусть  $F$  — подполе поля  $L$ . Тогда  $L$  можно рассматривать как векторное пространство над  $F$ , определив умножение элементов из  $L$  на элементы из  $F$  просто как умножение в  $L$ . В частности, поле  $\mathbb{C}$  есть в этом смысле векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

Укажем некоторые следствия из аксиом векторного пространства. Их доказательство проводилось в 1-м семестре. Символом  $0$  обозначается как нуль поля  $F$ , так и нулевой вектор, т.е. нуль аддитивной группы  $V$  (смотри третью аксиому векторного пространства), это не приводит к путанице.

**Следствия из аксиом векторного пространства.**

1. Вектор нуль единствен.
2. Противоположный вектор единствен.
3. Для любых  $a, b \in V$  уравнение  $x + a = b$  имеет единственное решение, равное  $b + (-a)$ . Это решение называется *разностью* векторов  $b$  и  $a$  и обозначается  $b - a$ .
4. Сумма произвольного числа (а не только трех) векторов не зависит от расстановки скобок. (Пользуясь этим свойством, скобки обычно вообще опускают.)
5.  $\lambda 0 = 0$  для любого  $\lambda \in F$  (здесь  $0$  — нулевой вектор).
6.  $\lambda(-a) = -\lambda a$  для любых  $\lambda \in F, a \in V$ .
7.  $\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$  для любых  $\lambda \in F, a, b \in V$ .
8.  $0a = 0$  для любого  $a \in V$  (здесь  $0$  слева — число, справа — вектор).
9.  $(-1)a = -a$  для любого  $a \in V$ .
10.  $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$  для любых  $\lambda, \mu \in F, a \in V$ .

**Определение 1.2.** Непустое подмножество  $U$  векторного пространства  $V$  над полем  $F$  называется **подпространством**, если оно замкнуто относительно сложения и умножения на произвольные числа из  $F$ , т.е.

- 1)  $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ ;
- 2)  $\lambda \in F, x \in U \Rightarrow \lambda x \in U$ .

**Замечание.** В определении подпространства вместо условия непустоты множества  $U$  и наличия условия 1) можно потребовать, чтобы  $U$  являлось подгруппой аддитивной группы  $V$ . Действительно, в определении подгруппы требуется, чтобы

$$x, y \in U \Rightarrow x + y \in U, \quad x \in U \Rightarrow -x \in U \quad \text{и} \quad 0 \in U.$$

Первое из этих условий совпадает с условием 1) из определения подпространства. При наличии условия 2) из определения подпространства условие  $x \in U \Rightarrow -x \in U$  выполняется автоматически, так как  $(-1)x = -x$ . При наличии того же условия 2) условие  $0 \in U$  равносильно тому, что  $U$  не пусто, так как если существует хотя бы один вектор  $x$  в  $U$ , то  $0 = 0x \in U$ .

*Подпространство векторного пространства само является векторным пространством относительно тех же операций.* Это дает множество новых примеров векторных пространств.

**Пример 9.** В пространстве  $V^3$  геометрических векторов множество векторов, параллельных заданной плоскости или прямой, является подпространством.

**Пример 10.** В пространстве  $\mathbb{R}^{[a,b]}$  всех функций на заданном отрезке  $[a, b]$  числовой прямой множество непрерывных функций является подпространством.

**Пример 11.** В пространстве  $F^n$  строк длины  $n$  множество строк с нулями на четных местах образует подпространство, а множество с единицами на четных местах не образует подпространства.

**Пример 12.** В пространстве квадратных матриц  $M_n(F)$  порядка  $n$  множество матриц с нулями под главной диагональю образует подпространство. Также в пространстве  $M_n(F)$  множество симметрических (соотв., кососимметрических) матриц, т.е. матриц  $A$  таких, что  $A = A^T$  (соотв.,  $A = -A^T$ ), образует подпространство.

**Пример 13.** В пространстве  $F[x_1, \dots, x_n]$  всех многочленов от  $n$  переменных с коэффициентами из поля  $F$  множество симметрических многочленов, т.е. таких, которые не изменяются ни при каких перестановках переменных, образует подпространство.

В каждом векторном пространстве  $V$  есть два «тривиальных» подпространства: само пространство  $V$  и нулевое подпространство (состоящее из одного нулевого вектора).

Основным понятием теории векторных пространств является понятие линейной зависимости векторов, также подробно изученное в 1-м семестре.

**Определение 1.3.** Конечная система векторов  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  называется **линейно зависимой**, если найдутся не все равные нулю числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , такие, что  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ . Бесконечное подмножество  $S \subset V$  называется **линейно зависимым**, если некоторое непустое конечное подмножество  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset S$  является линейно зависимым. Подмножество, не являющееся линейно зависимым, называется **линейно независимым**.

**Определение 1.4.** Всякое выражение вида  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ , называется **линейной комбинацией** векторов  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ . Если не все  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  равны нулю, то линейная комбинация  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$  называется **нетривиальной**, в противном случае линейная комбинация называется **тривиальной**. Говорят, что вектор  $w \in V$  **линейно выражается** через векторы  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , если он равен некоторой их линейной комбинации. Говорят, что вектор  $w \in V$  **линейно выражается** через некоторое подмножество  $S \subset V$ , если  $w$  линейно выражается через некоторое конечное подмножество  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset S$ .

Очевидно, что *если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима*.

В 1-м семестре были доказаны следующие леммы о линейно зависимых и линейно независимых системах.

**Лемма 1.1 (критерий линейной зависимости).** Векторы  $v_1, \dots, v_m$  ( $m > 1$ ) линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

**Лемма 1.2.** Пусть векторы  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы. Вектор  $w$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_m$  тогда и только тогда, когда векторы  $v_1, \dots, v_m, w$  линейно зависимы.

**Лемма 1.3.** Пусть вектор  $w$  линейно выражается через векторы  $v_1, \dots, v_m$ . Это выражение единственно тогда и только тогда, когда векторы  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы.

Пусть  $S \subset V$  — какое-то подмножество. Совокупность всевозможных (конечных) линейных комбинаций векторов из  $S$  называется **линейной оболочкой** этого подмножества и будет обозначаться через  $\langle S \rangle$ . Это наименьшее подпространство пространства  $V$ , содержащее  $S$ , т.е. любое подпространство, содержащее  $S$ , содержит и всю линейную оболочку  $\langle S \rangle$ . Говорят, что пространство  $V$  **порождается** множеством  $S$ , если  $\langle S \rangle = V$ . Векторное пространство называется **конечномерным**, если оно порождается конечным числом векторов, и **бесконечномерным** в противном случае.

Бесконечномерные пространства составляют предмет специального изучения. В данном курсе мы будем заниматься в основном конечномерными пространствами.

**Лемма 1.4 (Основная лемма о линейной зависимости).** Если векторное пространство  $V$  порождается  $n$  векторами, то всякие  $m > n$  векторов пространства  $V$  линейно зависимы.

**Определение 1.5.** Упорядоченная система векторов  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$  называется **базисом** векторного пространства  $V$ , если каждый вектор  $x \in V$  единственным образом выражается через  $e_1, \dots, e_n$ . Коэффициенты этого выражения называются **координатами** вектора  $x$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

Ввиду леммы 1.3 это определение базиса можно переформулировать следующим образом: **базисом** векторного пространства  $V$  называется всякая линейно независимая упорядоченная система векторов, порождающая пространство  $V$ .

В 1-м семестре была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** *Всякое конечномерное векторное пространство  $V$  обладает базисом. Более точно, из всякого конечного порождающего множества  $S \subset V$  можно выбрать базис пространства  $V$ .*

Также из основной леммы о линейной зависимости была получена:

**Теорема 1.2.** *Все базисы конечномерного векторного пространства  $V$  имеют одно и то же число векторов.*

Это число называется **размерностью** пространства  $V$  и обозначается  $\dim V$ .

**Пример 14.** Пространство  $V^2$  (соотв.,  $V^3$ ) имеет размерность 2 (соотв., 3).

**Пример 15.** В качестве базиса пространства  $F^n$  можно выбрать единичные строки  $(1, 0, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$  и  $\dim F^n = n$ .

**Пример 16.** В пространстве матриц  $M_{m \times n}(F)$  размера  $m \times n$  в качестве базиса можно выбрать все матрицы, у которых на одном каком-либо месте стоит единица, а на остальных местах нули. Таким образом,  $\dim M_{m \times n}(F) = mn$ .

**Пример 17.** Поле комплексных чисел как векторное пространство над  $\mathbb{R}$  имеет базис  $\{1, i\}$  и, соответственно, размерность 2. Алгебра кватернионов как векторное пространство над  $\mathbb{R}$  имеет базис  $\{1, i, j, k\}$  и, соответственно, размерность 4.

**Пример 18.** Поле  $\mathbb{R}$  как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$  бесконечномерно. В самом деле, если бы оно было конечномерным, то вещественное число определялось бы конечным набором рациональных чисел — своих координат в некотором базисе этого пространства. Но тогда множество всех вещественных чисел было бы счетным, что неверно.

**Пример 19.** В пространстве  $F_n[x]$  многочленов степени  $\leq n$  простейшим базисом является совокупность векторов  $1, x, x^2, \dots, x^n$  и  $\dim F_n[x] = n + 1$ .

**ЗАДАЧА.** Доказать, что пространство всех непрерывных функций на любом промежутке числовой прямой бесконечномерно.

Из основной леммы о линейной зависимости следует, что в любом (конечном или бесконечном) множестве  $S$  векторов конечномерного векторного пространства  $V$  имеется максимальное линейно независимое подмножество, т.е. такое линейно независимое подмножество, которое становится линейно зависимым при добавлении к нему любого вектора из оставшихся векторов множества  $S$ . Более того, любое линейно независимое подмножество множества  $S$  можно дополнить до максимального линейно независимого подмножества.

**Лемма 1.5.** *Всякое максимальное линейно независимое упорядоченное подмножество множества  $S$  конечномерного векторного пространства  $V$  является базисом линейной оболочки  $\langle S \rangle$  этого множества.*

В частности, применяя изложенные выше соображения к  $S = V$ , получаем, что **базисом** конечномерного векторного пространства  $V$  является всякая максимальная линейно независимая упорядоченная система векторов из  $V$ . Также получаем следующую теорему.

**Теорема 1.3.** *Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства  $V$  можно дополнить до базиса.*

В частности, любой ненулевой вектор можно включить в базис, а любые  $n$  линейно независимых векторов векторного пространства размерности  $n$  уже составляют базис.

Напомним также следующую теорему из 1-го семестра, устанавливающую монотонность размерности.

**Теорема 1.4.** *Всякое подпространство  $U$  конечномерного векторного пространства  $V$  также конечномерно, причем  $\dim U \leq \dim V$ . Более того, если  $U \neq V$ , то  $\dim U < \dim V$ .*

## 1.2. Координаты векторов. Преобразование координат при переходе к другому базису

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ ,  $\dim V = n$ . И пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — какой-либо фиксированный базис. Тогда для любого вектора  $v \in V$  существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$  такие, что  $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . Набор чисел  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  есть набор координат вектора  $v$ , причем при заданном базисе координаты вектора  $v$  определены однозначно.

Если в базисе  $\mathcal{E}$  вектор  $x$  имеет координаты  $(x_1, \dots, x_n)$ , а вектор  $y$  — координаты  $(y_1, \dots, y_n)$ , т.е.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n,$$

то

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + \dots + (x_n + y_n)e_n,$$

т.е. вектор  $x + y$  имеет координаты  $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ . Аналогично получаем, что вектор  $\lambda x$  имеет координаты  $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ .

Таким образом, при сложении векторов  $x$  и  $y$  их координаты складываются. При умножении вектора  $x$  на число  $\lambda$  его координаты умножаются на это число.

Поэтому столбец (соотв., строка) координат линейной комбинации векторов есть линейная комбинация их столбцов (соотв., строк) координат с теми же коэффициентами. Отсюда следует, что *векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их столбцы (соотв., строки) координат.*

**Пример 20.** Рассмотрим пространство  $F^n$  строк длины  $n$ . Возьмем базис

$$e_1 = (1, 1, 1, \dots, 1), \quad e_2 = (0, 1, 1, \dots, 1), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Найдем координаты  $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$  вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  в этом базисе. По определению

$$x = \chi_1 e_1 + \chi_2 e_2 + \dots + \chi_n e_n,$$

т.е.

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) &= \chi_1(1, 1, 1, \dots, 1) + \chi_2(0, 1, 1, \dots, 1) + \dots + \chi_n(0, 0, \dots, 1) = \\ &= (\chi_1, \chi_1 + \chi_2, \dots, \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n). \end{aligned}$$

Таким образом, числа  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  находятся из следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \chi_1 = x_1, \\ \chi_1 + \chi_2 = x_2, \\ \dots \dots \dots \\ \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n = x_n, \end{cases}$$

откуда  $\chi_1 = x_1, \chi_2 = x_2 - x_1, \dots, \chi_n = x_n - x_{n-1}$ .

Рассмотрим теперь в  $F^n$  базис из единичных строк:

$$e'_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e'_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

В этом базисе связь между координатами вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и числами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , определяющими этот вектор, наиболее проста:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots \\ \dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 1) = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n,$$

т.е. в  $F^n$  числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можно трактовать как координаты вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  в базисе  $e'_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $e'_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e'_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ .

**Пример 21.** Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}_n[x]$  многочленов степени  $\leq n$ . Координатами многочлена  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$  в простейшем базисе  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = x$ ,  $e_3 = x^2$ ,  $\dots$ ,  $e^{n+1} = x^n$  являются, как легко видеть, его коэффициенты  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Выберем теперь другой базис:

$$e'_1 = 1, \quad e'_2 = (x - a), \quad e'_3 = (x - a)^2, \quad \dots, \quad e'_{n+1} = (x - a)^n.$$

Каждый многочлен  $f(x)$  может быть представлен по формуле Тейлора в виде:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Таким образом, в этом базисе  $f(x)$  имеет координаты  $(f(a), f'(a), \dots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!})$ .

Как видно из этих примеров, один и тот же вектор в разных базисах может иметь разные координаты. Нашей ближайшей целью является установление связи между координатами одного и того же вектора относительно двух различных базисов.

Пусть даны два базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  векторного пространства  $V$ . Выразим каждый вектор  $e'_j \in \mathcal{E}'$  через базис  $\mathcal{E}$ :

$$e'_j = t_{1,j}e_1 + t_{2,j}e_2 + \dots + t_{n,j}e_n, \quad j = \overline{1, n}.$$

Из коэффициентов  $t_{i,j} \in F$  составим квадратную матрицу

$$T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = (t_{i,j}).$$

При этом  $j$ -й столбец матрицы  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  есть столбец координат вектора  $e'_j$  в базисе  $\mathcal{E}$ . Полученная матрица  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  называется **матрицей перехода** от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\mathcal{E}'$ . Отметим, что  $\det T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \neq 0$ , так как столбцами матрицы  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  являются координаты линейно независимых векторов  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ .

Рассмотрим произвольный вектор  $x \in V$ . Пусть  $(x_1, \dots, x_n)$  — его координаты в базисе  $\mathcal{E}$ ,  $(x'_1, \dots, x'_n)$  — его координаты в базисе  $\mathcal{E}'$ , т.е. с одной стороны имеем

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (*)$$

С другой стороны,

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства вместо каждого  $e'_j$  его выражение через базис  $\mathcal{E}$ , получаем

$$x = x'_1(t_{1,1}e_1 + t_{2,1}e_2 + \dots + t_{n,1}e_n) + x'_2(t_{1,2}e_1 + t_{2,2}e_2 + \dots + t_{n,2}e_n) + \dots \\ \dots + x'_n(t_{1,n}e_1 + t_{2,n}e_2 + \dots + t_{n,n}e_n).$$

Далее раскрываем скобки в полученной правой части и собираем вместе коэффициенты при каждом векторе  $e_i$ :

$$x = (x'_1 t_{1,1} + x'_2 t_{1,2} + \dots + x'_n t_{1,n})e_1 + (x'_1 t_{2,1} + x'_2 t_{2,2} + \dots + x'_n t_{2,n})e_2 + \dots$$

$$\dots + (x'_1 t_{n,1} + x'_2 t_{n,2} + \dots + x'_n t_{n,n}) e_n. \quad (**)$$

Каждое из равенств (\*) и (\*\*) является разложением вектора  $x$  по базису  $\mathcal{E}$ . В силу единственности разложения вектора по базису получаем, что

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 t_{1,1} + x'_2 t_{1,2} + \dots + x'_n t_{1,n}, \\ x_2 = x'_1 t_{2,1} + x'_2 t_{2,2} + \dots + x'_n t_{2,n}, \\ \dots \\ x_n = x'_1 t_{n,1} + x'_2 t_{n,2} + \dots + x'_n t_{n,n}, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда полученную формулу преобразования координат при переходе от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\mathcal{E}'$  можно записать так:

$$X = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} X'. \quad (1.1)$$

**Свойства матриц перехода:**

1) Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  — два базиса векторного пространства  $V$ . Тогда

$$T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}.$$

2) Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$  — три базиса векторного пространства  $V$ . Тогда

$$T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}''} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''}.$$

3) Пусть  $T = (t_{i,j})$  — произвольная квадратная невырожденная матрица,  $\mathcal{E}$  — произвольный базис векторного пространства  $V$ . Тогда система векторов  $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ , полученных по формуле:

$$e'_j = t_{1,j} e_1 + t_{2,j} e_2 + \dots + t_{n,j} e_n, \quad j = \overline{1, n},$$

будет также являться базисом в  $V$ . Другими словами, любая квадратная невырожденная матрица  $T$  является матрицей перехода из данного базиса  $\mathcal{E}$  векторного пространства  $V$  в некоторый другой базис  $\mathcal{E}'$ .

**ЗАДАЧА.** Докажите эти свойства.

### 1.3. Изоморфизм векторных пространств

Для сравнения двух векторных пространств  $V$  и  $W$  над одним и тем же полем  $F$  вводится понятие изоморфизма.

Определение 1.6. Векторные пространства  $V$  и  $W$  над полем  $F$  называются **изоморфными**, если существует биективное отображение

$$\varphi : V \rightarrow W,$$

сохраняющее операции сложения и умножения на число:

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  для любых  $x, y \in V$ ,
- 2)  $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$  для любых  $\lambda \in F, x \in V$ .

В этом случае пишут  $V \cong W$ . Само отображение  $\varphi$  называется при этом **изоморфизмом** пространств  $V$  и  $W$ .

Отметим некоторые **свойства изоморфизма**:

(i)  $\varphi(0) = 0$ , причем при изоморфизме  $\varphi$  в нуль пространства  $W$  переходит только нуль пространства  $V$ .

*Доказательство.* Свойство (i) следует из биективности и из аксиомы 2) изоморфизма, если положить  $\lambda = 0$ . ■

(ii) Существует обратное отображение  $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$ , причем оно также является изоморфизмом.

*Доказательство.* Существование  $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$  следует из биективности отображения  $\varphi : V \rightarrow W$ . Проверим аксиомы 1) и 2) изоморфизма. Для произвольных  $x', y' \in W$  найдутся  $x, y \in V$  такие, что

$$\varphi(x) = x', \quad \varphi(y) = y',$$

а значит,

$$\varphi(x + y) = x' + y' \quad \text{и} \quad \varphi(\lambda x) = \lambda x'$$

для произвольного  $\lambda \in F$ . По определению обратного отображения имеем

$$\varphi^{-1}(x') = x, \quad \varphi^{-1}(y') = y, \quad \varphi^{-1}(x' + y') = x + y$$

и

$$\varphi^{-1}(\lambda x') = \lambda x.$$

Следовательно,

$$\varphi^{-1}(x' + y') = \varphi^{-1}(x') + \varphi^{-1}(y') \quad \text{и} \quad \varphi^{-1}(\lambda x') = \lambda\varphi^{-1}(x').$$

■

(iii) Пусть  $U, V, W$  — векторные пространства над одним и тем же полем, причем  $U \cong V$  и  $V \cong W$ . Тогда  $U \cong W$ .

Проверьте свойство (iii) самостоятельно!

Как мы увидим ниже, описание векторных пространств с точностью до изоморфизма весьма просто. В частности, верно следующее утверждение

**Утверждение 1.1.** *Всякое векторное пространство  $V$  над полем  $F$  размерности  $n$  изоморфно пространству  $F^n$  строк длины  $n$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис пространства  $V$ . Рассмотрим отображение

$$\varphi : V \rightarrow F^n,$$

ставящее в соответствие каждому вектору  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$  строку его координат  $(x_1, \dots, x_n)$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . В силу единственности разложения вектора по базису это отображение корректно определено. Очевидно, что это биективное отображение.

Проверим свойства 1) и 2) определения изоморфизма. Если

$$x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n,$$

$$y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n,$$

то

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_n + y_n)e_n,$$

$$\lambda x = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n.$$

Значит,

$$\varphi(x + y) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(\lambda x) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda\varphi(x).$$

Отсюда следует, что  $\varphi$  — изоморфизм. ■

Следующая теорема дает исчерпывающее описание всех конечномерных векторных пространств.

**Теорема 1.5.** *Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — изоморфизм векторных пространств  $V$  и  $W$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис пространства  $V$ . Проверим, что  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  — базис пространства  $W$ , откуда будет следовать, что  $\dim V = \dim W$ .

1) Система векторов  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  линейно независима.

Действительно, допустим, что это не так. Тогда найдутся не все равные нулю числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$  такие, что

$$\lambda_1\varphi(e_1) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0.$$

Так как изоморфизм сохраняет операции, получаем

$$\varphi(\lambda_1e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0.$$

А так как при изоморфизме в нуль переходит только нуль, отсюда следует, что

$$\lambda_1e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

что противоречит линейной независимости базиса  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

2) Любой вектор  $x' \in W$  линейно выражается через  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ .

В самом деле, рассмотрим  $x = \varphi^{-1}(x') \in V$ . Этот вектор раскладывается по базису  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ :

$$x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Применяя к этому равенству изоморфизм  $\varphi$  и пользуясь тем, что изоморфизм сохраняет операции, получаем

$$x' = \varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n).$$

Обратно, согласно Утверждению 1.1, всякое  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $F$  изоморфно  $F^n$ ; следовательно, все такие пространства изоморфны между собой. ■

Таким образом, с точностью до изоморфизма для любого  $n$  есть только одно пространство размерности  $n$ , например,  $F^n$ . И в любом рассуждении мы вправе заменить произвольное  $n$ -мерное пространство над полем  $F$  пространством строк  $F^n$ .

## 1.4. Сумма и пересечение подпространств

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ ,  $U$  и  $W$  — его подпространства. Легко проверить, что теоретико-множественное пересечение  $U \cap W$ , т.е. совокупность векторов, принадлежащих обоим этим подпространствам, также есть подпространство в  $V$ . Это наибольшее подпространство, содержащееся как в  $U$ , так и в  $W$ .

Теоретико-множественное объединение  $U \cup W$ , т.е. совокупность векторов, принадлежащих либо подпространству  $U$ , либо подпространству  $W$ , напротив, не обязано быть подпространством, как показывает следующий пример.

**Пример 22.** Рассмотрим плоскость  $V^2$  и стандартный прямоугольный базис  $\{i, j\}$  плоскости. Пусть  $U = \langle i \rangle$ , т.е. это ось  $OX$ ,  $W = \langle j \rangle$ , т.е. это ось  $OY$ . Тогда  $U \cup W = OX \cup OY = \{\lambda i \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\mu j \mid \mu \in \mathbb{R}\}$  содержит векторы  $i$  и  $j$ , но не содержит их суммы  $i + j$ , что противоречит определению подпространства.

Если какое-то подпространство содержит  $U$  и  $W$ , то оно обязано содержать и всевозможные суммы  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ .

**Определение 1.7.** *Суммой*  $U + W$  подпространств  $U$  и  $W$  называется совокупность векторов вида  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ .

Легко проверить, что сумма  $U + W$  подпространств действительно является подпространством в  $V$ . Это наименьшее подпространство, содержащее как  $U$ , так и  $W$ .

Отметим, что в общем случае запись вектора  $x \in U + W$  в виде  $u + w$  может быть неоднозначной.

**Пример 23.** Рассмотрим пространство  $V^3$  и в нем стандартный прямоугольный базис  $\{i, j, k\}$ . Пусть  $U = \langle i, j \rangle$ , т.е. это плоскость  $OXY$ ,  $W = \langle j, k \rangle$ , т.е. это плоскость  $OYZ$ . Сумма  $U + W = \langle i, j, k \rangle$  совпадет со всем пространством  $V^3$ . При этом вектор  $i + j + k \in U + W$  можно представить двумя способами в виде  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ : как сумму вектора  $i + j \in U$  и вектора  $k \in W$  и как сумму вектора  $i \in U$  и вектора  $j + k \in W$ . Отметим, что в данном примере пересечением  $U \cap W = \langle j \rangle$  является ось  $OY$ .

**Определение 1.8.** Сумма подпространств  $U$  и  $W$  называется *прямой* и обозначается  $U \oplus W$ , если каждый вектор  $v \in U \oplus W$  единственным образом представим в виде  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ . При этом  $u$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U$ ,  $w$  — проекцией вектора  $v$  на  $W$ .

**Пример 24.** Плоскость  $V^2$  является прямой суммой осей  $OX$  и  $OY$ .

**Утверждение 1.2.** *Сумма подпространств  $U$  и  $W$  является прямой тогда и только тогда, когда  $U \cap W = \{0\}$ .*

*Доказательство.* Пусть сумма подпространств  $U$  и  $W$  является прямой. Допустим, что в пересечении  $U \cap W$  содержится ненулевой вектор  $v$ . Тогда  $v \in U + W$  представим двумя способами в виде  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ :

$$v = 0 + v, \quad 0 \in U, \quad v \in W,$$

$$v = v + 0, \quad v \in U, \quad 0 \in W,$$

что противоречит определению прямой суммы подпространств  $U$  и  $W$ . Это противоречие доказывает, что  $U \cap W = \{0\}$ .

Обратно, пусть  $U \cap W = \{0\}$ . Допустим, что сумма подпространств  $U$  и  $W$  не является прямой. Значит, найдется вектор  $v \in U + W$ , который имеет два различных представления:  $v = u_1 + w_1$  и  $v = u_2 + w_2$ , где  $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$ . Отсюда следует, что  $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ . Переносим  $u_2$  влево, а  $w_1$  вправо, получаем вектор  $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ , который принадлежит

$U \cap W$ , так как  $u_1 - u_2 \in U, w_2 - w_1 \in W$ . В силу того, что в пересечении подпространств  $U$  и  $W$  содержится только нулевой вектор, получаем  $u_1 - u_2 = 0, w_2 - w_1 = 0$ . Откуда  $u_1 = u_2, w_1 = w_2$ , что противоречит тому, что  $v = u_1 + w_1$  и  $v = u_2 + w_2$  были двумя различными представлениями вектора  $v$ . ■

**Пример 25.** Рассмотрим пространство  $V = M_n(F)$  квадратных матриц порядка  $n$ . Множество симметрических (соотв, кососимметрических) матриц образует подпространство  $U$  (соотв.,  $W$ ) в пространстве  $M_n(F)$ . При условии, что характеристика поля  $\text{char } F$  отлична от 2, всякая матрица  $A$  может быть представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

С другой стороны, при том же условии очевидно, что матрица, являющаяся одновременно симметрической и кососимметрической, равна нулю. Это означает, что пространство матриц раскладывается в прямую сумму подпространства симметрических и подпространства кососимметрических матриц, т.е.  $M_n(F) = U \oplus W$ .

**Пример 26.** Рассмотрим пространство  $V$  всех функций на вещественной прямой. Множество четных (соотв., нечетных) функций образует подпространство  $U$  (соотв.,  $W$ ) в пространстве  $V$  всех функций. Всякая функция  $f$  может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

С другой стороны, функция, являющаяся одновременно четной и нечетной, тождественно равна нулю. Это означает, что пространство всех функций на вещественной прямой является прямой суммой подпространства четных и нечетных функций. (В этом примере векторное пространство и оба подпространства бесконечномерны.)

**Определение 1.9.** *Суммой*  $V_1 + \dots + V_m$  подпространств  $V_1, \dots, V_m \subset V$  называется совокупность векторов вида  $v_1 + \dots + v_m$ , где  $v_i \in V_i$ .

Это наименьшее подпространство, содержащее все подпространства  $V_1, \dots, V_m$ .

**Определение 1.10.** Сумма  $V_1 + \dots + V_m$  подпространств  $V_1, \dots, V_m \subset V$  называется *прямой* и обозначается  $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ , если каждый вектор  $v \in V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  однозначно представляется в виде  $v_1 + \dots + v_m$ , где  $v_i \in V_i$ ; вектор  $v_i$  называется *проекцией* вектора  $v$  на подпространство  $V_i$ .

Напрашивающееся обобщение Утверждения 1.2 для любого числа подпространств неверно. Как показывает следующий пример, из того, что все попарные пересечения  $V_i \cap V_j$  подпространств равны нулевому подпространству  $\{0\}$ , не следует, что сумма подпространств  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$  является прямой.

**Пример 27.** Рассмотрим пространство  $V^3$  и три его подпространства  $V_1 = \langle i \rangle, V_2 = \langle i - j \rangle, V_3 = \langle i + j \rangle$ . Очевидно,  $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$ . Однако сумма  $V_1 + V_2 + V_3$  не является прямой, так как вектор  $i \in V_1 + V_2 + V_3$  имеет два различных представления:  $i = i + 0 + 0$  и  $i = 0 + \frac{1}{2}(i - j) + \frac{1}{2}(i + j)$ .

Обобщение Утверждения 1.2 на случай  $m$  слагаемых дает следующий результат.

**Утверждение 1.3.** *Сумма подпространств  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$  векторного пространства  $V$  является прямой тогда и только тогда, когда*

$$V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) = \{0\}$$

для любого  $i = \overline{1, m-1}$ .

*Доказательство.* Пусть сумма  $V_1 + \dots + V_m$  — прямая. Предположим, что для некоторого  $i$  существует ненулевой вектор

$$v \in V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) \subset V_1 + V_2 + \dots + V_m.$$

Тогда имеются два различных представления этого вектора:

$$v = v + 0, \quad v \in V_i, \quad 0 \in V_{i+1} + \dots + V_m$$

и

$$v = 0 + v, \quad 0 \in V_i, \quad v \in V_{i+1} + \dots + V_m,$$

что противоречит определению прямой суммы.

Обратно, пусть  $V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) = \{0\}$  для любого  $i = \overline{1, m-1}$ , но сумма  $V_1 + \dots + V_m$  не является прямой. Тогда для некоторого вектора  $v \in V_1 + \dots + V_m$  существуют два различных разложения

$$v = u_1 + \dots + u_m, \quad u_i \in V_i$$

и

$$v = w_1 + \dots + w_m, \quad w_i \in V_i.$$

Откуда

$$u_1 + \dots + u_m = w_1 + \dots + w_m.$$

Переносим члены в левую часть и группируя, получим

$$v_1 + \dots + v_m = 0,$$

где  $v_i = u_i - w_i \in V_i$ , причем не все слагаемые равны нулю. Пусть  $v_i$  — первое ненулевое слагаемое. Тогда

$$V_i \ni v_i = -v_{i+1} - \dots - v_m \in V_{i+1} + \dots + V_m,$$

что противоречит тому, что  $V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) = \{0\}$ . ■

**Замечание.** Часто используется другое, формально более сильное, однако эквивалентное, условие: пересечение каждого подпространства  $V_i$  с суммой всех остальных равно нулю.

**Пример 28.** Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис векторного пространства  $V$ . Тогда

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle.$$

Подчеркнем, что проекция вектора на подпространство  $V_i$  зависит не только от этого подпространства, но и от остальных слагаемых разложения  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$ .

**ЗАДАЧА.** Приведите пример, подтверждающий это высказывание.

Нашей дальнейшей целью будет доказательство следующей важной теоремы.

**Теорема 1.6.** Для любых двух подпространств  $U$  и  $W$  конечномерного векторного пространства  $V$  справедлива формула

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \quad (1.2)$$

Формула (1.2) называется **формулой Грассмана**.

*Доказательство.* Мы воспользуемся Теоремой 1.3 о том, что всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства можно дополнить

до базиса этого пространства. Выберем базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$  в подпространстве  $U \cap W$  и дополним его векторами  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_l\}$  до базиса подпространства  $U$  и векторами  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$  до базиса подпространства  $W$ . Для доказательства формулы достаточно показать, что  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  — базис суммы  $U + W$  подпространств  $U$  и  $W$ .

Любой вектор  $v$  из суммы  $U + W$  есть  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ . Вектор  $u$  выражается через базис  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$  подпространства  $U$ , вектор  $w$  — через базис  $\mathcal{E} \cup \mathcal{G}$  подпространства  $W$ . Поэтому  $u + w$  выражается через систему векторов  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ , которая в свою очередь принадлежит сумме  $U + W$ . Значит,  $U + W$  равно линейной оболочке  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ .

Остается показать, что система  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  линейно независима. Предположим противное. Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов из системы  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ , равная нулю. Группируя в ней слагаемые, получим

$$a + b + c = 0, \quad \text{где } a \in \langle \mathcal{E} \rangle, \quad b \in \langle \mathcal{F} \rangle, \quad c \in \langle \mathcal{G} \rangle.$$

С одной стороны, имеем

$$b = -a - c \in \langle \mathcal{E}, \mathcal{G} \rangle = W,$$

с другой стороны,

$$b \in \langle \mathcal{F} \rangle \subset U,$$

таким образом,  $b \in U \cap W = \langle \mathcal{E} \rangle$ . Однако система  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$  линейно независима, так что  $\langle \mathcal{E} \rangle \cap \langle \mathcal{F} \rangle = \{0\}$ . Отсюда

$$b = 0.$$

Остается равенство

$$a + c = 0,$$

из которого вытекает

$$a = 0 \text{ и } c = 0$$

в силу линейной независимости множества  $\mathcal{E} \cup \mathcal{G}$ . Линейная независимость системы  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  доказана. Тем самым доказана и формула Грассмана. ■

Для трех подпространств аналогичная формула неверна.

**ЗАДАЧА.** Приведите пример векторного пространства  $V$  и его трех подпространств  $V_1, V_2, V_3$ , для которых

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2 + V_3) \neq \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_2) - \\ - \dim(V_1 \cap V_3) - \dim(V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3). \end{aligned}$$

**Следствие 1.1.** Сумма двух подпространств  $U$  и  $W$  конечномерного векторного пространства  $V$  является прямой тогда и только тогда, когда

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Из следствия 1.1 индукцией по количеству слагаемых в прямой сумме  $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  легко вытекает также следующая формула:

$$\dim(V_1 \oplus \dots \oplus V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m.$$

# Глава 2. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

## 2.1. Линейные функции

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ . Одновременно с  $V$  часто рассматривают другое, тесно связанное с ним пространство, так называемое сопряженное пространство. Для того чтобы сформулировать определение сопряженного пространства, нам понадобится определение линейной функции.

**Определение 2.1.** *Линейной функцией* (или *линейной формой*) называется отображение  $\varphi : V \rightarrow F$ , обладающее свойствами:

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  для любых  $x, y \in V$ ;
- 2)  $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$  для любых  $\lambda \in F, x \in V$ .

**Пример 1.** В пространстве геометрических векторов  $V^3$  отображение

$$\varphi(x) = (x, a),$$

где  $a \in V^3$  — некоторый фиксированный вектор, является линейной функцией, так как скалярное произведение линейно по первому аргументу.

**Пример 2.** В пространстве  $C[a, b]$ , векторами которого являются непрерывные функции  $f(x)$ , заданные на отрезке  $[a, b]$ , отображение

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

является линейной функцией. Действительно, аксиома 1) линейной функции означает, что интеграл суммы равен сумме интегралов, а аксиома 2) означает, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

**Пример 3.** В пространстве  $C[a, b]$  отображение

$$\varphi(f) = f(x_0),$$

где  $x_0$  — произвольное фиксированное число из отрезка  $[a, b]$ , является линейной функцией. Проверьте это!

**Пример 4.** Из свойств производных следует, что отображение

$$\varphi(f) = f'(x_0) \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

является линейной функцией на векторном пространстве  $C'(\mathbb{R})$  дифференцируемых функций на вещественной прямой.

**Пример 5.** *Следом* квадратной матрицы называется сумма ее диагональных элементов. След матрицы  $A \in M_n(F)$  обозначается через  $\text{tr } A$ . Отображение

$$\varphi(A) = \text{tr } A$$

является линейной функцией на пространстве  $M_n(F)$  квадратных матриц. Проверьте это!

Отметим, что определитель также является функцией на  $M_n(F)$ , но эта функция не является линейной, так как  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ .

Пример 6. В пространстве  $F^n$  строк длины  $n$  отображение ( $i$ -я проекция)

$$\varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$$

является линейной функцией.

Множество всех функций на пространстве  $V$  со значениями в поле  $F$  образует векторное пространство над  $F$  относительно операций обычного поточечного сложения функций и умножения функции на число:

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v),$$

$$(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v),$$

где  $\varphi, \psi$  — произвольные функции на  $V$ ,  $v$  — произвольный вектор из  $V$ , а  $\lambda$  — произвольное число из  $F$ .

Множество всех линейных функций образует подпространство в этом векторном пространстве, так как сумма линейных функций и произведение линейной функции на число есть снова линейная функция.

**Определение 2.2.** Пространство всех линейных функций на  $V$  называется *сопряженным пространством* по отношению к  $V$  и обозначается через  $V^*$ .

Рассмотрим  $n$ -мерное пространство  $V$ . Выберем в этом пространстве произвольный базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Значение линейной функции  $\varphi \in V^*$  на векторе  $x \in V$  может быть выражено через координаты этого вектора  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n. \quad (2.1)$$

Числа  $a_1 = \varphi(e_1), \dots, a_n = \varphi(e_n)$  не зависят от вектора  $x$ , а определяются только функцией  $\varphi$  и базисом  $\mathcal{E}$ . Мы доказали следующее

**Утверждение 2.1.** Каждая линейная функция на  $n$ -мерном векторном пространстве в произвольном базисе  $\mathcal{E}$  задается линейным однородным многочленом

$$\varphi(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

от координат вектора в этом базисе. Коэффициенты многочлена  $a_1, \dots, a_n$  равны значениям функции на базисных векторах.

Значения функции  $\varphi$  на векторах базиса  $\mathcal{E}$  удобно называть *коэффициентами функции  $\varphi$  в базисе  $\mathcal{E}$* .

Как это ясно из формулы (2.1), при заданном базисе  $\mathcal{E}$  всяким  $n$  числам  $a_1, \dots, a_n$  отвечает линейная функция, притом только одна. Нетрудно проверить также, что если  $a_1, \dots, a_n$  — коэффициенты линейной функции  $\varphi$  в базисе  $\mathcal{E}$ , а  $b_1, \dots, b_n$  — коэффициенты линейной функции  $\psi$  в этом же базисе, то  $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$  — коэффициенты суммы  $\varphi + \psi$ , а  $\lambda a_1, \dots, \lambda a_n$  — коэффициенты  $\lambda\varphi$ , где  $\lambda \in F$ . Отсюда следует, что  $V^*$  изоморфно пространству  $F^n$  строк длины  $n$ . Из этого получаем два утверждения:

**Утверждение 2.2.** Для любого конечномерного векторного пространства  $V$  имеем  $\dim V = \dim V^*$ .

**Утверждение 2.3.** Для любого конечномерного векторного пространства  $V$  имеем  $V \cong V^*$ .

Отметим, что если  $V$  бесконечномерно, то  $V$  и  $V^*$  не являются изоморфными.

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис пространства  $V$ . Определим систему функций  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ , полагая

$$\varepsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

или, используя символ Кронекера,

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i,$$

или, иначе, строка коэффициентов функции  $\varepsilon^i$  есть  $i$ -я строка единичной матрицы. Отсюда легко следует, что функции  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  линейно независимы. Так как пространство  $V^*$   $n$ -мерно, эти функции составляют в нем базис.

**Определение 2.3.** Базис  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  в  $V^*$ , определяемый формулой  $\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i$ , называется **сопряженным** (или **взаимным**) по отношению к базису  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ .

Имея в  $V$  и  $V^*$  сопряженные базисы, легко вычислить координаты любого вектора. Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис в  $V$ ,  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  — сопряженный базис относительно  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Для произвольного вектора  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$  верно, что

$$\varepsilon^i(x) = \varepsilon^i(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varepsilon^i(e_1) + \dots + x_n \varepsilon^i(e_n) = x_i.$$

Следовательно, координаты  $x_i$  вектора  $x$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  вычисляются по формуле

$$x_i = \varepsilon^i(x)$$

и

$$x = \varepsilon^1(x)e_1 + \dots + \varepsilon^n(x)e_n.$$

Аналогично для произвольной линейной функции  $\varphi = a_1 \varepsilon^1 + \dots + a_n \varepsilon^n \in V^*$  верно, что

$$\varphi(e_i) = a_1 \varepsilon^1(e_i) + \dots + a_n \varepsilon^n(e_i) = a_i.$$

Следовательно координаты  $a_i$  вектора  $\varphi \in V^*$  в базисе  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  вычисляются по формуле

$$a_i = \varphi(e_i)$$

и

$$\varphi = \varphi(e_1)\varepsilon^1 + \dots + \varphi(e_n)\varepsilon^n.$$

Отметим, что коэффициенты линейной функции  $\varphi$  в базисе  $\mathcal{E}$  совпадают с ее координатами в базисе, сопряженном к  $\mathcal{E}$ .

## 2.2. Взаимозаменяемость $V$ и $V^*$

В предыдущем изложении  $V$  и  $V^*$  играли различную роль. Мы покажем, что они совершенно равноправны, т.е. что все теоремы останутся справедливыми, если мы поменяем  $V$  и  $V^*$  ролями.

Пространство  $V^*$  — такое же векторное пространство, как и любое другое, и, следовательно, имеет сопряженное пространство  $V^{**} = (V^*)^*$ , элементы которого — линейные функции на  $V^*$ . Покажем, что второе сопряженное пространство  $V^{**} = (V^*)^*$  оказывается естественно изоморфным пространству  $V$ .

Для любого вектора  $x \in V$  рассмотрим функцию  $f_x$  на  $V^*$ , определенную по формуле

$$f_x(\varphi) = \varphi(x), \quad \varphi \in V^*.$$

Из определения операций в  $V^*$  следует, что  $f_x$  — линейная функция.

**Утверждение 2.4.** *Отображение  $\Phi : V \rightarrow V^{**}$ , переводящее каждый вектор  $x \in V$  в линейную функцию  $f_x \in V^{**}$ , является изоморфизмом конечномерного пространства  $V$  и пространства  $V^{**}$ .*

*Доказательство.* 1) Докажем, что  $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$  для любых векторов  $x, y \in V$ . Так как  $\Phi(x+y) = f_{x+y}$ ,  $\Phi(x) + \Phi(y) = f_x + f_y$ , требуется доказать, что линейная функция  $f_{x+y}$  равна линейной функции  $f_x + f_y$ . Для любого вектора  $\varphi \in V^*$  имеем

$$f_{x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = f_x(\varphi) + f_y(\varphi) = (f_x + f_y)(\varphi).$$

Откуда получаем равенство  $f_{x+y} = f_x + f_y$ , так как две функции равны тогда и только тогда, когда равны значения этих функций для каждого аргумента.

Равенство  $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$  для любых  $x \in V, \lambda \in F$  доказывается аналогично.

2) Остается проверить, что отображение  $\Phi$  биективно. Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — некоторый базис пространства  $V$  и  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  — сопряженный базис пространства  $V^*$ . Тогда

$$f_{e_i}(\varepsilon^j) = \varepsilon^j(e_i) = \delta_i^j,$$

так что  $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\}$  — базис пространства  $V^{**}$ , сопряженный базису  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ .

Так как

$$\Phi(x) = \Phi(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1\Phi(e_1) + \dots + x_n\Phi(e_n) = x_1f_{e_1} + \dots + x_nf_{e_n} = f_x,$$

отображение  $\Phi$  переводит вектор  $x$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  в вектор  $f_x$  с такими же координатами в базисе  $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\}$  пространства  $V^{**}$ . Следовательно, оно биективно. ■

Таким образом, можно отождествить пространства  $V$  и  $V^{**}$  посредством указанного изоморфизма, т.е. рассматривать каждый вектор  $x \in V$  одновременно и как линейную функцию на  $V^*$  и писать  $x(\varphi)$  вместо  $f_x(\varphi)$ . При таком соглашении пространства  $V$  и  $V^*$  будут играть совершенно симметричную роль.

**Следствие 2.1.** *Всякий базис пространства  $V^*$  сопряжен некоторому базису пространства  $V$ .*

Часто вместо  $\varphi(x)$  и  $x(\varphi)$  пишут  $\langle \varphi | x \rangle$ , желая подчеркнуть равноправие векторов и функций. Фиксация  $\varphi$  приводит к линейной функции на векторах, фиксация  $x$  приводит к линейной функции на линейных функциях.

**Замечание 2.1.** Если пространство  $V$  бесконечномерно, то пространство  $V^*$  и, тем более,  $V^{**}$  имеет бóльшую размерность.

### 2.3. Преобразование координат в $V^*$

**Утверждение 2.5.** *Пусть даны два базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  векторного пространства  $V$ . Рассмотрим базисы  $\mathcal{F} = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  и  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{\varepsilon}^1, \dots, \tilde{\varepsilon}^n\}$  пространства  $V^*$ , сопряженные к  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  соответственно. Если  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}} = T = (t_{i,j})$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ , то матрица перехода  $T_{\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}}$  от базиса  $\tilde{\mathcal{F}}$  к базису  $\mathcal{F}$  равняется матрице  $T^t$ .*

*Доказательство.* Обозначим через  $S = (s_{i,j})$  — матрицу перехода  $T_{\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}}$  от базиса  $\mathcal{F}$  к базису  $\tilde{\mathcal{F}}$ , а через  $s_{i,j}^t$  — элементы матрицы  $S^t$ , т.е.  $s_{i,j}^t = s_{j,i}$ . Тогда для каждых  $k, l = \overline{1, n}$

$$\tilde{\varepsilon}^k = \sum_{i=1}^n s_{i,k} \varepsilon^i,$$

$$\tilde{e}_l = \sum_{j=1}^n t_{j,l} e_j.$$

### Содержание

Используя равенства  $\tilde{\varepsilon}^k(\tilde{e}_l) = \delta_l^k$  и  $\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i$ , получаем

$$\delta_l^k = \sum_{i=1}^n s_{i,k} \varepsilon^i \left( \sum_{j=1}^n t_{j,l} e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n s_{i,k} t_{j,l} \varepsilon^i(e_j) = \sum_{i=1}^n s_{i,k} t_{i,l} = \sum_{i=1}^n s_{k,i}^t t_{i,l}.$$

Следовательно,  $S^t T = E$ . А значит,  $S^{-1} = T^t$ . Откуда получаем требуемое, так как  $T_{\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}} = S^{-1}$ . ■

## 2.4. Подпространства и линейные функции.

**Определение 2.4.** Пусть на векторном пространстве  $V$  определена линейная функция  $\varphi$ . Назовем **ядром** линейной функции  $\varphi$  множество

$$\text{Кер } \varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}.$$

**Утверждение 2.6.** Ядро любой линейной функции  $\varphi$  является подпространством в векторном пространстве  $V$  над полем  $F$ .

*Доказательство.* Для начала, отметим, что  $\text{Кер } \varphi$  не пусто, так как

$$0 \in \text{Кер } \varphi.$$

Далее, если  $u, v \in \text{Кер } \varphi$ , то  $\varphi(u) = 0$  и  $\varphi(v) = 0$ . Поэтому

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0 + 0 = 0,$$

что означает  $u + v \in \text{Кер } \varphi$ .

Если  $\lambda \in F$ ,  $u \in \text{Кер } \varphi$ , то  $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = \lambda 0 = 0$ . Значит,  $\lambda u \in \text{Кер } \varphi$ .

Это доказывает, что  $\text{Кер } \varphi$  является подпространством в  $V$ . ■

Как было доказано в 1-м семестре, множество решений любой системы однородных линейных уравнений с  $n$  неизвестными образует подпространство в пространстве столбцов высоты  $n$  с элементами из поля  $F$ . В следующей теореме мы получим обратное: всякое подпространство является множеством решений некоторой системы однородных линейных уравнений.

**Теорема 2.1.** Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство над полем  $F$ . Тогда

1) всякое подпространство  $U$  пространства  $V$  есть пересечение ядер некоторого конечно множества линейных функций;

2) при фиксированном базисе  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  каждое подпространство  $U$  пространства  $V$  совпадает с множеством векторов, координаты которых являются решениями подходящей однородной системы линейных уравнений.

*Доказательство.* 1) Выберем в подпространстве  $U$  базис  $\{e_1, \dots, e_k\}$ . Дополним этот базис векторами  $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$  до базиса всего пространства  $V$  (используя Теорему 1.3). Пусть  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  — базис, сопряженный к базису  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ . Докажем, что  $U = \text{Кер } \varepsilon^{k+1} \cap \dots \cap \text{Кер } \varepsilon^n$ .

Действительно, возьмем произвольный вектор  $x \in V$  и выразим его через базис  $\mathcal{E}$  в виде:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n.$$

Учитывая, что  $x_i = \varepsilon^i(x)$ , получаем

$$x \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = 0; \\ \dots \\ x_n = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon^{k+1}(x) = 0; \\ \dots \\ \varepsilon^n(x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \text{Кер } \varepsilon^{k+1} \cap \dots \cap \text{Кер } \varepsilon^n,$$

что и требовалось.

2) Допустим, что  $T$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ . Если  $x = \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \dots + \tilde{x}_n\tilde{e}_n$ , то по формуле (1.1) преобразования координат вектора при переходе к другому базису имеем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\check{T}$  матрицу, состоящую из последних  $n - k$  строк матрицы  $T$ . Так как

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \check{T} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

и

$$x \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = 0; \\ \dots \\ x_n = 0; \end{cases}$$

получаем, что

$$x \in U \Leftrightarrow \check{T} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. координаты  $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$  векторов  $x \in U$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$  являются решением однородной системы линейных уравнений с матрицей  $\check{T}$ . ■

# Часть II

## Евклидовы пространства. Билинейные и квадратичные функции

### Глава 3. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Векторное пространство существенно отличается от пространства геометрических векторов тем, что в векторном пространстве не определены понятия длины вектора и угла между векторами. В пространстве геометрических векторов, используя длину вектора и угол, определялось скалярное произведение. Здесь удобнее поступить наоборот. Мы аксиоматически определим операцию скалярного произведения, а длину и угол определим с ее помощью. Определение скалярного произведения для векторного пространства над  $\mathbb{R}$  и для векторного пространства над  $\mathbb{C}$  формулируется различно. В этом и следующем параграфе будем рассматривать вещественное пространство.

#### 3.1. Скалярное произведение

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$ .

Определение 3.1. Будем говорить, что в  $V$  определено *скалярное произведение*, если любой паре векторов  $x, y \in V$  поставлено в соответствие действительное число (обозначаемое  $(x, y)$ ), причем это соответствие удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам):

- 1)  $(x, y) = (y, x)$ ;
- 2)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;
- 4)  $(x, x) > 0$  для всех  $x \neq 0$ .

Очевидны простейшие следствия из перечисленных аксиом. Так как

$$(x, \lambda y) = (\lambda y, x) = \lambda(y, x) = \lambda(x, y),$$

имеем

$$(x, \lambda y) = \lambda(x, y).$$

Аналогично доказывается

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z).$$

Если  $(x, x) = 0$  для некоторого  $x \in V$ , то  $x = 0$  в силу аксиомы 4). Если же  $x = 0$ , то  $(x, x) = 0$ , так как  $(0, 0) = (0, 0 + 0) = (0, 0) + (0, 0)$ . Отсюда получаем, что  $(x, x) \geq 0$  для любого  $x \in V$ , и обращается в нуль тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

Определение 3.2. Векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , в котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым пространством*.

Пример 1. В  $V^2$  (или  $V^3$ ) скалярное произведение двух геометрических векторов определено как произведение их длин на косинус угла между ними.

Пример 2. В пространстве  $\mathbb{R}^n$  строк длины  $n$  скалярное произведение двух арифметических векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  можно определить по следующей формуле

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Пример 3. В пространстве  $C[a, b]$  функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Можно проверить, что при таком определении скалярного произведения аксиомы 1) - 4) выполняются.

Определим с помощью введенного понятия скалярного произведения длину вектора и угол между векторами таким образом, чтобы в случае геометрических векторов они совпадали с обычной длиной и обычным углом.

Определение 3.3. *Длиной*  $|x|$  вектора  $x$  в евклидовом пространстве  $V$  называется число

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

*Углом* между ненулевыми векторами  $x$  и  $y$  называется число  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) такое, что

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}. \quad (3.1)$$

В силу аксиомы 4) скалярного произведения длина вектора — вещественное неотрицательное число, причем она равна нулю тогда и только тогда, когда вектор нулевой. С определением угла дело обстоит несколько сложнее. Для того чтобы можно было определить  $\varphi$  из равенства (3.1), нужно доказать, что

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x||y|} \leq 1$$

или, что то же самое, что

$$\frac{(x, y)^2}{|x|^2|y|^2} \leq 1.$$

Последнее неравенство выполняется в силу следующего утверждения.

**Утверждение 3.1.** *Для любых векторов  $x, y$  евклидова пространства*

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y), \quad (3.2)$$

*причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $x$  и  $y$  пропорциональны.*

Неравенство (3.2) называется **неравенством Коши—Буняковского**.

*Доказательство.* Рассмотрим вектор  $x - ty$ , где  $t$  — произвольное действительное число. Согласно аксиоме 4) скалярного произведения

$$(x - ty, x - ty) \geq 0,$$

т.е. для любого  $t$

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0.$$

Так как стоящий слева квадратный относительно  $t$  трехчлен принимает лишь неотрицательные значения, дискриминант  $D$  уравнения

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) = 0$$

не может быть положительным, т.е.

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0,$$

что и доказывает неравенство (3.2).

Если  $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) = 0$ , т.е.  $D = 0$ , то для некоторого действительного числа  $t$  верно  $t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) = 0$ , т.е.  $(x - ty, x - ty) = 0$ , что возможно только при  $x = ty$ . Обратно, если  $x$  и  $y$  пропорциональны, то не ограничивая общности, можно считать, что  $x = ty$  и

$$(x, y)^2 = (ty, y)^2 = t^2(y, y)^2 = t^2(y, y)(y, y) = (ty, ty)(y, y) = (x, x)(y, y).$$

■

Рассмотрим, как выглядит неравенство Коши—Буняковского в приведенных выше примерах евклидовых пространств.

**Пример 4.** В  $V^2$  ( $V^3$ ) неравенство (3.2) не означает ничего нового.

**Пример 5.** В  $\mathbb{R}^n$  со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

имеем

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (y, y) = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Поэтому неравенство (3.2) имеет здесь вид

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

**Пример 6.** В  $C[a, b]$  со скалярным произведением, заданным интегралом

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

неравенство (3.2) имеет вид

$$\left( \int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt.$$

Это неравенство играет важную роль в математическом анализе.

Приведем пример неравенства, являющегося следствием неравенства Коши — Буняковского.

**Утверждение 3.2.** Для любых векторов  $x$  и  $y$  в евклидовом пространстве имеет место неравенство, называемое **неравенством треугольника**,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

## Содержание

*Доказательство.*

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y).$$

Так как в силу неравенства Коши—Буняковского  $2(x, y) \leq 2|x||y|$ , то

$$|x + y|^2 \leq (x, x) + 2|x||y| + (y, y) \leq (|x| + |y|)^2,$$

т.е.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , что и требовалось доказать. ■

В евклидовом пространстве можно измерять и объемы параллелепипедов, ребрами которых является произвольный набор линейно независимых векторов  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . Для этого следует рассмотреть матрицу порядка  $k$

$$G = G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix},$$

называемую **матрицей Грама**. Заметим, что матрица Грама является симметрической.

**Утверждение 3.3.** Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — произвольные векторы евклидова пространства. Тогда  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0$  тогда и только тогда, когда  $\{v_1, \dots, v_k\}$  — линейно независимая система. В противном случае  $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$ .

Это утверждение будет доказано в параграфе 5. Пока заметим, что из этого утверждения следует, что для любых векторов  $v_1, \dots, v_k$  евклидова пространства верно неравенство  $\det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ . Причем неравенство Коши—Буняковского — частный случай этого утверждения при  $k = 2$ :

$$\det \begin{pmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{pmatrix} = (x, x)(y, y) - (x, y)^2 \geq 0.$$

**Пример 7.** В пространстве  $V^3$  геометрических векторов (или на плоскости  $V^2$ ) определитель

$$\det G(x, y) = \det \begin{pmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{pmatrix}$$

имеет следующий геометрический смысл:  $\det G(x, y)$  равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах  $x$  и  $y$ . В самом деле, по определению скалярного произведения  $(x, y) = |x||y| \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $x$  и  $y$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \det G(x, y) &= (x, x)(y, y) - (x, y)^2 = |x|^2|y|^2 - |x|^2|y|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= |x|^2|y|^2(1 - \cos^2 \varphi) = |x|^2|y|^2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

что равно квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах  $x$  и  $y$ .

**Пример 8.** В пространстве  $V^3$  геометрических векторов объем параллелепипеда, построенного на векторах  $x, y, z$ , как показано в аналитической геометрии (в 1-ом семестре), равен абсолютной величине определителя

$$v = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix},$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты векторов  $x, y, z$  в ортонормированном базисе. Вычислим квадрат этого определителя, используя то, что определитель транспонированной матрицы равен

определителю самой матрицы, и то, что произведение определителей матриц равно определителю произведения матриц:

$$\begin{aligned}
 v^2 &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 \\ y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 \\ z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 & z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} (x, x) & (x, y) & (x, z) \\ (y, x) & (y, y) & (y, z) \\ (z, x) & (z, y) & (z, z) \end{pmatrix} = \det G(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Таким образом, определитель матрицы Грама векторов  $x, y, z$  равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Из этих двух примеров видно, что **объемом**  $k$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $v_1, \dots, v_k$  произвольного евклидова пространства, естественно называть число  $\sqrt{\det G(v_1, \dots, v_k)}$ .

**Утверждение 3.4.** Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис евклидова пространства  $V$ ,  $x, y$  — произвольные векторы в  $V$ . Через

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

обозначим столбцы координат векторов соответственно  $x$  и  $y$  в базисе  $\mathcal{E}$ . Тогда

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{i,j} = X^t G Y,$$

где  $g_{i,j} = (e_i, e_j)$  — элементы матрицы Грама  $G = G(e_1, \dots, e_n)$ .

*Доказательство.* Имеем  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ . Используя аксиомы скалярного произведения, получаем

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{i,j} = X^t G Y.$$

■

## 3.2. Ортогональные базисы

**Определение 3.4.** Векторы  $x$  и  $y$  евклидова пространства  $V$  называются **ортогональными**, если  $(x, y) = 0$ .

Таким образом,  $x$  и  $y$  ортогональны тогда и только тогда, когда либо угол между  $x$  и  $y$  равен  $\frac{\pi}{2}$ , либо один из этих векторов нулевой.

В частности, если  $x$  и  $y$  ортогональны, то  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$  (теорема Пифагора). Действительно,

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2.$$

Эту теорему можно обобщить: если  $x, y, z, \dots$  — конечное число попарно ортогональных векторов, то  $|x + y + z + \dots|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \dots$

Полезно следующее наблюдение:

**Утверждение 3.5.** Любая ортогональная система  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ненулевых векторов линейно независима.

*Доказательство.* Допустим, существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0.$$

Для каждого  $i = \overline{1, k}$  скалярно умножим обе части этого равенства на  $v_i$ . Получим  $\lambda_i (v_i, v_i) = 0$ . Так как  $v_i$  — ненулевой вектор,  $(v_i, v_i) \neq 0$ . Значит,  $\lambda_i = 0$ . ■

В векторном пространстве у нас нет оснований предпочитать один базис другому — там все базисы равноправны. В евклидовом пространстве существуют наиболее удобные базисы, а именно ортонормированные базисы. Они играют здесь ту же роль, что и прямоугольная система координат в аналитической геометрии.

**Определение 3.5.** Базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  евклидова пространства называется **ортонормальным**, если векторы базиса попарно ортогональны.

Базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  евклидова пространства называется **ортонормированным**, если он является ортонормальным и каждый вектор базиса имеет единичную длину, т.е.

$$(e_i, e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Из утверждения 3.5 следует, что в  $n$ -мерном евклидовом пространстве любые  $n$  ненулевых попарно ортогональных векторов образуют базис.

Непосредственно проверяется следующее

**Утверждение 3.6.** Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — ортонормированный базис евклидова пространства  $V$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in V$ . Тогда

1) матрица Грамма  $G(e_1, \dots, e_n)$  базисных векторов является единичной матрицей;

$$2) (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = X^t Y, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

3)  $x_i = (x, e_i)$  (координату  $x_i$  вектора  $x$  естественно называть проекцией  $x$  на  $e_i$ ).

Чтобы доказать существование ортогональных базисов, воспользуемся так называемым **процессом ортогонализации Грама—Шмидта**.

Процесс ортогонализации Грама—Шмидта позволяет по любой линейно независимой системе векторов  $\{f_1, \dots, f_k\}$  построить такую ортогональную систему  $\{e_1, \dots, e_k\}$ , что для любого  $i$  имеем:  $\langle f_1, \dots, f_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ . Сначала, положим

$$e_1 = f_1.$$

Применяя индукцию, будем считать, что  $\{e_1, \dots, e_m\}$  уже построены,

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при } 1 \leq i, j \leq m, \quad i \neq j.$$

Положим

$$e_{m+1} = f_{m+1} - \frac{(f_{m+1}, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 - \dots - \frac{(f_{m+1}, e_m)}{(e_m, e_m)}e_m.$$

Непосредственная проверка показывает, что новый вектор  $e_{m+1}$  ортогонален к предыдущим, а также выполняется  $\langle f_1, \dots, f_{m+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{m+1} \rangle$ . В силу линейной независимости системы  $\{f_1, \dots, f_k\}$  мы видим, что  $e_{m+1}$  — ненулевой вектор, так что

$$(e_{m+1}, e_{m+1}) \neq 0$$

и процесс может быть продолжен далее и доведен до конца с получением ортогональной системы  $\{e_1, \dots, e_k\}$ .

Чтобы получить не просто ортогональную, но ортонормированную систему векторов  $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m\}$  с теми же свойствами достаточно нормировать каждый вектор  $e_i$ , т.е. поделить каждый вектор  $e_i$  на его длину:  $\tilde{e}_i = \frac{1}{|e_i|}e_i$ .

**Теорема 3.1.** *Во всяком  $n$ -мерном евклидовом пространстве существует ортогональный базис.*

*Доказательство.* По определению  $n$ -мерного пространства в нем существует какой-то базис  $\{f_1, \dots, f_n\}$ . С помощью процесса ортогонализации Грама—Шмадта из него можно построить ортогональный базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , что и доказывает теорему. ■

Нетрудно видеть, что таких базисов существует много. Действительно, уже из данного базиса  $\{f_1, \dots, f_n\}$  можно построить разные ортогональные базисы, если начинать построение с разных векторов  $f_i$ . Позднее мы рассмотрим вопрос о связи между различными ортонормированными базисами.

Непосредственно из процесса ортогонализации Грама—Шмадта получаем

**Утверждение 3.7.** *Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — ортогональный базис, полученный из базиса  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  с помощью процесса ортогонализации Грама—Шмадта, а  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  — ортонормированный базис, полученный из базиса  $\mathcal{E}$  делением каждого вектора  $\mathcal{E}$  на его длину. Тогда матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\mathcal{F}$  будет верхнетреугольной с единицами на диагонали, а матрица перехода от базиса  $\tilde{\mathcal{E}}$  к базису  $\mathcal{F}$  будет верхнетреугольной с положительными диагональными элементами.*

**Пример 9.** Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}_n[x]$  многочленов степени  $\leq n$  со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Возьмем базис  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Процесс ортогонализации приведет к последовательности многочленов  $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x, \dots$ . Эти многочлены с точностью до множителей совпадают с многочленами

$$p_0(x) = 1, \quad p_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad (k = \overline{1, n}),$$

которые называются многочленами Лежандра. Многочлены Лежандра образуют ортогональный, но не ортонормированный базис в  $\mathbb{R}_n[x]$ . Умножая каждый из этих многочленов на соответствующий множитель, мы можем построить ортонормированный базис. Пусть  $r_0(x), r_1(x), \dots, r_n(x)$  — нормированные многочлены Лежандра нулевой, первой,  $\dots$ ,  $n$ -й степени. Так как они образуют ортонормированный базис в  $\mathbb{R}_n[x]$ , произвольный многочлен  $q(x)$  из  $\mathbb{R}_n[x]$  представим в виде

$$q(x) = c_0 r_0(x) + c_1 r_1(x) + \dots + c_n r_n(x),$$

где коэффициенты  $c_i$ , как это следует из утверждения 3.6 п.3, вычисляются по формуле

$$c_i = (q(x), r_i(x)) = \int_{-1}^1 q(x)r_i(x)dx.$$

Пример 10. Рассмотрим на интервале  $(0, 2\pi)$  систему функций

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx. \quad (3.3)$$

Их линейная комбинация

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

называется тригонометрическим многочленом  $n$ -го порядка. Совокупность тригонометрических многочленов  $n$ -го порядка образует  $(2n + 1)$ -мерное пространство  $\mathcal{R}_n$ . Определим в  $\mathcal{R}_n$  скалярное произведение, как обычно, т.е. положим

$$(P(x), Q(x)) = \int_0^{2\pi} P(x)Q(x)dx.$$

Легко проверить, что система (3.3) будет ортогональным базисом. Действительно,

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lxdx = 0, \quad \text{если } k \neq l,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos lxdx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lxdx = 0, \quad \text{если } k \neq l.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 kx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 kx = \pi, \quad \text{если } k \neq 0,$$

то функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (3.4)$$

образуют в  $\mathcal{R}_n$  ортонормированный базис.

### 3.3. Матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому

В силу особой важности ортонормированных базисов для евклидова пространства полезно указать вид матриц перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Пусть даны два ортонормированных базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ . И пусть  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}} = (t_{i,j})$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\mathcal{F}$ . Имеем,

$$f_i = \sum_{k=1}^n t_{k,i} e_k, \quad f_j = \sum_{l=1}^n t_{l,j} e_l$$

для любой пары индексов  $i, j = \overline{1, n}$ . Вычисляя скалярное произведение в ортонормированном базисе  $\mathcal{E}$  (утверждение 3.6 п.2), получаем

$$(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^n t_{k,i} t_{k,j}.$$

Кроме того, так как  $\mathcal{F}$  — ортонормированный базис, должно выполняться

$$(f_i, f_j) = \delta_i^j.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n t_{k,i} t_{k,j} = \delta_i^j.$$

Это равенство говорит о том, что столбцы матрицы  $T$  образуют ортонормированный базис в пространстве  $\mathbb{R}^n$  последовательностей длины  $n$ . На языке матриц имеем  $T^t T = E$ . Отсюда  $T^t = T^{-1}$ , так что и  $T T^t = E$ . Последнее равенство показывает, что система строк матрицы  $T$  тоже является ортонормированным базисом в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 3.6.** Матрица  $T$ , удовлетворяющая условию  $T^t T = E$ , называется **ортогональной**.

**Пример 11.** Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

является ортогональной, что можно проверить непосредственно.

Аналогично приведенным выше рассуждениям можно показать, что условие  $T^t T = E$  ортогональности матрицы  $T$  эквивалентно любому из следующих условий:

- 1)  $\sum_{k=1}^n t_{k,i} t_{k,j} = \delta_i^j$  для всех  $i, j$ ;
- 2)  $\sum_{k=1}^n t_{i,k} t_{j,k} = \delta_i^j$  для всех  $i, j$ ;
- 3)  $T^t = T^{-1}$ ;
- 4)  $T T^t = E$ .

**Свойства ортогональных матриц:**

- 1) если  $S$  — ортогональная матрица, то матрица  $S^{-1}$ , обратная к матрице  $S$ , является ортогональной матрицей;
- 2) если  $S_1, S_2$  — ортогональные матрицы, то произведение  $S_1 S_2$  матриц  $S_1$  и  $S_2$  является ортогональной матрицей;
- 3) если  $S$  — ортогональная матрица, то  $\det S = \pm 1$  (но не наоборот!);
- 4) множество  $O_n$  ортогональных матриц образует подгруппу в группе  $GL_n(\mathbb{R})$  всех невырожденных квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Из свойств операций над матрицами получаем следующее.

- 1) Так как  $S$  — ортогональная матрица, т.е.  $S S^t = E$ , то

$$(S^{-1})^t S^{-1} = (S^t)^{-1} S^{-1} = (S S^t)^{-1} = E^{-1} = E.$$

Следовательно,  $S^{-1}$  — ортогональная матрица.

- 2) Так как  $S_1, S_2$  — ортогональные матрицы, т.е.  $S_1^t S_1 = E$  и  $S_2^t S_2 = E$ , получаем, что

$$(S_1 S_2)^t (S_1 S_2) = S_2^t S_1^t S_1 S_2 = S_2^t E S_2 = S_2^t S_2 = E.$$

Следовательно,  $S_1 S_2$  — ортогональная матрица.

3) Так как  $S$  — ортогональная матрица, то  $S^t S = E$ . Посчитаем определитель от правой и левой части этого равенства:

$$\det E = 1$$

и

$$\det S^t S = \det S^t \det S = \det S \det S = (\det S)^2$$

(здесь мы воспользовались тем, что определитель произведения равен произведению определителей и определитель от транспонированной матрицы равен определителю от самой матрицы). Следовательно,  $\det S = \pm 1$ .

4) Множество  $O_n$  образует подгруппу в группе  $GL_n(\mathbb{R})$  в силу первых двух свойств и того, что единичная матрица является ортогональной. ■

**Утверждение 3.8.** *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональна. Наоборот, если матрица  $T$  перехода от базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  к базису  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  является ортогональной и один из базисов — ортонормированный, то и другой — ортонормированный.*

*Доказательство.* Первая часть этого утверждения уже доказана выше.

Для доказательства второй части сперва предположим, что базис  $\mathcal{E}$  — ортонормированный. Так как  $T = (t_{i,j})$  — ортогональная матрица,

$$\sum_{k=1}^n t_{k,i} t_{k,j} = \delta_i^j.$$

Вычислим скалярное произведение с учетом утверждения 3.6 п.2:

$$(f_i, f_j) = \left( \sum_{k=1}^n t_{k,i} e_k, \sum_{l=1}^n t_{l,j} e_l \right) = \sum_{k=1}^n t_{k,i} t_{k,j}.$$

Значит,  $(f_i, f_j) = \delta_i^j$  для любой пары индексов  $i, j$ , т.е.  $\mathcal{F}$  является ортонормированным базисом.

Предположим теперь, что изначально известна ортонормированность базиса  $\mathcal{F}$ . Так как матрица, обратная к ортогональной, сама ортогональна, получаем, что матрица перехода от  $\mathcal{F}$  к  $\mathcal{E}$ , т.е.  $T^{-1}$ , является ортогональной. Это сводит задачу к предыдущему случаю. ■

**Утверждение 3.9 (о QR-разложении).** *Если матрица  $A$  невырождена, то она может быть представлена в виде произведения  $A = QR$ , где  $Q$  — ортогональная, а  $R$  — верхняя треугольная матрица, причем диагональные элементы матрицы  $R$  положительны.*

*Доказательство.* Рассмотрим столбцы матрицы  $A$  как столбцы координат векторов  $f_1, \dots, f_n$  в ортонормированном базисе  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$ . Так как матрица  $A$  невырождена, векторы  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  составляют базис. При этом  $A$  является матрицей  $T_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}}$  перехода от  $\mathcal{G}$  к  $\mathcal{F}$ . Пусть  $\mathcal{E}$  — ортонормированный базис, полученный из базиса  $\mathcal{F}$  с помощью процесса ортогонализации Грама—Шмидта и нормировки. Тогда по утверждению 3.7 матрица  $R = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}}$  перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\mathcal{F}$  является верхней треугольной с положительными элементами на главной диагонали. Кроме того, так как базисы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{G}$  ортонормированы, матрица  $Q = T_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}}$  перехода от  $\mathcal{G}$  к  $\mathcal{E}$  является ортогональной. В силу свойств матриц перехода получаем

$$T_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}} = T_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}},$$

т.е.  $A = QR$ . ■

### 3.4. Ортогональное дополнение

**Определение 3.7.** Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $S$  — некоторое подмножество в  $V$ . **Ортогональным дополнением**  $S^\perp$  к  $S$  называется множество

$$S^\perp = \{x \in V \mid (x, s) = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Для любого  $S \subset V$  ортогональное дополнение  $S^\perp$  является подпространством в  $V$ . Действительно, для любых векторов  $x, y \in S^\perp$  выполняется

$$(x, s) = 0, \quad (y, s) = 0$$

для любого вектора  $s \in S$ . Поэтому

$$(x + y, s) = (x, s) + (y, s) = 0 + 0 = 0,$$

т.е.  $x + y \in S^\perp$ . Также для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(\lambda x, s) = \lambda(x, s) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

т.е.  $\lambda x \in S^\perp$ .

Говорят, что вектор  $x \in V$  ортогонален подпространству  $U \subset V$ , если он ортогонален любому вектору  $u \in U$ . Таким образом, ортогональное дополнение к подпространству  $U$  состоит из всех векторов, ортогональных подпространству  $U$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $\{e_1, \dots, e_k\}$  — некоторый базис в подпространстве  $U$  евклидова пространства  $V$ . Тогда вектор  $x \in V$  ортогонален подпространству  $U$  тогда и только тогда, когда  $(x, e_1) = \dots = (x, e_k) = 0$ .

*Доказательство.* Если  $x$  ортогонален подпространству  $U$ , то он ортогонален всем векторам из  $U$ . В частности,  $x$  ортогонален базисным векторам подпространства  $U$ .

Обратно, пусть  $(x, e_1) = \dots = (x, e_k) = 0$ . Любой вектор  $u \in U$  выражается через базисные векторы:  $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ . Поэтому

$$(x, u) = (x, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) = \lambda_1(x, e_1) + \dots + \lambda_k(x, e_k) = 0.$$

Это означает, что  $x$  ортогонален подпространству  $U$ . ■

**Теорема 3.2.** Для любого подпространства  $U \subset V$  имеет место равенство:

$$V = U \oplus U^\perp.$$

В частности,

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$

и

$$\dim U^\perp = n - \dim U, \quad \text{где } n = \dim V.$$

*Доказательство.* Пусть  $k = \dim U$ . Выберем какой-нибудь базис  $\{f_1, \dots, f_k\}$  в  $U$  и дополним его до базиса  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$  в  $V$  (это возможно по теореме 1.3). Применим к  $\mathcal{F}$  процесс ортогонализации Грама—Шмидта. Тогда получим ортонормированный базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  в  $V$ . Причем начальный отрезок  $\{e_1, \dots, e_k\}$  базиса  $\mathcal{E}$  будет являться базисом в  $U$ , так как процесс ортогонализации Грама—Шмидта таков, что  $\langle f_1, \dots, f_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ .

По лемме 3.1 вектор  $x \in V$  лежит в  $U^\perp$  тогда и только тогда, когда

$$(x, e_1) = \dots = (x, e_k) = 0.$$

Но, согласно утверждению 3.6 в ортонормированном базисе  $\mathcal{E}$  произвольный вектор  $x \in V$  представляется в виде

$$x = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_k)e_k + (x, e_{k+1})e_{k+1} + \dots + (x, e_n)e_n.$$

Следовательно,  $x$  лежит в  $U^\perp$  тогда и только тогда, когда  $x \in \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ . Таким образом,  $U^\perp = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ .

Теперь из того, что  $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ ,  $U^\perp = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис в  $V$ , все утверждения теоремы следуют автоматически. ■

Из теоремы 3.2 следует, что для любого подпространства  $U$  конечномерного евклидова пространства  $V$  любой вектор  $x \in V$  имеет единственное разложение  $x = u + u^\perp$ , где  $u \in U$ ,  $u^\perp \in U^\perp$ . Вектор  $u$  называется **ортогональной проекцией** вектора  $x$  на подпространство  $U$  и обозначается через  $\text{pr}_U x$ ; вектор  $u^\perp$  называется **ортогональной составляющей** вектора  $x$  относительно подпространства  $U$  и обозначается через  $\text{ort}_U x$ .

Если  $\{e_1, \dots, e_k\}$  — ортонормированный базис подпространства  $U$ , то ортогональная проекция  $\text{pr}_U x$  вектора  $x$  может быть найдена по формуле

$$\text{pr}_U x = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_k)e_k.$$

Более общо, если  $\{e_1, \dots, e_k\}$  — ортогональный (но не обязательно ортонормированный) базис подпространства  $U$ , то

$$\text{pr}_U x = \frac{(x, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 + \dots + \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}e_k.$$

При описании процесса ортогонализации Грама—Шмидта для построения ортогональной системы векторов  $\{e_1, \dots, e_n\}$  по произвольной линейно независимой системе векторов  $\{f_1, \dots, f_n\}$  использовалась формула

$$e_{m+1} = f_{m+1} - \frac{(f_{m+1}, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 - \dots - \frac{(f_{m+1}, e_m)}{(e_m, e_m)}e_m.$$

Таким образом

$$e_{m+1} = f_{m+1} - \text{pr}_{U_m} f_{m+1} = \text{ort}_{U_m} f_{m+1},$$

где  $U_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ .

**Утверждение 3.10.** Для любых подпространств  $U, W$   $n$ -мерного евклидова пространства  $V$  справедливы соотношения:

- (i)  $(U^\perp)^\perp = U$ ;
- (ii)  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ ;
- (iii)  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ .

*Доказательство.* (i) Включение  $U \subset (U^\perp)^\perp$  очевидно. В силу совпадения размерностей:  $\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim(U^\perp) = n - (n - \dim U) = \dim U$ , имеет место равенство, что и доказывает (i).

(ii) Для доказательства будем использовать метод двух включений.

Пусть  $x \in (U + W)^\perp$ . Это означает, что  $(x, y) = 0$  для любого  $y \in U + W$ . Так как  $U \subset U + W$ ,  $(x, u) = 0$  для любого  $u \in U$ , т.е.  $x \in U^\perp$ . Так как  $W \subset U + W$ ,  $(x, w) = 0$  для любого  $w \in W$ , т.е.  $x \in W^\perp$ . Следовательно,  $x \in U^\perp \cap W^\perp$ , что доказывает включение  $(U + W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$ .

Теперь пусть  $x \in U^\perp \cap W^\perp$ . Значит,  $x \in U^\perp$ , т.е.  $(x, u) = 0$  для любого  $u \in U$ . Также  $x \in W^\perp$ , т.е.  $(x, w) = 0$  для любого  $w \in W$ . Так как любой вектор  $y \in U + W$  представим в виде  $y = u + w$ ,  $u \in U$ ,  $w \in W$ , имеем  $(x, y) = (x, u + w) = (x, u) + (x, w) = 0$ , что означает  $x \in (U + W)^\perp$  и доказывает обратное включение  $U^\perp \cap W^\perp \subset (U + W)^\perp$ .

(iii) Равенство  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$  двойственно к равенству (ii). Действительно, для ортогональных дополнений к  $U$  и  $W$  верно равенство (ii):

$$(U^\perp + W^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp,$$

Если есть равенство подпространств, то есть равенство их ортогональных дополнений:

$$\left((U^\perp + W^\perp)^\perp\right)^\perp = \left((U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp\right)^\perp,$$

к которому применяем (i). ■

В качестве приложения рассмотренных понятий изучим вопрос об угле между вектором  $x$  и подпространством  $U$  евклидова пространства  $V$ .

Определим **расстояние**  $\rho$  между векторами  $x$  и  $y$  евклидова пространства  $V$  по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Это расстояние удовлетворяет аксиомам метрического пространства. (Докажите это!)

**Замечание.** Напомним, что *метрика*, расстояние на множестве  $M$ , — это определенная на декартовом произведении  $M \times M$  функция  $\rho$  с неотрицательными значениями, удовлетворяющая при любых  $x, y, z \in M$  условиям:

- 1)  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (аксиома тождества);
- 2)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (аксиома треугольника);
- 3)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии).

Множество  $M$ , наделенное некоторой метрикой, называется *метрическим пространством*.

**Определение 3.8.** **Расстояние** между вектором  $x$  и подпространством  $U$  евклидова пространства определяется по формуле

$$\rho(x, U) = \inf_{u \in U} \rho(x, u).$$

Углом между вектором  $x$  и подпространством  $U$  называется наименьший из углов между  $x$  и векторами из  $U$ .

Заметим, что нами был определен лишь косинус угла  $\varphi$ , где  $\varphi \in [0, \pi]$ . Таким образом, речь в определении идет об угле с максимальным косинусом.

### Теорема 3.3.

1) Расстояние от вектора  $x$  конечномерного евклидова пространства  $V$  до подпространства  $U \subset V$  равно длине  $|\text{ort}_U x|$  ортогональной составляющей вектора  $x$  относительно  $U$ , причем единственным ближайшим к  $x$  вектором подпространства  $U$  является его ортогональная проекция  $\text{pr}_U x$  на  $U$ .

2) Угол между вектором  $x$  и подпространством  $U$  равен углу между  $x$  и его ортогональной проекцией  $\text{pr}_U x$  на  $U$ .

*Доказательство.* Представим  $x$  в виде  $x = \text{pr}_U x + \text{ort}_U x$ .

1) Для произвольного вектора  $u \in U$  имеем

$$\rho^2(x, u) = |x - u|^2 = |(\text{pr}_U x + \text{ort}_U x) - u|^2 = |(\text{pr}_U x - u) + \text{ort}_U x|^2.$$

Так как векторы  $\text{pr}_U x - u \in U$  и  $\text{ort}_U x \in U^\perp$  ортогональны, по теореме Пифагора далее получаем

$$|(\text{pr}_U x - u) + \text{ort}_U x|^2 = |\text{pr}_U x - u|^2 + |\text{ort}_U x|^2 \geq |\text{ort}_U x|^2 = \rho^2(x, \text{pr}_U x),$$

так что наименьшее значение для  $\rho(x, u)$  достигается при  $u = \text{pr}_U x$  и равно  $|\text{ort}_U x|$ .

2) Для произвольного ненулевого вектора  $u$  из  $U$  требуется доказать, что

$$\cos(x, u) = \frac{(x, u)}{|x||u|} \leq \frac{(x, \text{pr}_U x)}{|x||\text{pr}_U x|} = \cos(x, \text{pr}_U x).$$

Умножая на положительные числа обе части неравенства, получим

$$\begin{aligned} (x, u)|\text{pr}_U x| &\leq (x, \text{pr}_U x)|u| \\ &\Leftrightarrow \\ (\text{pr}_U x + \text{ort}_U x, u)|\text{pr}_U x| &\leq (\text{pr}_U x + \text{ort}_U x, \text{pr}_U x)|u| \\ &\Leftrightarrow \\ (\text{pr}_U x, u)|\text{pr}_U x| &\leq (\text{pr}_U x, \text{pr}_U x)|u| \\ &\Leftrightarrow \\ (\text{pr}_U x, u) &\leq |\text{pr}_U x||u|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно, потому что это неравенство есть неравенство Коши — Бу-  
няковского, и равенство в нем достигается, лишь когда  $\text{pr}_U x$  и  $u$  линейно зависимы. Это  
и доказывает, что наибольший косинус получается для угла между  $x$  и его проекцией  
 $\text{pr}_U x \in U$ . ■

### 3.5. Изоморфизм евклидовых пространств

**Определение 3.9.** Евклидовы пространства  $V$  и  $\tilde{V}$  называются *изоморфными*,  
если существует отображение  $\Phi : V \rightarrow \tilde{V}$ , являющееся изоморфизмом векторных про-  
странств и удовлетворяющее условию

$$(\Phi(x), \Phi(y)) = (x, y) \quad \text{для любых } x, y \in V.$$

Само отображение  $\Phi$  называется при этом *изоморфизмом* евклидовых пространств  $V$   
и  $\tilde{V}$ .

Из теоремы 1.5 ясно, что изоморфными могут быть только евклидовы пространства  
одинаковой размерности. Оказывается, верно и обратное.

**Теорема 3.4.** Любые два евклидовых пространства одинаковой (конечной) размерно-  
сти изоморфны.

*Доказательство.* Пусть  $V$  и  $\tilde{V}$  — произвольные евклидовы пространства размерности  
 $n$ . Выберем ортонормированный базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  в  $V$  и ортонормированный базис  
 $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  в  $\tilde{V}$ . Пусть  $\Phi : V \rightarrow \tilde{V}$  — изоморфизм векторных пространств, переводя-  
щий  $e_i$  в  $\tilde{e}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Рассмотрим произвольные векторы  $x, y \in V$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  
 $y = y_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . Используя формулу вычисления скалярного произведения в коорди-  
натах в ортонормированном базисе (утверждение 3.6 п.2) и то, что изоморфизм  $\Phi$  сохраняет  
операции векторного пространства, получаем

$$\begin{aligned} (\Phi(x), \Phi(y)) &= (x_1 \Phi(e_1) + \dots + x_n \Phi(e_n), y_1 \Phi(e_1) + \dots + x_n \Phi(e_n)) = \\ &= (x_1 \tilde{e}_1 + \dots + x_n \tilde{e}_n, y_1 \tilde{e}_1 + \dots + x_n \tilde{e}_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \\ &= (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = (x, y). \end{aligned}$$

■

Из этой теоремы можно вывести интересное следствие: любое геометрическое утверждение о двух или трех векторах евклидова пространства достаточно проверить в известном из элементарной геометрии трехмерном пространстве. Действительно, линейная комбинация этих векторов образует подпространство, размерности не выше трех. В силу теоремы 3.4 это подпространство изоморфно обычному трехмерному пространству  $V^3$  (либо его подпространству), а значит, это подпространство устроено совершенно так же, как  $V^3$  (соотв., как подпространство пространства  $V^3$ ). Следовательно, геометрическое утверждение достаточно проверить в последнем пространстве. Например, таким способом можно доказать неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника.

Мы завершим рассмотрение евклидовых пространств рассмотрением линейных функций. Основной результат состоит в том, что линейные функции на евклидовом пространстве могут быть вычислены с помощью скалярного произведения. Именно, справедливо следующее.

**Теорема 3.5.** *Для любого вектора  $x$  конечномерного евклидова пространства  $V$  определим линейную функцию  $\varphi_x : V \rightarrow \mathbb{R}$ , полагая  $\varphi_x(v) = (v, x)$ . Тогда отображение  $\Phi : x \rightarrow \varphi_x$  — изоморфизм векторных пространств  $V$  и  $V^*$ .*

*Доказательство.* Во-первых,  $\varphi_x$  действительно является линейной функцией в силу аксиом 2) и 3) скалярного произведения.

Далее,  $\Phi$  сохраняет операции векторного пространства. Действительно, для любого вектора  $v \in V$  имеем

$$\varphi_{x+y}(v) = (v, x + y) = (v, x) + (v, y) = \varphi_x(v) + \varphi_y(v) = (\varphi_x + \varphi_y)(v).$$

Поэтому  $\varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y$ . Значит,  $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ . Аналогично можно получить, что  $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$ .

Осталось проверить биективность отображения  $\Phi$ . Допустим для каких-то различных векторов  $x, y \in V$  оказывается, что  $\Phi(x) = \Phi(y)$ , т.е.  $\varphi_x = \varphi_y$ . Это означает, что для любого вектора  $v \in V$  выполняется  $(v, x) = (v, y)$ , откуда  $(v, x - y) = 0$ . Взяв в качестве  $v$  вектор  $x - y$ , получим  $(x - y, x - y) = 0$ , откуда в силу аксиомы 4) скалярного произведения следует, что  $x - y = 0$ , т.е.  $x = y$ . Это противоречие доказывает инъективность отображения  $\Phi$ . Рассмотрим теперь какой-нибудь базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  векторного пространства  $V$ . В силу инъективности векторы  $\{\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)\}$  будут линейно независимы (проверьте это!). Так как  $\dim V = \dim V^*$  (следствие 2.2), векторы  $\{\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)\}$  будут образовывать базис в  $V^*$ . Значит, для любой линейной функции  $\psi \in V^*$  существуют  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  такие, что

$$\psi = \lambda_1\Phi(e_1) + \dots + \lambda_n\Phi(e_n) = \Phi(\lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ne_n) = \Phi(x),$$

где  $x = \lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ne_n \in V$ . Это доказывает сюръективность  $\Phi$ . ■

# Глава 4. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

## 4.1. Билинейные функции и их матрицы

Пусть  $V$  — векторное пространство опять над произвольным полем  $F$ .

**Определение 4.1.** Функция от двух аргументов  $\beta : V \times V \rightarrow F$  называется *билинейной функцией* (или *билинейной формой*), если при любом фиксированном аргументе она является линейной по другому аргументу, т.е. для любых  $x, y, z \in V, \lambda \in F$  она удовлетворяет равенствам:

$$\beta(x + y, z) = \beta(x, z) + \beta(y, z);$$

$$\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y);$$

$$\beta(x, y + z) = \beta(x, y) + \beta(x, z);$$

$$\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y).$$

**Пример 1.** Скалярное произведение в векторном пространстве над  $\mathbb{R}$  является билинейной функцией.

**Пример 2.** Если  $\varphi, \psi \in V^*$  — две линейные функции, то  $\beta(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  является билинейной функцией.

**Пример 3.** Рассмотрим пространство  $F[x]$  многочленов и фиксируем число  $x_0 \in F$ . Положим  $\beta(f, g) = f'(x_0)g(x_0)$ . Тогда  $\beta$  является билинейной функцией на  $F[x]$ .

**Пример 4.** Рассмотрим пространство  $M_n(F)$  квадратных матриц с элементами из поля  $F$ . Тогда  $\beta(A, B) = \text{tr } AB$  является билинейной функцией на  $M_n(F)$ .

**Пример 5.** Рассмотрим пространство  $F^2$  строк длины два. Тогда

$$\beta((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

является билинейной функцией на  $F^2$ .

**Пример 6.** В пространстве, векторами которого являются непрерывные функции, функция

$$\beta(f, g) = \int_a^b \int_a^b K(s, t)f(s)g(t)dsdt$$

является билинейной функцией векторов  $f$  и  $g$  ( $K(s, t)$  — некоторая непрерывная функция переменных  $s$  и  $t$ ). Если  $K(s, t) \equiv 1$ , то  $\beta(f, g)$  есть произведение линейных функций  $\int_a^b f(s)ds$  и  $\int_a^b g(t)dt$ .

Для практической работы с билинейными функциями важно перейти на матричный язык.

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис векторного пространства  $V$ . Выразим теперь билинейную функцию  $\beta(x, y)$  через координаты  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  векторов  $x$  и  $y$  в этом базисе. Имеем:

$$\beta(x, y) = \beta(x_1e_1 + \dots + x_n e_n, y_1e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \beta(e_i, e_j).$$

Обозначим числа  $\beta(e_i, e_j)$  через  $b_{i,j}$ . Тогда

$$\beta(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i y_j. \quad (4.1)$$

**Определение 4.2.** Квадратная матрица  $B = (b_{i,j})$  порядка  $n$  называется **матрицей билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\mathcal{E}$** . Ранг матрицы  $B$  называется **рангом билинейной функции  $\beta$** .

Как легко проверить умножением матриц, равенство (4.1) можно записать в матричном виде:

$$\beta(x, y) = X^t B Y, \quad (4.2)$$

где  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$

При замене базиса матрица билинейной функции, разумеется, меняется. Получим закон ее изменения.

Пусть даны в  $n$ -мерном пространстве  $V$  два базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ . И пусть  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

**Утверждение 4.1.** Пусть  $\beta$  — билинейная функция на векторном пространстве  $V$ ,  $B$  и  $\tilde{B}$  — ее матрицы в базисах  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ , соответственно. Тогда

$$\tilde{B} = T^t B T. \quad (4.3)$$

*Доказательство.* Пусть даны два произвольных вектора  $x$  и  $y$ . И пусть  $X, Y$  — их столбцы координат в базисе  $\mathcal{E}$ ,  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  — столбцы координат в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Тогда по формуле (1.1)

$$X = T \tilde{X} \quad \text{и} \quad Y = T \tilde{Y}.$$

Имеем,

$$\tilde{X}^t \tilde{B} \tilde{Y} = \beta(x, y) = X^t B Y = (T \tilde{X})^t B (T \tilde{Y}) = \tilde{X}^t T^t B T \tilde{Y}.$$

Взяв  $x = \tilde{e}_i, y = \tilde{e}_j$ , мы получим равенство  $(i, j)$ -х элементов матрицы  $\tilde{B}$  и матрицы  $T^t B T$  для произвольных  $i, j$ . ■

**Следствие 4.1.** Ранг билинейной функции не зависит от выбора базиса.

*Доказательство.* Так как по утверждению 4.1 матрицы билинейной функции в разных базисах связаны формулой  $\tilde{B} = T^t B T$ , где  $T$  — невырожденная матрица, достаточно доказать следующее.

**Лемма 4.1.** При умножении матрицы на невырожденную матрицу ее ранг не изменяется.

*Доказательство.* Пусть  $A$  — произвольная матрица размера  $m \times n$ ,  $C$  — произвольная матрица размера  $n \times k$ . Тогда  $\text{rk } AC \leq \text{rk } A$ . Действительно, из 1-го семестра известно, что ранг матрицы равен рангу ее столбцов, т.е. размерности линейной оболочки ее столбцов. Столбцы матрицы  $AC$  являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $A$ , значит, линейная оболочка столбцов матрицы  $AC$  является подпространством в линейной оболочке столбцов матрицы  $A$ . Поэтому из теоремы 1.4 имеем  $\text{rk } AC \leq \text{rk } A$ .

Применяя эту формулу к матрицам  $AC$  и  $C^{-1}$  в случае квадратной невырожденной матрицы  $C$ , получаем  $\text{rk}(AC)C^{-1} \leq \text{rk } AC$ . Следовательно,

$$\text{rk } A = \text{rk}(AC)C^{-1} \leq \text{rk } AC \leq \text{rk } A,$$

что доказывает равенство  $\text{rk } A = \text{rk } AC$ . ■

## 4.2. Симметрические билинейные функции

**Определение 4.3.** Билинейная функция  $\beta : V \times V \rightarrow F$  называется **симметрической**, если для любых векторов  $x, y \in V$  выполняется  $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ .

Если билинейная функция симметрична, а  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис векторного пространства  $V$ , то  $\beta(e_i, e_j) = \beta(e_j, e_i)$  для любых  $i, j$ , т.е.  $b_{i,j} = b_{j,i}$ . Таким образом матрица  $B$  билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\mathcal{E}$  симметрична.

Обратно, пусть билинейная функция  $\beta$  имеет симметрическую матрицу  $B$  в некотором базисе  $\mathcal{E}$ . Тогда, поскольку матрица размера  $1 \times 1$  не меняется при транспонировании, по формуле (4.2) получаем

$$\beta(x, y) = X^t B Y = (X^t B Y)^t = Y^t B^t (X^t)^t = Y^t B X = \beta(y, x).$$

Мы доказали

**Утверждение 4.2.** Билинейная функция симметрична тогда и только тогда, когда симметрична ее матрица в каком-нибудь базисе.

Скалярное произведение в евклидовом пространстве является примером симметрической билинейной функции.

**ЗАДАЧА.** Проверьте, что в пространстве  $M_n(F)$  квадратных матриц билинейная функция  $\beta(A, B) = \text{tr } AB$  является симметрической.

Нашей ближайшей задачей будет определить, к какому наиболее простому виду можно привести матрицу билинейной функции за счет выбора подходящего базиса. Геометрические ассоциации, связанные со скалярным произведением векторов, могут быть полезны при изучении произвольных билинейных функций. Этим объясняется вводимая ниже терминология.

**Определение 4.4.** Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  — симметрическая билинейная функция. Для произвольного подмножества  $S \subset V$  множество

$$S^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, s) = 0 \quad \forall s \in S\}$$

называется **ортогональным дополнением** к  $S$  (относительно  $\beta$ ).

В силу линейности  $\beta$  по первому аргументу получаем, что  $S^\perp$  является подпространством в пространстве  $V$ .

Основное свойство всех симметрических билинейных функций — следующее.

**Теорема 4.1.** Для произвольной симметрической билинейной функции

$$\beta : V \times V \rightarrow F,$$

$\text{char } F \neq 2$ , существует базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ , в котором матрица функции  $\beta$  диагональна.

**Доказательство.** Докажем теорему индукцией по  $n = \dim V$  с очевидным основанием при  $n = 1$ .

Если  $\beta \equiv 0$ , то матрица билинейной функции в любом базисе — нулевая, а значит, диагональная. Далее предполагаем, что  $\beta$  — ненулевая функция. Тогда в  $V$  обязательно есть вектор  $e_1$ , для которого  $\beta(e_1, e_1) \neq 0$ . Действительно, если это не так, то

$$\beta(x + y, x + y) = 0$$

для всех  $x, y \in V$ . С другой стороны,

$$\beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) = 2\beta(x, y).$$

Так как  $\text{char } F \neq 2$ , получаем, что  $\beta(x, y) = 0$  для всех  $x, y \in V$ , т.е.  $\beta \equiv 0$ , что противоречит предположению.

Теперь рассмотрим ортогональное дополнение  $U = \{e_1\}^\perp$ . Это — собственное подпространство в  $V$  размерности  $n - 1$ . Действительно, рассмотрим произвольный базис  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  пространства  $V$ . Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — координаты вектора  $e_1$  в базисе  $\mathcal{F}$ ,  $B = (b_{i,j})$  — матрица билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\mathcal{F}$ . Вектор  $x$  принадлежит  $U$  тогда и только тогда, когда  $\beta(x, e_1) = 0$ . Таким образом, согласно формуле (4.1) для определения  $x \in U$  нужно решить однородную систему из одного уравнения  $\sum_{i,j=1}^n b_{i,j} \lambda_i x_j = 0$  с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$ , координатами вектора  $x$  в базисе  $\mathcal{F}$ . Размерность пространства решений такой системы либо  $n$ , либо  $n - 1$ . Поскольку  $\beta(e_1, e_1) \neq 0$ , вектор  $e_1$  не принадлежит  $U$ . Значит,  $\dim U = n - 1$ .

Ограничение функции  $\beta$  на  $U$  — это по-прежнему симметрическая билинейная функция. По предположению индукции, в  $U$  найдется базис  $\{e_2, \dots, e_n\}$ , в котором матрица для этого ограничения имеет диагональный вид, т.е.

$$\beta(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad 2 \leq i, j \leq n.$$

Так как  $U = \{e_1\}^\perp$ , то и  $\beta(e_1, e_j) = 0$  при  $j \geq 2$ . Таким образом,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — искомый базис. ■

# Глава 5. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

## 5.1. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов

**Определение 5.1.** Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  — симметрическая билинейная функция. Функция  $q : V \rightarrow F$ , которая для любого  $x \in V$  определяется равенством

$$q(x) = \beta(x, x),$$

называется **квадратичной функцией** (или **квадратичной формой**), ассоциированной с функцией  $\beta$ . Матрица билинейной функции  $\beta$  в заданном базисе называется также **матрицей квадратичной функции**  $q$  в этом базисе.

Согласно (4.2) в матричном виде квадратичная функция записывается так:

$$q(x) = X^t B X. \quad (5.1)$$

А согласно (4.1) в координатах квадратичная функция записывается так:

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j. \quad (5.2)$$

Правая часть равенства (5.2) — однородный многочлен второй степени относительно  $x_1, \dots, x_n$ . (Собственно, слово «форма», когда-то употреблявшееся значительно шире, означает «однородный многочлен».) После приведения подобных членов (5.2) принимает вид

$$q(x) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j} x_i x_j. \quad (5.3)$$

Из теоремы 4.1 получаем

**Следствие 5.1.** Для любой квадратичной функции  $q : V \rightarrow F$ ,  $\text{char } F \neq 2$ , существует базис, в котором квадратичная функция  $q$  записывается в виде суммы квадратов:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2. \quad (5.4)$$

На самом деле, для практического приведения квадратичной функции к сумме квадратов используется **алгоритм Лагранжа** выделения полного квадрата.

Пусть дана координатная запись квадратичной функции

$$q(x_1, \dots, x_n) = b_{1,1} x_1^2 + \dots + b_{n,n} x_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j} x_i x_j$$

в каком-нибудь базисе  $\mathcal{E}$ . Если хотя бы один из коэффициентов при квадратах (не ограничивая общности, ниже считаем, что это  $b_{1,1}$ ) отличен от нуля, то применяем следующую процедуру. Собираем вместе все члены содержащие  $x_1$  и выносим общий множитель  $b_{1,1}$  за скобки:

$$b_{1,1} x_1^2 + 2b_{1,2} x_1 x_2 + \dots + 2b_{1,n} x_1 x_n + \dots = b_{1,1} (x_1^2 + 2 \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} x_1 x_2 + \dots + 2 \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}} x_1 x_n) + \dots$$

Дополняем выражение в квадратных скобках до квадрата суммы:

$$b_{1,1}\left(x_1 + \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}}x_2 + \dots + \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}}x_n\right)^2 + \dots$$

И производя линейную замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}}x_2 + \dots + \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}}x_n, \\ y_2 = x_2, \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

получаем

$$b_{1,1}y_1^2 + q(y_2, \dots, y_n),$$

где квадратичная форма  $q(y_2, \dots, y_n)$  не содержит переменную  $y_1$ . Далее применяется индукция по  $n$  к  $q(y_2, \dots, y_n)$ . Указанная процедура работает, лишь если один из коэффициентов при квадратах (здесь  $b_{1,1}$ ) отличен от нуля. Если ненулевых коэффициентов при квадратах нет, но есть, допустим,  $2b_{1,2}x_1x_2$ ,  $b_{1,2} \neq 0$ , то полагаем

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \dots \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

в результате чего получаем коэффициент при  $y_1^2$  равный  $2b_{1,2} \neq 0$ . После этого применяется процедура, описанная ранее. (Выпишите преобразования базиса, отвечающие каждому из произведенных преобразований координат, и убедитесь, что эти преобразования действительно переводят базис снова в базис!)

**Замечание 5.1.** В случае поля  $F$  характеристики, отличной от 2, квадратичная функция  $q(x)$  однозначно определяет симметрическую билинейную функцию  $\beta(x, y)$ , из которой она получена:

$$\beta(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

Процедура восстановления  $\beta(x, y)$  по  $q(x)$  называется *процедурой поляризации*.

Исходя из этого замечания, мы видим, что алгоритм Лагранжа дает другое доказательство теоремы о приведении матрицы симметрической билинейной функции к диагональному виду.

## 5.2. Формула Якоби

Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  — симметрическая билинейная функция на векторном пространстве  $V$ ,  $B$  — ее матрица в некотором базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Через  $\Delta_m$  обозначим угловой минор порядка  $m$  матрицы  $B$ , т.е. определитель матрицы, состоящей из элементов, стоящих на пересечении первых  $m$  строк и первых  $m$  столбцов матрицы  $B$ . Положим  $\Delta_0 = 1$ .

**Теорема 5.1.** Если все угловые миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  матрицы  $B$  отличны от нуля, то существует базис  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  в векторном пространстве  $V$ , в котором квадратичная функция  $q$ , ассоциированная с  $\beta$ , имеет вид

$$q\left(\sum_{i=1}^n y_i f_i\right) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2. \quad (5.5)$$

Матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\mathcal{F}$  является (верхней) унитарной, т.е. треугольной с единицами на главной диагонали.

Формула (5.5) называется **формулой Якоби**.

*Доказательство.* Докажем теорему индукцией по  $n$ .

При  $n = 1$  имеем  $f_1 = e_1$  и  $q(f_1) = \beta(e_1, e_1) = \Delta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$ .

При  $n > 1$  рассмотрим подпространство  $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ . Ограничение  $\beta|_U$  симметрической билинейной функции  $\beta$  на подпространство  $U$  является симметрической билинейной функцией. Матрица  $B|_U$  функции  $\beta|_U$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  совпадает с матрицей, полученной из матрицы  $B$  вычеркиванием последней строки и последнего столбца, поэтому угловые миноры матрицы  $B|_U$  совпадают с  $\Delta_i$ ,  $i \leq n-1$  и, в частности, отличны от нуля. Отсюда следует, что к функции  $\beta|_U$  применимо предположение индукции. Значит, найдется базис  $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$  в подпространстве  $U$ , в котором

$$q|_U(y_1 f_1 + \dots + y_{n-1} f_{n-1}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} y_{n-1}^2.$$

Положим

$$f_n = e_n - \frac{\beta(e_n, f_1)}{\beta(f_1, f_1)} f_1 - \dots - \frac{\beta(e_n, f_{n-1})}{\beta(f_{n-1}, f_{n-1})} f_{n-1}.$$

В этой формуле мы имеем право делить на  $\beta(f_i, f_i)$  при  $i = \overline{1, n-1}$ , так как

$$\beta(f_i, f_i) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \neq 0.$$

Так как  $f_n$  не принадлежит  $U$ , то  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  — базис пространства  $V$ . Осталось проверить, что базис  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  — искомым.

Непосредственно проверяется, что матрица  $T$  перехода от базиса  $\{e_1, \dots, e_n\}$  к базису  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  является унитарной,  $\det T = 1$ .

По предположению индукции  $\beta(f_i, f_j) = 0$  для любых  $i, j = \overline{1, n-1}$  ( $i \neq j$ ), следовательно для любого  $k = \overline{1, n-1}$ , учитывая построение вектора  $f_n$ , имеем:

$$\begin{aligned} \beta(f_n, f_k) &= \beta\left(e_n - \frac{\beta(e_n, f_1)}{\beta(f_1, f_1)} f_1 - \dots - \frac{\beta(e_n, f_{n-1})}{\beta(f_{n-1}, f_{n-1})} f_{n-1}, f_k\right) = \\ &= \beta(e_n, f_k) - \frac{\beta(e_n, f_1)}{\beta(f_1, f_1)} \beta(f_1, f_k) - \dots - \frac{\beta(e_n, f_{n-1})}{\beta(f_{n-1}, f_{n-1})} \beta(f_{n-1}, f_k) = \\ &= \beta(e_n, f_k) - \frac{\beta(e_n, f_k)}{\beta(f_k, f_k)} \beta(f_k, f_k) = 0. \end{aligned}$$

Также по предположению индукции

$$\beta(f_i, f_i) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Поэтому матрица  $\tilde{B}$  билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  имеет диагональный вид

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & \\ 0 & & & \tilde{b}_{n,n} \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\det \tilde{B} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \cdot \tilde{b}_{n,n} = \Delta_{n-1} \tilde{b}_{n,n}.$$

С другой стороны, из формулы (4.3) получаем, что

$$\det \tilde{B} = \det T^t B T = \det T^t \det B \det T = (\det T)^2 \det B = \det B = \Delta_n.$$

Так как  $\Delta_{n-1} \neq 0$ , получаем, что  $\tilde{b}_{n,n} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ . ■

Отметим, что в доказательстве этой теореме процесс построения базиса  $\{f_1, \dots, f_n\}$  совпадает с процессом ортогонализации Грама—Шмидта и также называется процессом ортогонализации.

### 5.3. Нормальный вид квадратичных форм над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$ . Закон инерции

Мы рассмотрим частный случай, особенно важный для приложений, когда основное поле — это  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

Для начала рассмотрим конечномерное векторное пространство  $V$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Если  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  — произвольная симметрическая билинейная функция, то по теореме 4.1 ее матрица  $D = (d_{i,j})$  в некотором базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  является диагональной, причем можно считать, что лишь первые  $r$  диагональных элементов  $d_{1,1} = \beta(e_1, e_1), \dots, d_{r,r} = \beta(e_r, e_r)$  отличны от нуля, т.е. в этом базисе

$$\beta(x, y) = d_{1,1}x_1y_1 + d_{2,2}x_2y_2 + \dots + d_{r,r}x_ry_r.$$

Значит, в базисе  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ , где

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\beta(e_i, e_i)}} e_i, \quad i = \overline{1, r},$$

матрица билинейной функции  $\beta$  будет диагональной с диагональными элементами, равными либо 1, либо 0. Таким образом, в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$  имеем

$$\beta(x, y) = \tilde{x}_1\tilde{y}_1 + \tilde{x}_2\tilde{y}_2 + \dots + \tilde{x}_r\tilde{y}_r.$$

Так как число  $r$  равно рангу билинейной функции  $\beta$ , по следствию 4.1 число  $r$  не зависит от базиса, т.е. является инвариантом.

Поскольку матрицы для  $\beta$  и для ассоциированной с ней квадратичной формы  $q$  одинаковы, то получаем следующее

**Утверждение 5.1.** *Над полем комплексных чисел для любой квадратичной функции  $q$  существует базис, в котором*

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2. \quad (5.6)$$

При этом число  $r$  является инвариантом квадратичной функции  $q$ .

Выражение (5.6) для квадратичной функции  $q$  над полем комплексных чисел называется ее **нормальным видом**.

В случае поля действительных чисел  $\mathbb{R}$  абсолютно то же самое рассуждение доказывает

**Утверждение 5.2.** *Над полем действительных чисел для любой квадратичной функции  $q$  существует базис, в котором*

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2, \quad (5.7)$$

причем сумма  $k + l = r$  — инвариант квадратичной функции  $q$ .

Выражение (5.7) для квадратичной функции  $q$  над полем действительных чисел называется ее **нормальным видом**. Числа  $k$  и  $l$  в выражении (5.7) называются, соответственно, **положительным** и **отрицательным индексами инерции** квадратичной функции  $q$ .

Так как мы можем по-разному выбрать тот базис, в котором квадратичная функция записывается в виде суммы квадратов, то возникает вопрос, зависит ли от выбора базиса количество коэффициентов, равных  $+1$  и  $-1$ , в нормальном виде квадратичной функции  $q$  или же эти числа зависят лишь от самой квадратичной функции  $q$  (являются ее инвариантами). Оказывается верно следующее.

**Теорема 5.2 (Закон инерции).** *Положительный и отрицательный индекс инерции являются инвариантами квадратичной функции (т.е. не зависят от выбора базиса).*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  — два базиса векторного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  размерности  $n$ , в которых квадратичная функция  $q$  имеет виды

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2, \quad (5.8)$$

$$q(x) = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_s^2 - \tilde{x}_{s+1}^2 - \dots - \tilde{x}_{s+t}^2, \quad (5.9)$$

где  $x_i, \tilde{x}_i$  — это координаты вектора  $x$  в базисах  $\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}$  соответственно.

Так как  $k+l = s+t = r$ , где  $r$  — ранг квадратичной функции  $q$ , достаточно доказать, что  $k = s$ . Допустим, что это не так. Пусть  $k > s$ . Рассмотрим подпространства  $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$  и  $W = \langle \tilde{e}_{s+1}, \dots, \tilde{e}_n \rangle$ . Согласно формуле Грассмана (Теорема 1.6),

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W) &= \dim U + \dim W - \dim(U + W) = k + (n - s) - \dim(U + W) = \\ &= (n - \dim(U + W)) + (k - s) \geq k - s > 0. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство справедливо, так как размерность любого подпространства в  $V$  не превосходит размерности всего пространства (Теорема 1.4). Итак, мы видим, что подпространство  $U \cap W$  — ненулевое. Значит, в  $U \cap W$  существует ненулевой вектор  $u$ . Тогда  $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ , где не все  $\lambda_i$  равны нулю, и  $u = \mu_{s+1} \tilde{e}_{s+1} + \dots + \mu_n \tilde{e}_n$ , где не все  $\mu_j$  равны нулю. Подстановка в формулу (5.8) координат вектора  $u$  в базисе  $\mathcal{E}$  дает

$$q(u) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 > 0.$$

С другой стороны, подстановка в формулу (5.9) координат вектора  $u$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$  дает

$$q(u) = -\mu_{s+1}^2 - \dots - \mu_{s+t}^2 \leq 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что  $k = s$ . ■

## 5.4. Положительно определенная квадратичная форма

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

**Определение 5.2.** Квадратичная функция  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  называется **положительно определенной**, если  $q(x) > 0$  для любого ненулевого вектора  $x \in V$ . Симметрическая билинейная функция  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  называется **положительно определенной**, если соответствующая ей квадратичная функция положительно определена.

Так скалярное произведение есть ни что иное, как положительно определенная симметрическая билинейная функция.

Аналогично определяются *отрицательно определенные* квадратичные и симметрические билинейные функции.

**ЗАДАЧА.** Докажите, что в пространстве  $M_n(\mathbb{R})$  билинейной функцией  $\operatorname{tr} AB^t$  является симметрической и положительно определенной.

Очевидно, что нормальный вид положительно определенной квадратичной функции в  $n$ -мерном пространстве есть  $x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Для решения вопроса о положительной определенности квадратичной функции используется так называемый критерий Сильвестра.

**Теорема 5.3 (Критерий Сильвестра).** *Симметрическая билинейная функция*

$$\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

*является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры  $\Delta_i$  ее матрицы  $B$  в произвольном базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  являются положительными числами.*

*Доказательство.* Пусть симметрическая билинейная функция  $\beta$  является положительно определенной. Утверждение будем доказывать индукцией по  $n = \dim V$  с очевидным основанием при  $n = 1$ . Допустим, что утверждение теоремы верно для размерностей, меньших  $n$ . Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис пространства  $V$ ,  $B$  — матрица билинейной функции  $\beta$  в этом базисе, а  $\Delta_i$  — ее угловые миноры ( $1 \leq i \leq n$ ). Так как функция  $\beta$  — положительно определенная, то ее ограничение на подпространство  $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  также положительно определено, откуда по предположению индукции вытекает, что угловые миноры  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , положительны. Далее осталось только доказать, что  $\Delta_n > 0$ . По теореме 4.1 существует базис  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ , в котором матрица  $\tilde{B}$  билинейной функции  $\beta$  диагональна, причем ее диагональные элементы  $\tilde{b}_{i,i} = \beta(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)$  положительны в силу положительной определенности билинейной функции  $\beta$ . Следовательно,

$$\det \tilde{B} = \tilde{b}_{1,1} \tilde{b}_{2,2} \dots \tilde{b}_{n,n} > 0.$$

С другой стороны, согласно формуле (4.3),

$$\det \tilde{B} = (\det T^t)(\det B)(\det T) = (\det T)^2 \Delta_n,$$

где  $T$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Отсюда  $\Delta_n > 0$ , как и требовалось.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть все угловые миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  матрицы билинейной функции  $\beta$  в некотором базисе  $\mathcal{E}$  положительны. В частности, они отличны от нуля. Значит, по теореме 5.1 о формуле Якоби существует базис, в котором квадратичная функция  $q$ , ассоциированная с  $\beta$ , имеет вид

$$q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2.$$

Из этой формулы видно, что  $q$  является положительно определенной. ■

**ЗАДАЧА.** Докажите, что для того, чтобы симметрическая билинейная функция была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с минуса, т.е.  $(-1)^i \Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Вернемся теперь на время к евклидовым пространствам и матрицам Грама и докажем утверждение 3.3 из параграфа 3.

**Утверждение 3.3.** *Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — произвольные векторы евклидова пространства. Тогда  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0$  тогда и только тогда, когда  $\{v_1, \dots, v_k\}$  — линейно независимая система. В противном случае  $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0$ . Допустим, что  $\{v_1, \dots, v_k\}$  линейно зависимы, т.е. существуют такие числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , не все равные нулю, что

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Тогда для любого  $v_i$  выполняется

$$0 = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_i) = \lambda_1 (v_1, v_i) + \dots + \lambda_n (v_n, v_i) = \lambda_1 g_{1,i} + \dots + \lambda_n g_{n,i},$$

где  $g_{i,j}$  — элементы матрицы Грама  $G(v_1, \dots, v_k)$ . Отсюда вытекает линейная зависимость строк матрицы Грама  $G(v_1, \dots, v_k)$  и, следовательно,  $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$ , что противоречит предположению и доказывает линейную независимость системы  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

Обратно, пусть  $\{v_1, \dots, v_k\}$  — линейно независимая система. Дополним ее до базиса  $\mathcal{E} = \{v_1, \dots, v_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  (это возможно по теореме 1.3). Рассмотрим симметрическую билинейную функцию

$$\beta(x, y) \equiv (x, y),$$

где  $(x, y)$  — скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ . Тогда  $\det G(v_1, \dots, v_k)$  равняется угловому минору  $\Delta_k$  порядка  $k$  матрицы этой билинейной функции в базисе  $\mathcal{E}$ . Согласно критерию Сильвестра (теорема 5.3), в силу положительной определенности билинейной функции  $\beta$ , т.е. в силу положительной определенности скалярного произведения, имеем  $\Delta_k > 0$ . ■

## Глава 6. УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим векторное пространство  $V$  над полем комплексных чисел. Оказываются, что в этом пространстве естественные аксиомы, определяющие скалярное произведение в евклидовом пространстве, выполнены быть не могут. В самом деле, пусть  $x$  — ненулевой вектор из  $V$ . При этом  $ix$  тоже принадлежит  $V$ , где  $i$  — мнимая единица. Для билинейного скалярного произведения должно иметь место равенство

$$(ix, ix) = -(x, x),$$

которое противоречит положительной определенности скалярного произведения.

Таким образом билинейные функции не представляются удовлетворительными, если мы хотим развить теорию, аналогичную метрической теории в евклидовом пространстве, для случая пространств над полем комплексных чисел.

### 6.1. Полуторалинейные функции

В векторном пространстве  $V$  над полем комплексных чисел чаще всего используются не билинейные, а полуторалинейные функции.

**Определение 6.1.** Функция  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  называется *полуторалинейной функцией*, если

1)  $\beta$  линейна по первому аргументу, т.е.

$$\beta(x + y, z) = \beta(x, z) + \beta(y, z),$$

$$\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

2)  $\beta$  антилинейна по второму аргументу, т.е.

$$\beta(x, y + z) = \beta(x, y) + \beta(x, z),$$

$$\beta(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \beta(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Замечание.** Иногда требуется, чтобы полуторалинейная функция была, наоборот, линейна по второму аргументу и антилинейна по первому.

Теория полуторалинейных функций аналогична теории билинейных функций. Поэтому мы изложим ее кратко, останавливаясь более подробно лишь в тех местах, где имеется существенное различие.

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис векторного пространства  $V$ . Полуторалинейная функция  $\beta$  определяется числами  $b_{i,j} = \beta(e_i, e_j)$ . А именно, если  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  — координаты векторов  $x$  и  $y$  в базисе  $\mathcal{E}$ , то:

$$\beta(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i \bar{y}_j. \quad (6.1)$$

Квадратная матрица  $B = (b_{i,j})$  порядка  $n$  называется *матрицей полуторалинейной функции  $\beta$  в базисе  $\mathcal{E}$* . В матричном виде равенство (6.1) запишется так

$$\beta(x, y) = X^t B \bar{Y}, \quad (6.2)$$

### Содержание

$$\text{где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

При замене базиса матрица полуторалинейной функции преобразуется по правилу

$$\tilde{B} = T^t B \bar{T}, \quad (6.3)$$

где  $\tilde{B}$  — матрица полуторалинейной функции  $\beta$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ , а  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

**Определение 6.2.** Полуторалинейная функция  $\beta$  называется *эрмитовой*, если для любых векторов  $x, y \in V$  выполняется

$$\beta(x, y) = \overline{\beta(y, x)}.$$

Функция  $\beta$  является эрмитовой тогда и только тогда, когда ее матрица  $B$  в произвольном базисе удовлетворяла условию

$$B^t = \bar{B}.$$

Такие матрицы называются *эрмитовыми*.

**Замечание.** Если  $B = (b_{i,j})$  — эрмитова матрица, то ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, комплексно сопряжены:  $b_{i,j} = \bar{b}_{j,i}$ , в частности, ее элементы на главной диагонали вещественны:  $b_{i,i} = \bar{b}_{i,i}$ . Также стоит отметить, что определитель эрмитовой матрицы всегда веществен, так как:

$$\det B = \det B^t = \det \bar{B} = \overline{\det B}.$$

Каждой эрмитовой полуторалинейной функции  $\beta$  соответствует *эрмитова квадратичная функция*

$$q(x) = \beta(x, x).$$

**Утверждение 6.1.** Всякая эрмитова квадратичная функция  $q$  принимает только вещественные значения.

*Доказательство.* Пусть  $\beta$  — эрмитова полуторалинейная функция, соответствующая  $q$ . Тогда для любого вектора  $x \in V$  имеем

$$q(x) = \beta(x, x) = \overline{\beta(x, x)} = \overline{q(x)}.$$

Значит,  $q(x) \in \mathbb{R}$ . ■

**Утверждение 6.2.** Всякая эрмитова полуторалинейная функция  $\beta$  однозначно определяется своей эрмитовой квадратичной функцией  $q$ .

*Доказательство.* Пусть  $x, y$  — произвольные векторы пространства  $V$ . Тогда

$$\begin{aligned} q(x+y) &= \beta(x+y, x+y) = \beta(x, x) + \beta(y, y) + \beta(x, y) + \beta(y, x) = \\ &= q(x) + q(y) + \beta(x, y) + \beta(y, x) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} q(x+iy) &= \beta(x+iy, x+iy) = \beta(x, x) + \beta(y, y) - i\beta(x, y) + i\beta(y, x) = \\ &= q(x) + q(y) - i\beta(x, y) + i\beta(y, x). \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$q(x-y) = q(x) + q(y) - \beta(x, y) - \beta(y, x)$$

## Содержание

и

$$q(x - iy) = q(x) + q(y) + i\beta(x, y) - i\beta(y, x).$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\beta(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) + iq(x + iy) - q(x - y) - iq(x - iy)).$$

■

Аналогично вещественному случаю доказывается следующая

**Теорема 6.1.** В  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над полем комплексных чисел для всякой эрмитовой полуторалинейной функции  $\beta$  существует базис, в котором функция  $\beta$  и соответствующая ей эрмитова квадратичная функция  $q$  имеют **нормальный вид**

$$\begin{aligned}\beta(x, y) &= x_1\bar{y}_1 + \dots + x_k\bar{y}_k - x_{k+1}\bar{y}_{k+1} - \dots - x_{k+l}\bar{y}_{k+l}, \\ q(x) &= |x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \dots - |x_{k+l}|^2.\end{aligned}\tag{6.4}$$

При этом для эрмитовых квадратичных форм справедлив **закон инерции**: числа  $k, l$  являются инвариантами, т.е. не зависят от базиса, в котором функция  $q$  имеет нормальный вид. Числа  $k$  и  $l$  называются **положительным** и **отрицательным индексами инерции** функции  $q$ .

**Определение 6.3.** Эрмитова квадратичная функция  $q$  (и соответствующая ей эрмитова полуторалинейная функция) называется **положительно определенной**, если  $q(x) > 0$  для любого ненулевого вектора  $x$ .

В силу утверждения 6.1 это определение корректно.

Для того, чтобы эрмитова квадратичная функция была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы  $k = n, l = 0$  в нормальном виде (6.4).

Если все угловые миноры эрмитовой полуторалинейной функции отличны от нуля, то можно так же, как в случае билинейной функции получить формулу Якоби. В частности, имеет место аналог критерия Сильвестра:

**Теорема 6.2.** Эрмитова квадратичная функция положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Отметим, что мы имеем право сравнивать угловые миноры с нулем, так как матрица эрмитовой квадратичной функции (т.е. соответствующей ей эрмитовой полуторалинейной функции) является эрмитовой, угловые миноры эрмитовой матрицы — это определители от эрмитовых матриц, а определители от эрмитовых матриц всегда вещественны.

## 6.2. Понятие унитарного пространства

Комплексным аналогом евклидова пространства является унитарное пространство

**Определение 6.4.** Векторное пространство  $V$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$  называется **унитарным** (или **эрмитовым**), если на  $V$  зафиксирована функция от двух аргументов, называемая **эрмитовым скалярным произведением**, сопоставляющая любым двум векторам  $x, y \in V$  комплексное число  $(x, y)$  и удовлетворяющая свойствам

- 1)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;
- 2)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;
- 3)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{C}$ ;
- 4)  $(x, x) > 0$  для всех  $x \neq 0$ .

Заметим, что для любого вектора  $(x, x) = \overline{(x, x)}$ , и потому скалярный квадрат  $(x, x)$  вещественное число. В аксиоме 4) требуется, чтобы оно было положительным при  $x \neq 0$ .

Из аксиом 1) - 3) следует антилинейность эрмитова скалярного произведения по второму аргументу. Действительно, из аксиом 1), 3) вытекает правило вынесения числового множителя от второго аргумента в эрмитовом скалярном произведении:

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda}(y, x) = \bar{\lambda}(x, y).$$

А из аксиом 1), 2) получаем

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x) + (z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z).$$

Это показывает, что унитарное пространство можно определить, как комплексное векторное пространство, в котором задана положительно определенная эрмитова полуторалинейная функция.

**Пример 1.** В пространстве строк  $\mathbb{C}^n$  длины  $n$  с комплексными элементами эрмитово скалярное произведение можно задать так

$$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n.$$

**Пример 2.** В пространстве квадратных матриц  $M_n(\mathbb{C})$  порядка  $n$  с комплексными элементами эрмитово скалярное произведение можно задать так

$$(A, B) = \text{tr}(A\bar{B}^t).$$

Подобным образом получают и другие примеры, аналогичные тем, что приводились для иллюстрации понятия евклидова пространства.

В унитарном пространстве можно определить понятие **длины** вектора по той же самой формуле, что и для евклидова пространства

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

В унитарном пространстве выполняются неравенство Коши—Буняковского

$$(x, x)(y, y) \geq (x, y)(y, x) = |(x, y)|^2$$

и неравенство треугольника

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(докажите их!)

Так как скалярное произведение двух векторов, вообще говоря, комплексно, то мы не будем определять угол между векторами, а будем лишь использовать, определяемое, как и ранее, понятие ортогональности двух векторов: векторы  $x$  и  $y$  называются **ортогональными**, если  $(x, y) = 0$ . Дословно повторяется описание процесса ортогонализации Грама—Шмидта, позволяющего находить по линейно независимым системам ортонормированные системы с сохранением линейных оболочек. Отсюда получается доказательство того факта, что в конечномерном унитарном пространстве существует ортогональный базис.

Базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  унитарного пространства  $V$  называется **ортонормированным**, если  $(e_i, e_j) = \delta_i^j$ . Полезно отметить, что если векторы

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

даны своими координатами в ортонормированном базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , то

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n. \quad (6.5)$$

Из этой формулы немедленно вытекает, что любые два унитарных пространства одной и той же размерности изоморфны как унитарные пространства, т.е. при изоморфизме  $\Phi$  сохраняется значение эрмитова скалярного произведения:  $(\Phi(x), \Phi(y)) = (x, y)$ .

Матрицы перехода от одного ортонормированного базиса унитарного пространства к другому удовлетворяют условию  $T^t \bar{T} = E$ . Такие комплексные матрицы называются **унитарными**. Действительно, если даны два ортонормированных базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ ,  $T = (t_{i,j})$  — матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ , то для любой пары индексов  $i, j$  должно выполняться  $(e_i, e_j) = \delta_i^j$  и  $(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = \delta_k^l$ . Однако  $\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^n t_{i,k} e_i$ ,  $\tilde{e}_l = \sum_{i=1}^n t_{i,l} e_i$ . Вычисляя скалярное произведение с учетом предыдущих формул и определения эрмитова скалярного произведения, получим

$$\delta_k^l = (\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = \sum_{i=1}^n t_{i,k} \bar{t}_{i,l}.$$

Это равенство говорит о том, что столбцы матрицы  $T$  образуют ортонормированный базис в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . На языке же матриц имеем  $T^t \bar{T} = E$ . Снова, как и прежде, можно заметить, что совокупность  $U_n$  унитарных матриц порядка  $n$  образует группу.

Отметим, что определитель унитарной матрицы  $T$  равен по модулю 1. В самом деле, беря определитель от обеих частей равенства  $T^t \bar{T} = E$ , получаем

$$\det T \overline{\det T} = 1,$$

а это и означает, что  $|\det T| = 1$ .

Как и ранее, можно ввести понятие ортогонального дополнения. Так же, как и в случае евклидова пространства, для любого подпространства  $U$  конечномерного унитарного пространства  $V$  получаем разложение  $V = U \oplus U^\perp$ . Как и ранее, определяются понятия ортогональной проекции  $\text{pr}_U x$  и ортогональной составляющей  $\text{ort}_U x$  вектора  $x$  относительно подпространства  $U$ . В унитарном пространстве также справедливо, что расстояние от вектора  $x$  унитарного пространства  $V$  до подпространства  $U \subset V$  равно  $|\text{ort}_U x|$ , причем единственным ближайшим к  $x$  вектором подпространства  $U$  является  $\text{pr}_U x$ .

### 6.3. Комплексификация вещественного пространства

Пусть  $V$  — некоторое векторное пространство над полем действительных чисел. Построим из него векторное пространство  $V^{\mathbb{C}}$  над полем комплексных чисел аналогично тому, как из поля  $\mathbb{R}$  строится поле  $\mathbb{C}$ . А именно, элементами пространства  $V^{\mathbb{C}}$  будем считать пары  $(x, y)$ , где  $x, y \in V$ . Определим сложение таких пар и умножение на комплексные числа по правилам

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w),$$

$$(\lambda + i\mu)(x, y) = (\lambda x - \mu y, \mu x + \lambda y).$$

Легко проверить, что при этом получается векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$ . Полученное векторное пространство  $V^{\mathbb{C}}$  называется **комплексификацией** пространства  $V$ .

Согласно данному определению, сложение пар вида  $(x, 0)$  и умножение их на вещественное число сводится к соответствующим операциям над их первыми компонентами. отождествим каждую пару вида  $(x, 0)$  с вектором  $x \in V$ ; тогда пространство  $V$  окажется вложенным в  $V^{\mathbb{C}}$  в виде вещественного подпространства. Так как

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i(y, 0),$$

каждый вектор  $(x, y)$  из  $V^{\mathbb{C}}$  однозначно представим в виде

$$(x, y) = x + iy. \quad (6.6)$$

Любой базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  (над  $\mathbb{R}$ ) является в то же время базисом пространства  $V^{\mathbb{C}}$  (над  $\mathbb{C}$ ). В самом деле, любой вектор  $x + iy$  из  $V^{\mathbb{C}}$  линейно выражается через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  с комплексными коэффициентами:

$$x + iy = (x_1 + iy_1)e_1 + \dots + (x_n + iy_n)e_n,$$

где

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n, \quad y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \in V \quad (x_i, y_i \in \mathbb{R}).$$

Таким образом, система  $\{e_1, \dots, e_n\}$  является порождающей для  $V^{\mathbb{C}}$  (над  $\mathbb{C}$ ). Проверим, что система  $\{e_1, \dots, e_n\}$  является линейно независимой над  $\mathbb{C}$ . Если

$$(\lambda_1 + i\mu_1)e_1 + \dots + (\lambda_n + i\mu_n)e_n = 0, \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R},$$

то

$$(\lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ne_n) + i(\mu_1e_1 + \dots + \mu_ne_n) = 0,$$

т.е.

$$(\lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ne_n, \mu_1e_1 + \dots + \mu_ne_n) = (0, 0).$$

Значит,  $\lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ne_n = 0$  и  $\mu_1e_1 + \dots + \mu_ne_n = 0$ . Отсюда в силу линейной независимости системы  $\{e_1, \dots, e_n\}$  над  $\mathbb{R}$  получаем, что все коэффициенты  $\lambda_i, \mu_j$  — нулевые.

Заметим, что хотя любой базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  (над  $\mathbb{R}$ ) является в то же время базисом пространства  $V^{\mathbb{C}}$  (над  $\mathbb{C}$ ), в пространстве  $V^{\mathbb{C}}$  существуют и другие базисы.

Пусть теперь  $V$  — евклидово пространство (значит, над  $\mathbb{R}$ ) со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ . Его комплексификация  $V^{\mathbb{C}}$  каноническим образом превращается в унитарное пространство, если определить эрмитово скалярное умножение по формуле:

$$(u + iv, x + iy) = ((u, x) + (v, y)) + i((v, x) - (u, y)). \quad (6.7)$$

Причем это определение естественно, так как из аксиом эрмитова скалярного произведения так и должно следовать

$$(u + iv, x + iy) = (u, x) + i(v, x) - i(u, y) + (v, y) = ((u, x) + (v, y)) + i((v, x) - (u, y)),$$

в частности, продолжение скалярного произведения определено однозначно.

Нетрудно проверить, что по формуле (6.7) мы получаем действительно эрмитово скалярное произведение, с сохранением скалярного произведения на парах векторов из  $V$ . Например, вычислим эрмитов скалярный квадрат вектора с помощью формулы (6.7):

$$(u + iv, u + iv) = ((u, u) + (v, v)) + i((v, u) - (u, v)) = (u, u) + (v, v),$$

т.е.

$$|u + iv|^2 = |u|^2 + |v|^2,$$

откуда вытекает положительная определенность полученной функции. Таким образом, комплексификация евклидова пространства однозначно превращается в унитарное пространство.

Нетрудно понять и то, что любое унитарное пространство  $W$  является комплексификацией некоторого евклидова пространства  $V$ , а именно, вещественной линейной оболочки любого ортонормированного базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $W$ , т.е.

$$V = \{\lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ne_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

## Содержание

В самом деле, ограничение эрмитова скалярного произведения на  $V$ , очевидно, является скалярным произведением, превращающим  $V$  в евклидово пространство, так как для любых векторов  $x, y \in V$  с вещественными координатами  $x_i, y_i$  в базисе  $\mathcal{E}$ , ортонормированном относительно эрмитова скалярного произведения, учитывая формулу (6.5), имеем

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь дано какое-нибудь векторное пространство  $W$  над полем комплексных чисел. Забывая умножение на числа, не являющиеся действительными, получаем векторное пространство  $W^{\mathbb{R}}$  над полем действительных чисел, называемое **овеществлением** векторного пространства  $W$ . Исходя из комплексного пространства  $W$  размерности  $n$ , мы получаем на абелевой группе  $W$  структуру векторного пространства над  $\mathbb{R}$ , причем, если  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  — базис пространства  $W$  (над  $\mathbb{C}$ ), то  $\mathcal{F}' = \{f_1, \dots, f_n, if_1, \dots, if_n\}$  — базис для овеществления  $W^{\mathbb{R}}$  (над  $\mathbb{R}$ ).

# Часть III

## Линейные операторы

Теория линейных операторов — это ядро линейной алгебры и главный источник ее многочисленных приложений.

### Глава 7. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

#### 7.1. Линейные отображения

Пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства над полем  $F$ .

**Определение 7.1.** Отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  называется *линейным*, если  $\varphi$  сохраняет операции сложения и умножения на число, т.е. для любых векторов  $x, y \in V$  и любого числа  $\lambda \in F$  выполняется:

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ;
- 2)  $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ .

Это определение отличается от определения изоморфизма векторных пространств тем, что в нем не требуется биективности.

**Простейшие свойства линейных отображений:**

- 1)  $\varphi(0) = 0$ ;
- 2)  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ;
- 3)  $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$ .

Докажите эти свойства!

**Пример 1.** Линейные функции являются линейными отображениями из векторного пространства  $V$  в поле  $F$ , рассматриваемое как векторное пространство над самим собой.

**Пример 2.** Поворот есть линейное отображение (и даже изоморфизм) пространства  $V^2$  геометрических векторов в себя.

**Пример 3.** Ортогональное проектирование на плоскость определяет линейное отображение (но не изоморфизм) пространства  $V^3$  в пространство геометрических векторов этой плоскости.

**Пример 4.** Дифференцирование является линейным отображением пространства непрерывно дифференцируемых функций на заданном промежутке числовой прямой в пространство непрерывных функций на этом промежутке.

Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  однозначно определяется образами базисных векторов пространства  $V$ . В самом деле, пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — базис пространства  $V$ . Тогда для любого вектора  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  пространства  $V$  имеем

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i).$$

С другой стороны, если  $w_1, \dots, w_n \in W$  — произвольные векторы, то отображение, определяемое по формуле

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i w_i,$$

как легко видеть, является линейным и  $\varphi(e_i) = w_i$ .

Пусть  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  — базис пространства  $W$ . Для каждого  $j = \overline{1, n}$  образ  $\varphi(e_j)$  вектора  $e_j \in \mathcal{E}$  принадлежит пространству  $W$ , а значит, его можно разложить по базису  $\mathcal{F}$  этого пространства:

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i.$$

Матрица  $A$  порядка  $m \times n$  с элементами  $a_{i,j}$  называется **матрицей линейного отображения относительно базисов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$** . Другими словами, столбцы матрицы линейного отображения (в их естественном порядке) — это столбцы координат векторов  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  в базисе  $\mathcal{F}$ .

Для произвольного вектора  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  из пространства  $V$  разложим его образ  $y = \varphi(x)$  по базису  $\mathcal{F}$  пространства  $W$ :

$$y = \sum_{i=1}^m y_i f_i.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right) f_i. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора по базису отсюда получаем, что

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

для каждого  $i = \overline{1, m}$  или в матричной форме

$$Y = AX, \tag{7.1}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — столбец координат вектора } x \text{ в базисе } \mathcal{E},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ — столбец координат вектора } y = \varphi(x) \text{ в базисе } \mathcal{F}.$$

**Пример 5.** Найдем матрицу ортогонального проектирования из примера 3. В плоскости проектирования выберем любой базис  $\{e_1, e_2\}$  и дополним его ортогональным вектором

$e_3$  до базиса пространства. Так как при проектировании векторы  $e_1$  и  $e_2$  переходят сами в себя, а вектор  $e_3$  — в нуль, то искомая матрица (относительно выбранных базисов) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, обсудим вопрос об изменении матрицы линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  при изменении базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  на базис  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  в пространстве  $V$  и базиса  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  на базис  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m\}$  в пространстве  $W$ . Итак, пусть  $\tilde{A}$  — матрица линейного отображения  $\varphi$  относительно базисов  $\tilde{\mathcal{E}}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Тогда по формуле (7.1) линейное отображение  $\varphi$  в базисах  $\tilde{\mathcal{E}}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}$  запишется так:

$$\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}, \quad (7.2)$$

где  $\tilde{X}$  — столбец координат вектора  $x$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ , а  $\tilde{Y}$  — столбец координат вектора  $y = \varphi(x)$  в базисе  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Если  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  — матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ , а  $S = S_{\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}}$  — матрица перехода от  $\mathcal{F}$  к  $\tilde{\mathcal{F}}$ , то по формуле (1.1) имеем

$$\begin{aligned} X &= T\tilde{X}, \\ Y &= S\tilde{Y}. \end{aligned}$$

Подставим в формулу (7.1) вместо  $X$  и  $Y$  их выражение через  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ :

$$S\tilde{Y} = AT\tilde{X}.$$

Отсюда получаем

$$\tilde{Y} = S^{-1}AT\tilde{X}.$$

Сравнивая полученное выражение с (7.2), находим, что

$$\tilde{A}\tilde{X} = S^{-1}AT\tilde{X}.$$

Так как это равенство верно для любого  $\tilde{X}$ , в частности, для столбца координат каждого базисного вектора  $\tilde{e}_i$ , то получаем равенство матриц

$$\tilde{A} = S^{-1}AT. \quad (7.3)$$

Эта формула называется **формулой преобразования матрицы линейного отображения  $\varphi$  при переходе к другим базисам**. В частности, из этой формулы и леммы 4.1 получаем, что ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов. Он называется **рангом линейного отображения  $\varphi$** .

В отличие от изоморфизма линейное отображение не обязано быть ни сюръективным, ни инъективным. Нарушение этих свойств приводит к возможности связать с каждым линейным отображением два подпространства — его образ и ядро.

**Определение 7.2.** **Образом** линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  называется подмножество

$$\text{Im } \varphi = \{y \in W \mid \exists x \in V, \quad y = \varphi(x)\} \subset W,$$

а **ядром** — подмножество

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\} \subset V.$$

**Утверждение 7.1.** *Образ  $\text{Im } \varphi$  является подпространством в пространстве  $W$ , а ядро  $\text{Ker } \varphi$  является подпространством в  $V$ .*

*Доказательство.* Так как  $\varphi(0) = 0$ , то  $\text{Im } \varphi$  и  $\text{Ker } \varphi$  — непустые подмножества. Остается только проверить, что эти подмножества замкнуты относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число.

Сначала, проверим замкнутость  $\text{Im } \varphi$  относительно этих операций. Пусть  $y, w$  — произвольные векторы из  $\text{Im } \varphi$ , т. е. найдутся такие  $x, z \in V$ , что

$$\varphi(x) = y, \quad \varphi(z) = w.$$

Тогда имеем

$$y + w = \varphi(x) + \varphi(z) = \varphi(x + z).$$

Так как  $x + z \in V$ , это означает, что  $y + w \in \text{Im } \varphi$ . Далее для любого  $\lambda \in F$  получаем

$$\lambda y = \lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x).$$

Так как  $\lambda x \in V$ , это означает, что  $\lambda y \in \text{Im } \varphi$ .

Теперь рассмотрим ядро  $\text{Ker } \varphi$ . Если  $x, z$  — произвольные векторы из  $\text{Ker } \varphi$ , то

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(z) = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(x + z) = \varphi(x) + \varphi(z) = 0 + 0 = 0$$

и для любого  $\lambda \in F$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda 0 = 0,$$

что означает, что  $x + z, \lambda x \in \text{Ker } \varphi$ . ■

**Пример 6.** Ядром отображения проектирования из примера 3 является совокупность векторов, ортогональных плоскости проектирования, а образом — вся плоскость проектирования.

**Пример 7.** Ядром отображения дифференцирования из примера 4 является совокупность постоянных функций, а образом — пространство всех непрерывных функций. Последнее следует из существования первообразной у каждой непрерывной функции, доказанного в курсе «Математический анализ».

**Утверждение 7.2.** *Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ .*

*Доказательство.* Так как  $\varphi(0) = 0$ , то из инъективности  $\varphi$  следует, что  $\varphi(x) \neq 0$  для любого ненулевого вектора  $x$ , т.е.  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ .

Обратно, пусть  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ . Допустим, что  $\varphi$  не инъективно. Тогда существуют различные векторы  $x$  и  $y$  из  $V$  такие, что  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Отсюда в силу линейности отображения  $\varphi$  имеем  $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0$ . Значит,  $x - y \in \text{Ker } \varphi = \{0\}$ , т.е.  $x - y = 0$ . Это противоречит тому, что  $x$  и  $y$  — различные векторы. ■

**Утверждение 7.3.** *Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — произвольное инъективное линейное отображение,  $\{v_1, \dots, v_k\}$  — произвольная линейно независимая система векторов из  $V$ . Тогда  $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)\}$  — также линейно независимая система векторов.*

*Доказательство.* Допустим  $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)\}$  — линейно зависимая система векторов. Тогда найдутся не все равные нулю числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  такие, что

$$\lambda_1 \varphi(v_1) + \dots + \lambda_k \varphi(v_k) = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = 0.$$

Из инъективности отображения  $\varphi$  получаем равенство

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0,$$

которое противоречит линейной независимости системы  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . ■

Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение конечномерного пространства  $V$  в пространство  $W$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис пространства  $V$ . Для любого

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$$

имеем

$$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n).$$

Следовательно,

$$\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle. \quad (7.4)$$

**Утверждение 7.4.** Для любого линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  конечномерного пространства  $V$  верно

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V.$$

*Доказательство.* Выберем базис пространства  $V$  специальным образом: сначала выберем базис  $\{e_1, \dots, e_k\}$  в  $\text{Ker } \varphi$ , а затем дополним его какими-нибудь векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$  до базиса всего пространства  $V$  (теорема 1.3). Так как по построению

$$\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0,$$

то из (7.4) следует, что

$$\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle.$$

Докажем, что векторы  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Пусть

$$\lambda_1 \varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_{n-k} \varphi(e_n) = 0. \quad (7.5)$$

Рассмотрим вектор

$$x = \lambda_1 e_{k+1} + \dots + \lambda_{n-k} e_n.$$

Равенство (7.5) означает, что  $\varphi(x) = 0$ , т.е.

$$x \in \text{Ker } \varphi = \langle e_1, \dots, e_k \rangle.$$

Так как  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  линейно независимы, то это возможно только при

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-k} = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис пространства  $V$ ,  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  — произвольный базис пространства  $W$ , а  $A$  — матрица линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  относительно базисов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ . Так как столбцы матрицы  $A$  — это координаты векторов  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  в базисе  $\mathcal{F}$ , то из (7.4) следует, что

$$\dim \text{Im } \varphi = \text{rk } A. \quad (7.6)$$

Далее, образом  $\varphi(x)$  произвольного вектора  $x$  со столбцом координат  $X$  в базисе  $\mathcal{E}$  является вектор, столбец координат которого в базисе  $\mathcal{F}$  является  $AX$ . Поэтому

$$x \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow AX = 0.$$

Следовательно,  $\text{Ker } \varphi$  — это множество векторов, столбцы координат которых в базисе  $\mathcal{E}$  составляют пространство решений однородной системы линейных уравнений с  $n$  неизвестными и матрицей коэффициентов  $A$ . Согласно доказанному в 1-ом семестре утверждению о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений,

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - \text{rk } A.$$

Эти рассуждения, в частности, дают другое доказательство утверждения 7.4 для конечномерных пространств  $V$  и  $W$ .

## 7.2. Матрицы линейного оператора

Перейдем теперь к случаю, когда  $V = W$ .

**Определение 7.3.** *Линейным оператором* (или *линейным преобразованием*) векторного пространства  $V$  над полем  $F$  называется линейное отображение пространства  $V$  в себя.

Более подробно, линейный оператор — это отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , удовлетворяющее условиям:

- 1)  $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$  для любых  $x, y \in V$ ;
- 2)  $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$  для любых  $\lambda \in F, x \in V$ .

(Мы будем обозначать линейные операторы рукописными заглавными латинскими буквами, а соответствующие им матрицы — курсивными заглавными буквами.)

В отличие от определения матрицы линейного отображения при определении матрицы линейного оператора принято брать лишь один базис.

**Определение 7.4.** *Матрицей линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  в базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  называется квадратная матрица  $A = (a_{i,j})$ , определяемая из равенства*

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i.$$

Иначе говоря, в  $j$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты вектора  $\mathcal{A}e_j$  в базисе  $\mathcal{E}$ .

Как и любое линейное отображение, линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  однозначно определяется образами базисных векторов пространства  $V$ . В самом деле, для любого вектора  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  имеем

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}e_i.$$

С другой стороны, для любых векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$  существует единственный линейный оператор  $\mathcal{A}$ , переводящий базисные векторы  $e_1, \dots, e_n$  в  $v_1, \dots, v_n$  соответственно. Это оператор, переводящий вектор  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  в вектор  $\sum_{i=1}^n x_i v_i$ . Следовательно, линейный оператор однозначно определяется своей матрицей, и любая квадратная матрица порядка  $n$  является матрицей некоторого линейного оператора (в данном базисе).

Как и для линейного отображения, получим явное выражение координат образа  $y = \mathcal{A}x$  вектора  $x \in V$  в базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . При  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  имеем

$$y = \mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n x_j \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) e_i,$$

где

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

В силу единственности разложения вектора по базису отсюда получаем, что

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

для каждого  $i = \overline{1, n}$  или в матричной форме

$$Y = AX, \quad (7.7)$$

где

$$A = (a_{i,j}) \text{ — матрица линейного оператора } \mathcal{A} \text{ в базисе } \mathcal{E},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ — столбцы координат векторов } x, y \text{ в базисе } \mathcal{E}.$$

Пусть  $\tilde{\mathcal{E}}$  — еще один базис пространства  $V$ ,  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ ,  $\tilde{A}$  — матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Тогда согласно формуле (7.3),

$$\tilde{A} = T^{-1}AT. \quad (7.8)$$

Аналогично как и для линейного отображения, **рангом**  $\text{rk } \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  называется ранг матрицы этого оператора в произвольном базисе. Это определение корректно, так как по формуле (7.8) и лемме 4.1 ранг матрицы линейного оператора не изменяется при переходе к другому базису. **Определителем**  $\det \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  называется определитель матрицы этого оператора в произвольном базисе. Это определение также корректно, так как учитывая формулу (7.8) и свойства определителя, имеем

$$\det \tilde{A} = \det T^{-1}AT = \det T^{-1} \det A \det T = (\det T)^{-1} \det T \det A = \det A.$$

На множестве  $\text{End } V$  всех линейных операторов векторного пространства  $V$  над полем  $F$  имеются алгебраические операции: произведение (композиция) линейных операторов

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})v = \mathcal{A}(\mathcal{B}v),$$

сумма линейных операторов

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})v = \mathcal{A}v + \mathcal{B}v$$

и умножение линейного оператора на число  $\lambda$  из  $F$

$$(\lambda\mathcal{A})v = \lambda(\mathcal{A}v).$$

При этом удовлетворяются все аксиомы алгебры, т.е. кольца и, в то же время, векторного пространства с аксиомой согласования  $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ . Как известно из первого семестра, другим примером алгебры является множество  $M_n(F)$  всех квадратных матриц фиксированного произвольного порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $F$ . Две алгебры  $\mathfrak{A}$  и  $\tilde{\mathfrak{A}}$  называются изоморфными, если существует изоморфизм колец из первой алгебры во вторую, являющийся одновременно и изоморфизмом векторных пространств. Пишем  $\mathfrak{A} \cong \tilde{\mathfrak{A}}$ .

**Утверждение 7.5.** Для любого  $n$ -мерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$  выполняется

$$\text{End } V \cong M_n(F).$$

*Доказательство.* Зафиксируем базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  в векторном пространстве  $V$ . И рассмотрим отображение  $\Phi : \text{End } V \rightarrow M_n(F)$ , сопоставляющее каждому линейному оператору  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  его матрицу  $A$  в базисе  $\mathcal{E}$ .

Так как любой линейный оператор однозначно определяется своей матрицей, и любая квадратная матрица порядка  $n$  является матрицей некоторого линейного оператора (в данном базисе), отображение  $\Phi$  биективно.

Далее пусть  $\Phi(\mathcal{A}) = A = (a_{i,j})$ ,  $\Phi(\mathcal{B}) = B = (b_{i,j})$ ,  $\Phi(\mathcal{C}) = C = (c_{i,j})$ , где  $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ . Тогда для любого  $k = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} Ce_k &= (\mathcal{A}\mathcal{B})e_k = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n b_{j,k}e_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{j,k}\mathcal{A}e_j = \\ &= \sum_{j=1}^n b_{j,k}\left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}\right)e_i. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$Ce_k = \sum_{i=1}^n c_{i,k}e_i.$$

Откуда в силу единственности разложения вектора по базису получаем, что

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}, \quad i, k = \overline{1, n},$$

что в матричной форме означает

$$C = AB.$$

Таким образом,  $\Phi(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B})$ .

Аналогично проверяется, что  $\Phi(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\Phi(\mathcal{A})$  и  $\Phi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A}) + \Phi(\mathcal{B})$ . ■

**Следствие 7.1.** Для любого конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$  выполняется

$$\dim \text{End } V = (\dim V)^2.$$

**Определение 7.5.** Линейный оператор  $\mathcal{B}$  называется **обратным** к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , если

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I},$$

где  $\mathcal{I}$  — тождественный оператор.

Оператор, обратный к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , обозначается  $\mathcal{A}^{-1}$ .

Не для всякого линейного оператора существует обратный. Например, линейный оператор, проектирующий трехмерное пространство на плоскость, очевидно, не имеет обратного.

С понятием обратного линейного оператора связано понятие обратной матрицы. Матрица  $A^{-1}$  называется обратной к квадратной матрице  $A$ , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где  $E$  — единичная матрица. Из первого семестра знаем, что квадратная матрица  $A$  имеет обратную тогда и только тогда, когда  $\det A \neq 0$ . Так как при заданном базисе между матрицами и линейными операторами имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операцию умножения, то для того, чтобы линейный оператор  $\mathcal{A}$  имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в каком-нибудь базисе имела бы определитель, отличный от нуля, т.е. имела бы ранг  $n$ . Если линейный оператор имеет обратный,

то он называется **невыврожденным**. В противном случае линейный оператор называется **вырожденным**. Таким образом, в силу равенства (7.6) получаем, что *линейный оператор вырожден тогда и только тогда, когда  $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} < n$* . Также в силу утверждения 7.4 имеем, что *линейный оператор вырожден тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{0\}$* .

Имея в виду возможность совершения над матрицами и линейными операторами всех естественных операций, дадим следующее

**Определение 7.6.** Пусть  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m \in F[t]$  — многочлен от переменной  $t$  с коэффициентами из поля  $F$ ,  $\mathcal{A}$  — линейный оператор векторного пространства  $V$ . Тогда  $f(\mathcal{A})$  определяется формулой

$$f(\mathcal{A}) = \alpha_0 \mathcal{I} + \alpha_1 \mathcal{A} + \dots + \alpha_m \mathcal{A}^m,$$

где  $\mathcal{I}$  — тождественный оператор. В случае матрицы  $A \in M_n(F)$  значение многочлена  $f(t)$  от матрицы  $A$  определяется формулой

$$f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_m A^m,$$

где  $E$  — единичная матрица.

**Пример 8.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \dots, A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m$ , то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix}.$$

Аналогичное равенство можно получить для любой диагональной матрицы.

### 7.3. Инвариантные подпространства

Основным вопросом теории линейных операторов является вопрос о возможности приведения матрицы такого оператора к наиболее простому виду. При этом важную роль играет следующее понятие.

**Определение 7.7.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор в векторном пространстве  $V$ . Подпространство  $U \subset V$  называется **инвариантным** относительно оператора  $\mathcal{A}$ , если  $\mathcal{A}u \in U$  для любого вектора  $u \in U$ .

Пишут  $\mathcal{A}U \subset U$ .

Ограничение  $\mathcal{A}|_U$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  на инвариантное подпространство  $U$  является линейным оператором в  $U$ .

Тривиальными инвариантными подпространствами являются подпространство, состоящее лишь из нуля, и все пространство.

*Образ  $\operatorname{Im} \mathcal{A}$  и ядро  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  являются инвариантными подпространствами относительно  $\mathcal{A}$ .* Действительно, пусть  $y \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ . Тогда  $\mathcal{A}y \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$  в силу определения  $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ . Точно так же, если  $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}x = 0 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ . Этот простой факт будет использоваться в дальнейшем при приведении произвольного линейного оператора к простейшему виду.

**Утверждение 7.6.** Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$  — базис векторного пространства  $V$ ,  $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_m\}$  — базис инвариантного подпространства  $U \subset V$  относительно линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Тогда в базисе  $\mathcal{E}$  матрица для  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $A_1$  — матрица ограничения оператора  $\mathcal{A}$  на  $U$ .

Если, дополнительно,  $W = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$  — инвариантное подпространство относительно  $\mathcal{A}$ ,  $A_2$  — матрица ограничения оператора  $\mathcal{A}$  на  $W$ , то  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Непосредственная проверка: по определению,  $j$ -й столбец матрицы линейного оператора есть набор координат образа  $j$ -го базисного вектора относительно этого же базиса. Остается применить определение инвариантного подпространства. ■

Более общо, если пространство  $V$  разложено в прямую сумму  $k$  инвариантных подпространств  $V_1, \dots, V_k$ , то в базисе пространства  $V$ , составленного из базисов этих подпространств, матрица линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

где  $A_i$  — матрица ограничения  $\mathcal{A}|_{V_i}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_i$ . В частности, если все  $V_i = \langle e_i \rangle$  одномерны, то матрица  $A$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , составленном из базисов для  $V_1, \dots, V_n$ , является диагональной

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Определение 7.8.** Оператор, матрица которого в некотором базисе диагональна, называется **диагонализируемым**.

При этом базисные векторы  $e_1, \dots, e_n$  обладают следующим важным свойством:

$$\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

# Глава 8. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

## 8.1. Характеристический многочлен

Как было уже отмечено, основная задача теории линейных операторов состоит в приведении матрицы линейного оператора к возможно более простому виду за счет выбора подходящего базиса. Для этого полезно знать инвариантные подпространства. Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства. Их рассмотрение приводит к понятию собственного вектора.

**Определение 8.1.** Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ . Вектор  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , называется **собственным** для линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , если  $\mathcal{A}v = \lambda v$  для подходящего числа  $\lambda \in F$ . При этом  $\lambda$  называется **собственным значением** для  $\mathcal{A}$ , отвечающим собственному вектору  $v$ .

Нетрудно проверить, что если  $v$  — собственный вектор, то векторы  $\alpha v$ , где  $\alpha \in F$ , образуют одномерное инвариантное подпространство. Обратно, все отличные от нуля векторы одномерного инвариантного подпространства являются собственными.

В базисе, состоящем из собственных векторов (если таковой существует), матрица оператора диагональна (причем диагональные элементы матрицы — собственные значения). Верно и обратное: если матрица линейного оператора в некотором базисе диагональна, то векторы этого базиса являются собственными для данного оператора.

Таким образом, *линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  диагонализуем тогда и только тогда, когда в пространстве  $V$  есть базис из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$* . Этим объясняется важность понятия собственного вектора и собственного значения для теории линейных операторов.

**Пример 1.** Для оператора дифференцирования в пространстве многочленов единственным с точностью до пропорциональности собственным вектором является многочлен 1 (причем собственное значение равно 0). Таким образом, в этом случае из собственных векторов нельзя составить базис.

**Пример 2.** Собственные векторы поворота на угол  $\alpha \neq k\pi$  в трехмерном пространстве — это векторы, лежащие на оси поворота, причем соответствующее им собственное значение равно 1. При  $\alpha = k\pi$  собственными (с собственным значением  $(-1)^k$ ) являются также векторы, ортогональные оси поворота. Таким образом, базис из собственных векторов в этом примере существует только тогда, когда  $\alpha = 0$  или  $\pi$  (если считать, что  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ).

Множество собственных значений линейного оператора называется его *спектром*. Для нахождения спектра линейного оператора необходимо ввести понятие характеристического многочлена.

**Определение 8.2.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$ ,  $\mathcal{E}$  — некоторый базис в  $V$ ,  $A$  — матрица для  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{E}$ . Тогда многочлен степени  $n$  от переменной  $t$  вида

$$\chi_A(t) = \det(A - tE)$$

### Содержание

называется *характеристическим многочленом матрицы  $A$* , а уравнение

$$\chi_A(t) = 0$$

называется *характеристическим уравнением матрицы  $A$* .

**Утверждение 8.1.** Если  $A$  и  $\tilde{A}$  — матрицы линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  соответственно, то характеристические многочлены этих матриц совпадают.

*Доказательство.* Если  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ , то учитывая формулу (7.8), имеем

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A} - tE) &= \det(T^{-1}AT - tE) = \det(T^{-1}AT - tT^{-1}ET) = \\ &= \det(T^{-1}(A - tE)T) = (\det T^{-1}) \det(A - tE) (\det T) = \det(A - tE), \end{aligned}$$

как и требовалось. ■

**Определение 8.3.** *Характеристическим многочленом  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$  назовем характеристический многочлен  $\chi_A(t)$  матрицы  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе, а уравнение*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = 0$$

назовем *характеристическим уравнением линейного оператора  $\mathcal{A}$* .

Таким образом, утверждение 8.1 означает следующее:

**Утверждение 8.2.** *Определение характеристического многочлена линейного оператора корректно, т.е. не зависит от выбора базиса.*

Замечательным следствием этого утверждения является то, что коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами линейного оператора. Например, коэффициент при  $t^{n-1}$  равен  $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ , откуда вытекает, что *след линейного оператора является его инвариантом.*

**Теорема 8.1.** *Число  $\lambda \in F$  является собственным для линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  тогда и только тогда, когда  $\lambda$  — корень характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ . Рассмотрим какой-нибудь базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ . И пусть  $A$  — матрица для  $\mathcal{A}$  в этом базисе. Тогда  $\det(A - \lambda E) = 0$ , т.е. матрица  $A - \lambda E$  является вырожденной. Из первого семестра известно, что в этом случае однородная система линейных уравнений  $(A - \lambda E)X = 0$  имеет ненулевое решение  $X = (x_1^0, \dots, x_n^0)^t$ . Значит, для ненулевого вектора  $x = x_1^0 e_1 + \dots + x_n^0 e_n$  выполняется  $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})x = 0$  или  $\mathcal{A}x = \lambda x$ , так что  $x$  — собственный вектор для  $\mathcal{A}$  с собственным значением  $\lambda$ . Для доказательства обратного утверждения достаточно прочитать только что написанное в обратном порядке. ■

## 8.2. Комплексные собственные значения

По основной теореме алгебры комплексных чисел (из первого семестра) каждый многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет корень, поэтому из теоремы 8.1 получаем

**Следствие 8.1.** *Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над полем комплексных чисел имеет собственный вектор.*

Линейный оператор в вещественном векторном пространстве может не иметь собственных векторов, как показывает пример поворота плоскости на угол  $\alpha \neq 0, \pi$ . Однако использование комплексных чисел позволяет получить полезную информацию и о линейных

операторах над полем вещественных чисел. Это достигается с помощью комплексификации (смотри параграф 6.3).

Пусть  $V$  — конечномерное пространство над  $\mathbb{R}$ , а  $V^{\mathbb{C}}$  — его комплексификация. Любой линейный оператор  $\mathcal{A}$  в пространстве  $V$  однозначно продолжается до линейного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в пространстве  $V^{\mathbb{C}}$ :

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y.$$

При этом в базисе, составленном из вещественных векторов, оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  имеет такую же матрицу, как и оператор  $\mathcal{A}$ .

Оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  может иметь мнимые собственные значения и соответствующие им мнимые собственные векторы. Какой смысл они имеют в вещественных терминах?

**Утверждение 8.3.** Пусть вектор  $x + iy$  ( $x, y \in V$ ) является собственным вектором оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  с мнимым собственным значением  $\lambda + i\mu$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$ ). Тогда  $U = \langle x, y \rangle \subset V$  — двумерное инвариантное подпространство для  $\mathcal{A}$ , причем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= \lambda x - \mu y, \\ \mathcal{A}y &= \mu x + \lambda y. \end{aligned} \tag{8.1}$$

*Доказательство.* Имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) &= (\lambda + i\mu)(x + iy) \\ &\Downarrow \\ \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y &= (\lambda x - \mu y) + i(\mu x + \lambda y) \\ &\Downarrow \\ \begin{cases} \mathcal{A}x &= \lambda x - \mu y, \\ \mathcal{A}y &= \mu x + \lambda y, \end{cases} \end{aligned}$$

т.е.  $U = \langle x, y \rangle$  — инвариантное подпространство для  $\mathcal{A}$ . Докажем, что  $x, y$  — линейно независимые векторы в  $V$ . Действительно, если  $x, y$  линейно зависимы над  $\mathbb{R}$ , то  $x + iy = \gamma z$ , где  $z \in V, \gamma \in \mathbb{C}$  и  $z$  является собственным вектором оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  с тем же собственным значением  $\lambda + i\mu$ , что невозможно при  $\mu \neq 0$ . ■

Равенство (8.1) означает, что в базисе  $\{x, y\}$  пространства  $U$  оператор  $\mathcal{A}|_U$  имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Оператор  $\mathcal{A}$  поворота евклидовой плоскости на угол  $\alpha$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор  $e_1 + ie_2$  является собственным вектором оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  с собственным значением  $\cos \alpha - i \sin \alpha$ , а вектор  $e_1 - ie_2$  — собственным вектором с собственным значением  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ . Таким образом, матрица поворота может быть приведена к диагональному виду в комплексном пространстве.

В качестве следствия предыдущего утверждения получается важная

**Теорема 8.2.** Для любого линейного оператора  $\mathcal{A}$  над полем вещественных чисел существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

*Доказательство.* Действительно, если характеристический многочлен линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеет хотя бы один вещественный корень, то этот оператор имеет хотя бы один собственный вектор, а следовательно, имеет и одномерное инвариантное подпространство (этим вектором порожденное).

Если же среди корней характеристического многочлена нет вещественных, то есть хотя бы один мнимый корень (по основной теореме алгебры комплексных чисел), а следовательно, по утверждению 8.3 оператор  $\mathcal{A}$  имеет двумерное инвариантное подпространство. ■

### 8.3. Собственные подпространства

Множество  $V_\lambda$  всех собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A}$  с собственным значением  $\lambda$ , объединенных с нулевым вектором, является, очевидно, подпространством в векторном пространстве  $V$ .

**Определение 8.4.** Подпространство  $V_\lambda$  называется *собственным подпространством* оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

Итак, собственное подпространство  $V_\lambda$  состоит из всех векторов  $x \in V$  (в том числе нулевого вектора) таких, что  $\mathcal{A}x = \lambda x$  или  $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})x = 0$ , т.е.  $V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ . Размерность собственного пространства  $V_\lambda$  равна  $n - \text{rk}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ , где  $n = \dim V$ .

**Утверждение 8.4.** Если  $k$  — кратность собственного значения  $\lambda$  линейного оператора  $\mathcal{A}$ , то  $\dim V_\lambda \leq k$ .

*Доказательство.* Допустим,  $\dim V_\lambda = m > k$ . Так как любое собственное подпространство является инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ , применим к  $V_\lambda$  утверждение 7.6. Тогда в базисе, в котором первые  $m$  векторов  $\{e_1, \dots, e_m\}$  образуют базис подпространства  $V_\lambda$ , матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $A_1$  — матрица ограничения оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_\lambda$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_m\}$ . Причем  $A_1$  — квадратная матрица порядка  $m$ , равная  $\lambda E$  в силу того, что все векторы в  $V_\lambda$  и, в частности,  $e_1, \dots, e_m$  — собственные векторы с собственным значением  $\lambda$ . Вычислим характеристический многочлен линейного оператора  $\mathcal{A}$ , используя теорему об определителе с углом нулей из 1-го семестра:

$$\begin{aligned} \det(A - tE) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - tE & C \\ 0 & B - tE \end{pmatrix} = \\ &= \det(A_1 - tE) \det(B - tE) = (\lambda - t)^m \det(B - tE). \end{aligned}$$

Отсюда по определению кратности следует, что кратность корня  $\lambda$  не меньше, чем  $m$ , что противоречит предположению о том, что кратность корня  $\lambda$  равна  $k$ . ■

Отметим, что собственному значению кратности  $k$  может отвечать собственное подпространство размерности, меньше, чем  $k$ . Например, линейный оператор в двумерном пространстве, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеет единственное собственное значение  $\lambda = 1$ , кратность этого собственного значения равна 2, а размерность отвечающего ему собственного подпространства равна одному. (Проверьте это!)

Важным утверждением о собственных векторах линейного оператора является следующее

**Утверждение 8.5.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор векторного пространства  $V$ ,  $v_1, \dots, v_m$  — собственные векторы с попарно различными собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Тогда  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы.

*Доказательство.* Докажем утверждение индукцией по  $m$ . При  $m = 1$  доказывать нечего. Пусть  $m > 1$ . Если

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

— нетривиальная линейная комбинация, то все ее коэффициенты  $\alpha_i$  отличны от нуля в силу предположения индукции. Применим к обеим частям равенства линейный оператор  $\mathcal{A}$ . Получим

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0.$$

Умножая первое равенство на  $(-\lambda_1)$  и прибавляя ко второму, получим линейную комбинацию векторов  $v_2, \dots, v_m$ :

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0.$$

Так как по предположению индукции векторы  $v_2, \dots, v_m$  линейно независимы, отсюда следует, что  $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0$  для всех  $i = \overline{2, m}$ . Так как все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — попарно различные, сокращаем на  $(\lambda_i - \lambda_1)$  и получаем, что  $\alpha_i = 0$  для всех  $i = \overline{2, m}$ , противоречие. ■

**Следствие 8.2.** Сумма собственных подпространств является прямой суммой.

Заметим, что в общем случае сумма всех собственных подпространств, отвечающих всем различным собственным значениям линейного оператора, не обязана совпадать со всем векторным пространством  $V$ .

**Следствие 8.3.** Если характеристический многочлен линейного оператора

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  имеет  $n$  различных корней, то существует базис из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Каждому корню  $\lambda_i$  характеристического многочлена отвечает хотя бы один собственный вектор. Так как соответствующие этим векторам собственные значения (корни характеристического уравнения) все различны, то согласно утверждению 8.5 мы имеем  $n$  линейно независимых собственных векторов, которые и будут образовывать искомый базис. ■

Условие, указанное в следствии 8.3, не является необходимым для существования базиса из собственных векторов. Так, для тождественного оператора  $\mathcal{I}$  все векторы являются собственными, и, стало быть, любой базис состоит из собственных векторов, однако его характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{I}}(t) = (1-t)^n$  имеет единственный (но  $n$ -кратный) корень 1.

**Теорема 8.3.** Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$  размерности  $n$ . Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  разлагается на линейные множители;
- 2) размерность каждого собственного подпространства равна кратности соответствующего корня характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  — все различные корни характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  и  $k_1, \dots, k_s$  — их кратности. Для каждого  $i = \overline{1, s}$  через  $V_{\lambda_i}$  обозначим собственное подпространство, отвечающее собственному значению  $\lambda_i$ . В этих обозначениях условие 1) теоремы записывается, как  $\sum_{i=1}^s k_i = n$ , а условие 2) означает, что  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ .

Пусть существует базис  $\mathcal{E}$  из собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Для каждого  $i = \overline{1, s}$  рассмотрим линейную оболочку  $V_i$  всех векторов из базиса  $\mathcal{E}$ , которые отвечают собственному значению  $\lambda_i$ . Имеем,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ . Также, очевидно,  $V_i \subset V_{\lambda_i}$ . Учитывая, что сумма собственных подпространств является прямой (Следствие 8.2), получаем, что

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s \subset V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} \subset V.$$

Таким образом,  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$ . По утверждению 8.4  $\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ , и, значит, учитывая, что размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей слагаемых (Следствие 1.1),

$$n = \dim V = \sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^s k_i \leq n.$$

Что возможно только в случае, когда  $\sum_{i=1}^s k_i = n$  и  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$  для всех  $i = \overline{1, s}$ .

Обратно, пусть  $\sum_{i=1}^s k_i = n$  и  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$ . Учитывая следствие 8.2 и следствие 1.1, имеем

$$\dim V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} = \sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^s k_i = n = \dim V.$$

Следовательно, по теореме 1.4 получаем, что  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$ . Значит, объединение базисов из собственных подпространств  $V_{\lambda_i}$ , даст базис для всего пространства  $V$ . Этот базис и будет искомым. ■

## 8.4. Приведение линейного оператора к треугольному виду

При рассмотрении вопросов о приведении матриц линейных операторов к удобному виду нам придется накладывать ограничение на поле  $F$ , состоящее в алгебраической замкнутости поля.

**Определение 8.5.** Поле называется *алгебраически замкнутым*, если всякий многочлен положительной степени над этим полем имеет хотя бы один корень.

**Пример 4.** Из основной теоремы алгебры комплексных чисел (из первого семестра) следует, что поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто.

На примере поля действительных чисел видно, что не всякое поле является алгебраически замкнутым. Впрочем, приведем без доказательства следующий факт:

*Каждое поле  $F$  может быть рассмотрено (с точностью до изоморфизма!) как подполе алгебраически замкнутого поля  $K$ .*

Это позволяет любой линейный оператор, действующий в векторном пространстве размерности  $n$  над полем  $F$  рассмотреть как оператор, действующий в векторном пространстве той же размерности над полем  $K$ . Это соображение уже было нами использовано в разделе 8.2, когда линейный оператор  $\mathcal{A}$  в вещественном пространстве  $V$  был продолжен до линейного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в комплексном пространстве  $V^{\mathbb{C}}$ , комплексификации пространства  $V$ . При этом в базисе, составленном из вещественных векторов, оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  имел такую же матрицу, как и оператор  $\mathcal{A}$ . Аналогичное имеем и в общем случае. Причем,

в силу изоморфизма пространств одной и той же размерности, достаточно рассмотреть вложение векторных пространств  $F^n \subset K^n$ . Если  $\mathcal{A} : F^n \rightarrow F^n$  — линейный оператор,  $A$  — его матрица в базисе из единичных строк, то те же векторы образуют базис и в  $K^n$  и можно продолжить действие линейного оператора  $\mathcal{A}$  до оператора  $\mathcal{A}_K$  на  $K^n$ , считая матрицей нового оператора все ту же матрицу  $A$  в указанном базисе векторного пространства  $K^n$ . Фактически действие обоих операторов на векторах - столбцах состоит в умножении на матрицу  $A$ .

**Теорема 8.4.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор конечномерного векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда существует базис  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ , в котором матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  является треугольной.

*Доказательство.* Докажем утверждение теоремы индукцией по  $n = \dim V$ . При  $n = 1$  доказывать нечего. Пусть  $n > 1$ .

Отметим, что согласно формуле (7.8) на матричном языке утверждение теоремы эквивалентно тому, что для любой квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  над полем  $F$  существует невырожденная матрица  $T$  порядка  $n$  такая, что матрица  $\tilde{A} = T^{-1}AT$  — треугольная.

Рассмотрим характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  для  $\mathcal{A}$ . В силу алгебраической замкнутости поля  $F$  у него есть корень  $\lambda$ . По теореме 8.1 это означает, что у линейного оператора  $\mathcal{A}$  есть собственный вектор  $e_1$  с собственным значением  $\lambda$ . Так как  $e_1$  — ненулевой вектор, к нему можно применить теорему 1.3 и дополнить  $e_1$  векторами  $e_2, \dots, e_n$  до базиса  $\mathcal{E}$  в  $V$ . Так как  $U = \langle e_1 \rangle$  является одномерным инвариантным подпространством, по утверждению 7.6 матрица  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\mathcal{E}$  будет состоять из четырех блоков:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $u$  — строка длины  $n - 1$ ,  $B$  — квадратная матрица порядка  $n - 1$ .

По предположению индукции найдется невырожденная матрица  $S$  порядка  $n - 1$  такая, что  $D = S^{-1}BS$  — треугольная матрица. Построим квадратную матрицу  $T$  порядка  $n$  из четырех блоков

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

с разбиением таким же, как и для  $A$ . Полученная матрица  $T$  — невырожденная, так как по теореме об определителе матрицы с углом нулей, доказанной в первом семестре,  $\det T = \det S \neq 0$ . Причем, используя правило сокращенного умножения блочных матриц, имеем

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}$$

и далее

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & S^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & uS \\ 0 & S^{-1}BS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & uS \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что полученная матрица  $\tilde{A}$  — треугольная. Теорема доказана в силу сделанного замечания о матрицах. Отметим, что при этом матрица  $T$  — матрица перехода из базиса  $\mathcal{E}$  к искомому базису  $\mathcal{F}$ . ■

Заметим, что если поле не алгебраически замкнуто, то базиса, в котором матрица линейного оператора является треугольной, может и не быть, так как он предполагает наличие хотя бы одного собственного вектора. В качестве примера можно опять рассмотреть поворот евклидовой плоскости на угол  $\alpha \neq 0, \pi$ .

Также заметим, что у одного и того же линейного оператора может быть много треугольных видов:

**Пример 5.** Рассмотрим трехмерное пространство  $V$  и базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  в этом пространстве. Зададим линейный оператор по правилу

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1.$$

Тогда в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  этот линейный оператор имеет треугольную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в базисе  $\{e_1, e_1 + e_2, e_3\}$  — треугольную матрицу другого вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в базисе  $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3\}$  — треугольную матрицу третьего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**ЗАДАЧА.** Используя теорему 8.2, докажите, что над полем  $\mathbb{R}$  любой линейный оператор приводим к блочно-треугольному виду, причем блоки имеют порядок не выше двух.

Одним из замечательных следствий теоремы 8.4 является следующая весьма важная теорема Гамильтона—Кэли.

**Следствие 8.4 (Теорема Гамильтона—Кэли).** *Всякий линейный оператор  $\mathcal{A}$  в конечномерном векторном пространстве  $V$  является корнем своего характеристического многочлена. Иными словами,*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0.$$

*Доказательство.* Прежде всего отметим, что из доказательства утверждения 7.5 следует, что если  $f(t)$  — произвольный многочлен с коэффициентами из  $F$ , то для матрицы  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в произвольном базисе выполняется

$$f(\mathcal{A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(A) = 0.$$

1 случай. Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Как мы знаем (см. утверждение 8.2), характеристический многочлен не зависит от выбора базиса, так что в силу теоремы 8.4 мы имеем право выбрать базис  $\mathcal{F}$ , в котором матрица для  $\mathcal{A}$  имеет треугольный вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

В силу сделанного выше замечания достаточно доказать, что  $\chi_{\mathcal{A}}(\tilde{A}) = 0$ . Вычислим характеристический многочлен в базисе  $\mathcal{F}$ :

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\tilde{A} - tE) = (a_{1,1} - t) \cdot (a_{2,2} - t) \cdot \dots \cdot (a_{n,n} - t).$$

Таким образом, требуется доказать, что

$$(a_{1,1}E - \tilde{A}) \cdot (a_{2,2}E - \tilde{A}) \cdot \dots \cdot (a_{n,n}E - \tilde{A}) = 0.$$

Это можно сделать индукцией по  $n$ . Разобьем матрицу  $\tilde{A}$  на четыре блока:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $u$  — строка длины  $n - 1$ , а  $B$  — треугольная матрица порядка  $n - 1$ :

$$B = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции имеем

$$(a_{2,2}E - B) \cdot \dots \cdot (a_{n,n}E - B) = 0.$$

Используя правило сокращенного умножения блочных матриц, получаем

$$\begin{aligned} (a_{2,2}E - \tilde{A}) \cdot \dots \cdot (a_{n,n}E - \tilde{A}) &= \\ &= \left[ \begin{pmatrix} a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{2,2}E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \right] \cdot \dots \cdot \left[ \begin{pmatrix} a_{n,n} & 0 \\ 0 & a_{n,n}E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} a_{2,2} - a_{1,1} & -u \\ 0 & a_{2,2}E - B \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} a_{n,n} - a_{1,1} & -u \\ 0 & a_{n,n}E - B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \cdot \dots \cdot (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & (a_{2,2}E - B) \dots (a_{n,n}E - B) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \cdot \dots \cdot (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{u}$  — некоторая новая строка длины  $n - 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} (a_{1,1}E - \tilde{A}) \cdot \left[ (a_{2,2}E - \tilde{A}) \cdot \dots \cdot (a_{n,n}E - \tilde{A}) \right] &= \\ &= \left[ \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{1,1}E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \cdot \dots \cdot (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -u \\ 0 & a_{1,1}E - B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \cdot \dots \cdot (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

как и требовалось.

2 случай. Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $F$ , а  $A$  — матрица этого линейного оператора в некотором базисе  $\mathcal{E}$ . Как было отмечено в начале этого раздела, поле  $F$  можно рассматривать как подполе алгебраически замкнутого поля  $K$ , и можно продолжить действие линейного оператора  $\mathcal{A}$  до оператора  $\mathcal{A}_K$  в векторном пространстве  $V_K$  над полем  $K$ , считая матрицей нового оператора все ту же матрицу  $A$  в базисе  $\mathcal{E}$ , рассматриваемого уже как базис векторного пространства  $V_K$ . В силу только что доказанного для алгебраически замкнутого поля, мы можем утверждать, что матрица  $A$  — корень характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}_K}(t) = \det(A - tE)$ , который, очевидно, не зависит от того, рассматриваем ли мы матрицу  $A$  как матрицу с элементами из  $F$  или как матрицу с элементами из  $K$ , и равен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ . ■

Пользуясь теоремой Гамильтона—Кэли, можно свести вычисление любого многочлена  $f \in F[t]$  от линейного оператора  $\mathcal{A}$  к вычислению многочлена степени меньше  $n = \dim V$  от этого оператора. Действительно, разделим  $f$  на  $\chi_{\mathcal{A}}$  с остатком:

$$f(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t)q(t) + r(t), \quad \deg r(t) < n.$$

Тогда

$$f(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}).$$

## 8.5. Минимальный многочлен

Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$ .

**Определение 8.6.** Многочлен  $f(t) \in F[t]$  называется **аннулирующим многочленом** для линейного оператора  $\mathcal{A}$ , если  $f(\mathcal{A}) = 0$ . Аналогично определяется аннулирующий многочлен для матрицы.

Так, по теореме Гамильтона—Кэли любой оператор  $\mathcal{A}$  и соответствующая ему матрица  $A$  (в любом базисе) аннулируется своим характеристическим многочленом.

**Определение 8.7.** Аннулирующий многочлен для линейного оператора  $\mathcal{A}$  (соотв., для матрицы  $A$ ) наименьшей степени со старшим коэффициентом 1 называется **минимальным многочленом** для оператора  $\mathcal{A}$  (соотв., для матрицы  $A$ ) и обозначается  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  (соотв.,  $\mu_A(t)$ ).

Согласно теореме Гамильтона—Кэли,  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$ . Это означает, что степень минимального многочлена не превосходит  $n = \dim V$ . При этом, возможен разброс степени от 1 до  $n$ .

**Пример 6.** Если  $\mathcal{I}$  — тождественный оператор в произвольном  $n$ -мерном пространстве, то  $\mu_{\mathcal{I}}(t) = t - 1$ , т.е.  $\deg \mu_{\mathcal{I}} = 1$ .

**Пример 7.** Если  $\mathcal{A}$  — поворот евклидовой плоскости  $V^2$  на  $\pi/2$ , то  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^2 + 1$ , т.е.  $\deg \mu_{\mathcal{A}} = 2 = \dim V^2$ .

Простейшие свойства минимального многочлена описаны в следующей лемме.

### Лемма 8.1.

- 1) Минимальный многочлен линейного оператора равен минимальному многочлену его матрицы в любом базисе.
- 2) Минимальный многочлен является делителем любого аннулирующего многочлена.
- 3) Минимальный многочлен обладает свойством единственности.
- 4) Наборы корней у минимального многочлена и характеристического многочлена совпадают.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор конечномерного векторного пространства  $V$ .

1) Из доказательства утверждения 7.5 следует, что если  $f(t)$  — произвольный многочлен с коэффициентами из  $F$ , то для матрицы  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в произвольном базисе выполняется

$$f(\mathcal{A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(A) = 0.$$

Откуда и получаем первое утверждение.

2) Второе утверждение вытекает из алгоритма деления с остатком. Пусть  $f(t)$  — произвольный аннулирующий многочлен для  $\mathcal{A}$ . Поделим многочлен  $f(t)$  на минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  с остатком:

$$f(t) = \mu_{\mathcal{A}}(t)q(t) + r(t),$$

при этом для остатка  $r(t)$  должно выполняться  $\deg r(t) < \deg \mu_{\mathcal{A}}(t)$ . Подставляя  $\mathcal{A}$  вместо  $t$ , получаем

$$r(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) - \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = 0 - 0q(\mathcal{A}) = 0,$$

т.е.  $r(t)$  — аннулирующий для  $\mathcal{A}$ . В силу минимальности степени многочлена  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ , получаем, что  $r(t) \equiv 0$ , т.е. деление происходит нацело.

3) Третье утверждение справедливо, так как любой из двух минимальных многочленов линейного оператора делит другой, а их старшие коэффициенты совпадают.

4) Так как характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  является его аннулирующим многочленом, из второго утверждения получаем, что минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  делит  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ . Значит, корни минимального многочлена являются корнями характеристического многочлена. Обратно, пусть  $\lambda$  — корень характеристического многочлена. Тогда у  $\mathcal{A}$  есть собственный вектор  $v$  с собственным значением  $\lambda$ . Применим к вектору  $v$  оператор  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ . С одной стороны, расписав минимальный многочлен явно:

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^k + b_{k-1}t^{k-1} + \dots + b_1t + b_0$$

и подставив линейный оператор  $\mathcal{A}$  вместо переменной  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v &= (\mathcal{A}^k + b_{k-1}\mathcal{A}^{k-1} + \dots + b_1\mathcal{A} + b_0\mathcal{I})v = \\ &= \mathcal{A}^k v + b_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}v + \dots + b_1\mathcal{A}v + b_0\mathcal{I}v = \\ &= \lambda^k v + b_{k-1}\lambda^{k-1}v + \dots + b_1\lambda v + b_0v = \\ &= (\lambda^k + b_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + b_1\lambda + b_0)v = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)v. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$ , имеем

$$\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = 0v = 0.$$

Откуда

$$\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)v = 0.$$

Так как  $v \neq 0$ , число  $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$  равно нулю, т.е.  $\lambda$  — корень минимального многочлена, что и требовалось доказать. ■

В качестве примера применение минимального многочлена сформулируем утверждение, которое будет доказано в разделе 9.3:

*Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$  диагонализировать тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

Напомним, что линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется диагонализированным, если в некотором базисе его матрица диагональна. Существование базиса из собственных векторов эквивалентно диагонализированности.

# Глава 9. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

## 9.1. Основные определения и вспомогательные утверждения

При исследовании линейного оператора, действующего в  $n$ -мерном векторном пространстве над полем  $F$ , желательно выбрать базис так, чтобы матрица линейного оператора имела наиболее простой вид. Если линейный оператор имеет базис из собственных векторов, то его матрица в этом базисе является диагональной. В частности, это верно в случае, когда все корни характеристического уравнения линейного оператора принадлежат полю  $F$  и различны (см. следствие 8.3).

Однако число линейно независимых собственных векторов у линейного оператора может быть меньше, чем  $n$ . Такой оператор заведомо не может иметь диагональную матрицу ни в каком базисе. Возникает вопрос: каков простейший вид матрицы такого линейного оператора?

При рассмотрении этого вопроса нам придется накладывать ограничение на поле  $F$ , состоящее в алгебраической замкнутости поля. При таком ограничении на поле для произвольного линейного оператора в этой главе мы укажем базис, в котором матрица оператора имеет сравнительно простой вид (так называемую жорданову нормальную форму). В случае, когда число линейно независимых собственных векторов оператора равно размерности пространства, эта нормальная форма совпадает с диагональной.

**Определение 9.1.** Квадратная матрица  $J_k(\lambda)$  порядка  $k$  вида

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

называется *жордановой клеткой* порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda$  на диагонали. У этой матрицы все диагональные элементы равны  $\lambda$ , над главной диагональю параллельно ей расположен один ряд из единиц, а все остальные элементы равны нулю. В случае  $k = 1$  рассматриваемая матрица сводится к единственному числу  $\lambda$ .

**Определение 9.2.** Блочно - диагональная матрица  $J$  вида

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

где  $J_{k_i}(\lambda_i)$  — жордановы клетки, называется *жордановой матрицей*.

**Определение 9.3.** Базис векторного пространства  $V$ , в котором матрица  $J$  для линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  является жордановой, называется *жордановым базисом*. При этом матрица  $J$  называется *жордановой нормальной формой* линейного оператора  $\mathcal{A}$ .

**Утверждение 9.1.** Для произвольной жордановой клетки порядка  $k$  с  $\lambda$  на диагонали

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и произвольной жордановой матрицы порядка  $n$

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

где  $J_{k_i}(\lambda_i)$  — жордановы клетки, верно следующее.

1. Характеристический многочлен  $\chi_J(t)$  жордановой матрицы  $J$  равен

$$(-1)^n (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}.$$

2. Минимальный многочлен  $\mu_{J_k(\lambda)}(t)$  жордановой клетки  $J_k(\lambda)$  равен

$$(t - \lambda)^k;$$

минимальный многочлен  $\mu_J(t)$  жордановой матрицы  $J$  равен

$$\text{НОК}(\mu_{J_{k_1}(\lambda_1)}(t), \dots, \mu_{J_{k_s}(\lambda_s)}(t)).$$

*Доказательство.*

1. Сначала посчитаем характеристический многочлен от жордановой клетки. По правилу вычисления определителя от верхней треугольной матрицы имеем:

$$\begin{aligned} \chi_{J_k(\lambda)}(t) = \det(J_k(\lambda) - tE) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - t \end{pmatrix} = \\ &= (\lambda - t)^k = (-1)^k (t - \lambda)^k. \end{aligned}$$

В силу теоремы об определителе матрицы с углом нулей характеристический многочлен от жордановой матрицы представляется в виде произведения характеристических многочленов от жордановых клеток:

$$\begin{aligned} \chi_J(t) = \det(J - tE) &= \det \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) - tE & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) - tE & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) - tE \end{pmatrix} = \\ &= \det(J_{k_1}(\lambda_1) - tE) \det(J_{k_2}(\lambda_2) - tE) \dots \det(J_{k_s}(\lambda_s) - tE) = \\ &= [(-1)^{k_1} (t - \lambda_1)^{k_1}] [(-1)^{k_2} (t - \lambda_2)^{k_2}] \dots [(-1)^{k_s} (t - \lambda_s)^{k_s}] = \\ &= (-1)^{k_1 + \dots + k_s} (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_s)^{k_s} = \\ &= (-1)^n (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}. \end{aligned}$$

2. Так как характеристический многочлен  $\chi_{J_k(\lambda)}(t)$  от жордановой клетки  $J_k(\lambda)$  равен  $(-1)^k(t - \lambda)^k$ , а минимальный многочлен делит характеристический (по теореме Гамильтона — Кэли и лемме 8.1 п. 3), получаем, что  $\mu_{J_k(\lambda)}(t) = (t - \lambda)^l$  для некоторого  $l \leq k$ . Осталось найти наименьшее натуральное  $l$ , при котором  $(J_k(\lambda) - \lambda E)^l = 0$ .

Рассмотрим, что происходит с матрицей  $J_k(\lambda) - \lambda E = J_k(0)$  при возведении ее в степени.

ПРИМЕР для  $k = 4$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что в общем случае (для произвольного  $k$ ) при возведении жордановой клетки  $J_k(0)$  в степени мы будем иметь аналогичную ситуацию: при каждом последующем возведении ряд единиц, параллельный главной диагонали, смещается на один ряд в сторону правого верхнего угла матрицы. При  $m < k$  в жордановой клетке  $J_k(0)^m$  будет  $m$  нулевых строк и  $(k - m)$  ненулевых ступенек. Когда же  $m$  станет равно  $k$ , жорданова клетка станет равной нулю. Таким образом, наименьшее  $l$ , при котором  $(J_k(\lambda) - \lambda E)^l = 0$ , равно  $k$ . Поэтому  $\mu_{J_k(\lambda)}(t) = (t - \lambda)^k$ .

Далее рассмотрим жорданову матрицу  $J$ . Из свойств сокращенного умножения блочных матриц получаем, что

$$\begin{aligned} \mu_J(J) &= \mu_J \left( \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \mu_J(J_{k_1}(\lambda_1)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_J(J_{k_2}(\lambda_2)) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_J(J_{k_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому  $\mu_J(J) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mu_J(J_{k_i}(\lambda_i)) = 0$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ . Учитывая лемму 8.1 п. 3, получаем, что  $\mu_J$  — это многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом, равным 1, который делится нацело на  $\mu_{J_{k_i}(\lambda_i)}$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ . Это означает, что

$$\mu_J(t) = \text{НОК}(\mu_{J_{k_1}(\lambda_1)}(t), \dots, \mu_{J_{k_s}(\lambda_s)}(t)).$$

■

**Утверждение 9.2.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор в  $V$ , для которого существует жорданов базис, а  $J$  — (жорданова)

матрица в этом базисе. Тогда жорданов базис для  $J$  является объединением жордановых базисов для клеток, а для одной клетки  $J_k(\lambda)$  он имеет вид  $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}$ , где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= \lambda e_1, \\ \mathcal{A}(e_2) &= \lambda e_2 + e_1, \\ &\dots \\ \mathcal{A}(e_{k-1}) &= \lambda e_{k-1} + e_{k-2}, \\ \mathcal{A}(e_k) &= \lambda e_k + e_{k-1}. \end{aligned}$$

В частности, если  $\lambda = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= 0, \\ \mathcal{A}(e_2) &= e_1, \\ &\dots \\ \mathcal{A}(e_{k-1}) &= e_{k-2}, \\ \mathcal{A}(e_k) &= e_{k-1}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Следует из того, что по определению матрицы линейного оператора в некотором базисе столбцами этой матрицы являются столбцы координат образов базисных векторов при действии линейного оператора. ■

**Утверждение 9.3.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор в  $V$ , для которого существует жорданов базис, а  $J$  — (жорданова) матрица в этом базисе. И пусть  $V_\mu$  — собственное подпространство для линейного оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающее собственному значению  $\mu$ . Тогда  $\dim V_\mu$  равна числу жордановых клеток в матрице  $J$  с  $\mu$  на диагонали.

*Доказательство.* Размерность собственного подпространства  $V_\mu$  совпадает с размерностью пространства решений системы  $(J - \mu E)X = 0$ , которая равняется  $n - \text{rk}(J - \mu E)$ . В обозначениях (9.1) имеем,  $J - \mu E$  — блочно-диагональная матрица с  $s$  блоками вида

$$J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E = \begin{pmatrix} \lambda_i - \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i - \mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i - \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i - \mu \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\text{rk}(J - \mu E) = \sum_{i=1}^s \text{rk}(J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E),$$

где

$$\text{rk}(J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E) = \begin{cases} k_i, & \text{если } \lambda_i \neq \mu, \\ k_i - 1, & \text{если } \lambda_i = \mu. \end{cases}$$

Так как  $n = \sum_{i=1}^s k_i$ , то

$$n - \text{rk}(J - \mu E) = \sum_{i=1}^s (k_i - \text{rk}(J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E)),$$

где

$$k_i - \text{rk}(J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_i \neq \mu, \\ 1, & \text{если } \lambda_i = \mu. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что  $n - \text{rk}(J - \mu E)$  равно числу жордановых клеток в матрице  $J$  с  $\mu$  на диагонали. ■

## 9.2. Существование жорданова базиса

**Теорема 9.1.** Пусть  $F$  — алгебраически замкнутое поле,  $V$  — конечномерное векторное пространство над  $F$ ,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор в  $V$ . Тогда в  $V$  имеется жорданов базис для  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Будем доказывать теорему индукцией по  $n = \dim V$  с очевидным основанием при  $n = 1$ .

Прежде всего заметим, что если к жордановой матрице (9.1) прибавить произвольную скалярную матрицу  $\alpha E$ , где  $\alpha \in F$ , то она, очевидно, останется жордановой. Поэтому если найдется жорданов базис для оператора  $\mathcal{A}$ , то этот же базис будет являться жордановым и для оператора  $\mathcal{A} + \alpha \mathcal{I}$ .

Это замечание позволяют считать в ходе доказательства шага индукции, что мы имеем дело с вырожденным линейным оператором  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Если это не так, можно заменить  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}$ , где  $\lambda$  — любое собственное значение линейного оператора  $\mathcal{A}$ , которое существует в силу алгебраической замкнутости поля  $F$ .

Рассмотрим образ  $\text{Im } \mathcal{A}$  и ядро  $\text{Ker } \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Поскольку  $\mathcal{A}$  — вырожденный,  $\text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0\}$ . Если  $\text{Ker } \mathcal{A} = V$ , то наличие жорданова базиса очевидно: любой базис жорданов и жорданова форма оператора равна нулевой матрице. Далее считаем, что  $\text{Ker } \mathcal{A} \neq V$ , т.е.

$$0 < \dim \text{Ker } \mathcal{A} < n.$$

Из утверждения 7.4 получаем, что

$$0 < \dim \text{Im } \mathcal{A} < n.$$

Так как ядро и образ инвариантны относительно действия оператора  $\mathcal{A}$ , мы можем рассмотреть ограничение действия оператора  $\mathcal{A}$  на подпространства  $\text{Im } \mathcal{A}$  и  $\text{Ker } \mathcal{A}$ . В подпространстве  $\text{Ker } \mathcal{A}$  все векторы — собственные, отвечающие собственному значению нуль, поэтому любой базис в  $\text{Ker } \mathcal{A}$  является жордановым, и в этом базисе матрица для ограничения  $\mathcal{A}|_{\text{Ker } \mathcal{A}}$  оператора  $\mathcal{A}$  на  $\text{Ker } \mathcal{A}$  — нулевая. По предположению индукции в подпространстве  $\text{Im } \mathcal{A}$  тоже есть жорданов базис для ограничения  $\mathcal{A}|_{\text{Im } \mathcal{A}}$  оператора  $\mathcal{A}$  на  $\text{Im } \mathcal{A}$ .

Как уже упоминалось (утверждение 9.2), жорданов базис для линейного оператора является объединением жордановых базисов для клеток. Запишем жорданов базис для  $\mathcal{A}|_{\text{Im } \mathcal{A}}$ , начиная с  $s$  клеток с собственным значением 0:

$$\mathcal{E} = \{e_{1,1}, \dots, e_{1,k_1}; \dots; e_{s,1}, \dots, e_{s,k_s}; \dots; e_{s+1,1}, \dots, e_{s+1,k_{s+1}}; \dots; e_{m,1}, \dots, e_{m,k_m}\}.$$



Докажем, что система векторов

$$\mathcal{H} = \left\{ f_1; \dots; f_q; e_{1,1}, \dots, e_{1,k_1}, g_1; \dots; e_{s,1}, \dots, e_{s,k_s}, g_s; e_{s+1,1}, \dots, e_{s+1,k_{s+1}}; \dots; e_{m,1}, \dots, e_{m,k_m} \right\}$$

является жордановым базисом для действия линейного оператора  $\mathcal{A}$  на всем пространстве  $V$ .

Сначала, докажем, что  $\mathcal{H}$  — линейно независимая система. Заметим, что, исключив  $g_1, \dots, g_s$ , мы остаемся с базисом  $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{F}$  пространства  $\text{Im } \mathcal{A} + \text{Ker } \mathcal{A}$ , построенным именно так, как это делалось при доказательстве формулы Грассмана (теорема 1.6). Значит, система  $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{F}$  линейно независима. Поэтому в любой нетривиальной линейной комбинации векторов из  $\mathcal{H}$  векторы  $g_1, g_2, \dots, g_s$  входят с коэффициентами, среди которых хотя бы один не равен нулю. Итак, допустим,

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j f_j + \sum_{i \leq s} \beta_i g_i + \sum_{i \leq s} \left( \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_{i,j} e_{i,j} \right) + \sum_{i \geq s+1} \left( \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_{i,j} e_{i,j} \right) = 0,$$

причем не все коэффициенты  $\beta_i$  равны нулю. Применим к этой линейной комбинации линейный оператор  $\mathcal{A}$ :

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j 0 + \sum_{i \leq s} \beta_i e_{i,k_i} + \sum_{i \leq s} \left( \sum_{j=1}^{k_i-1} \gamma_{i,j+1} e_{i,j} \right) + \sum_{i \geq s+1} \left( \lambda_i e_{i,1} + \sum_{j=2}^{k_i} \gamma_{i,j} (\lambda_i e_{i,j} + e_{i,j-1}) \right) = 0$$

и получим равную нулю нетривиальную линейную комбинацию векторов базиса  $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{F}$  пространства  $\text{Im } \mathcal{A} + \text{Ker } \mathcal{A}$ . Это противоречие доказывает линейную независимость системы  $\mathcal{H}$ .

Выше было показано, что количество векторов в системе  $\mathcal{H}$  равно размерности пространства  $V$ . Значит, эта линейно независимая система векторов образует базис в  $V$ .

Осталось доказать, что этот базис является жордановым. Действительно, чтобы получить базис  $\mathcal{H}$  к базису  $\mathcal{E}$  пространства  $\text{Im } \mathcal{A}$  были добавлены  $q$  векторов  $f_1, \dots, f_q$  ядра, т.е. таких, что

$$\mathcal{A}f_i = 0,$$

и  $s$  векторов  $g_1, \dots, g_s$ , удовлетворяющих условию (9.2), которое согласно утверждению 9.2 говорит о том, что система  $\{e_{i,1}, \dots, e_{i,k_i}, g_i\}$  соответствует жордановой клетке порядка  $k_i + 1$  с 0 на диагонали. Поэтому  $\mathcal{H}$  есть объединение жордановых базисов жордановых клеток: если к матрице  $J_{\text{Im } \mathcal{A}}$  добавить  $q$  клеток размера 1 с нулем на диагонали и увеличить на 1 размер всех имевшихся в  $J_{\text{Im } \mathcal{A}}$  клеток с 0 на диагонали, то получится (жорданова) матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\mathcal{H}$ . ■

### 9.3. Единственность жордановой нормальной формы

Для доказательства единственности жордановой нормальной формы линейного оператора нам понадобится следующая лемма.



Матрица  $J$  — блочно-диагональная. По свойству произведения блочных матриц для возведения блочно-диагональной матрицы в степень надо возвести в данную степень каждый блок в отдельности:

$$J^m = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1)^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2)^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s)^m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг блочно-диагональной матрицы  $J^m$  равняется сумме рангов ее блоков. Так как  $n = \sum_{i=1}^s k_i$ , получаем, что

$$n - \text{rk } J^m = \sum_{i=1}^s k_i - \sum_{i=1}^s \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^m = \sum_{i=1}^s \left( k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^m \right).$$

По лемме 9.1 имеем

$$k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^m = \begin{cases} 0, & \text{при } \lambda \neq 0, \quad \forall m, \\ m, & \text{при } \lambda = 0, \quad m < k_i, \\ k_i, & \text{при } \lambda = 0, \quad m \geq k_i; \end{cases}$$

Поэтому в сумме

$$\sum_{i=1}^s \left( k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^m \right)$$

будут нулевыми все слагаемые, за исключением тех, которые соответствуют жордановым клеткам с нулем на диагонали.

В случае, когда  $m = 1$ , каждая жорданова клетка с нулем на диагонали даст слагаемое, равное 1. Всего же жордановых клеток с нулем на диагонали:

$$N_1(0) + N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0),$$

и значит,

$$n - \text{rk } J = \sum_{i=1}^s \left( k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i) \right) = N_1(0) + N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0),$$

и мы получаем первое равенство из (9.4).

При  $m = 2$  каждая жорданова клетка с нулем на диагонали порядка 1 даст слагаемое, равное своему порядку, т.е. 1. Всего же таких клеток  $N_1(0)$ . А каждая жорданова клетка с нулем на диагонали порядка  $k \geq 2$  даст слагаемое, равное 2, и всего таких клеток  $N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0)$ . Поэтому

$$n - \text{rk } J^2 = \sum_{i=1}^s \left( k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^2 \right) = N_1(0) + 2 \left( N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0) \right),$$

и мы получаем второе равенство из (9.4).

Аналогично для  $m = 3$  каждая жорданова клетка с нулем на диагонали порядка  $k \geq 3$  даст слагаемое, равное 3, и всего таких клеток  $N_3(0) + \dots + N_n(0)$ ; каждая такая жорданова клетка порядка  $k \leq 2$  даст слагаемое, равное своему порядку, всего же жордановых клеток с нулем на диагонали порядка один —  $N_1(0)$ , а порядка два —  $N_2(0)$ . Поэтому

$$n - \text{rk } J^3 = \sum_{i=1}^s \left( k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^3 \right) = N_1(0) + 2N_2(0) + 3 \left( N_3(0) + \dots + N_n(0) \right),$$



*Доказательство.* Пусть сначала  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — базис из собственных векторов для  $\mathcal{A}$ , причем  $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i$ , т.е. матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\mathcal{E}$  диагональна:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Так как минимальный многочлен линейного оператора равен минимальному многочлену его матрицы в произвольном базисе (лемма 8.1 п. 1),  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mu_A(t)$ . В свою очередь, минимальный многочлен для матрицы  $A$  будет иметь вид

$$\mu_A(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_p),$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  — все попарно различные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Это следует из того, что многочлен  $(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_p)$  является аннулирующим для матрицы  $A$ , а минимальный многочлен делит любой аннулирующий многочлен и наборы корней у минимального и характеристического многочлена совпадают (лемма 8.1 п. 2, 4).

Пусть теперь минимальный многочлен не имеет кратных корней. И пусть  $J$  — жорданова нормальная форма оператора  $\mathcal{A}$ , которая существует в силу алгебраической замкнутости поля (по теореме 9.1). По лемме 8.1 и утверждению 9.1 п.2 имеем

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}}(t) &= \mu_J(t) = \text{НОК}(\mu_{J_{k_1}(\lambda_1)}(t), \dots, \mu_{J_{k_s}(\lambda_s)}(t)) = \\ &= \text{НОК}((t - \lambda_1)^{k_1}, \dots, (t - \lambda_s)^{k_s}) = (t - \alpha_1)^{n_1} \dots (t - \alpha_p)^{n_p}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  — все попарно различные собственные значения линейного оператора  $\mathcal{A}$ ,  $n_i$  — максимальный порядок жордановой клетки с  $\alpha_i$  на диагонали в жордановой нормальной форме  $J$ . Так как минимальный многочлен не имеет кратных корней, получаем, что  $n_i = 1$  для всех  $i$ , т.е. в  $J$  все клетки имеют порядок 1. Это и означает, что жорданова нормальная форма  $J$  диагональна. ■

Этот критерий эффективен, поскольку для вычисления минимального многочлена  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  нет необходимости находить жорданову нормальную форму оператора  $\mathcal{A}$ .

## 9.4. Корневые подпространства

При изучении недиагонализуемых линейных операторов в дополнение к собственным векторам принято рассматривать и более общие корневые векторы.

**О п р е д е л е н и е 9.4.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$  над полем  $F$ . Ненулевой вектор  $v \in V$  называется **корневым**, отвечающим корню  $\lambda$ , если для некоторого натурального  $m$  выполняется

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^m v = 0.$$

Наименьшее из таких  $m$  называется **высотой корневого вектора**.

Отметим, что корневой вектор высоты 1 — это собственный вектор.

Если  $e \in V$  — корневой вектор высоты  $m > 0$ , то

$$f = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^{m-1} e$$

собственный вектор с собственным значением  $\lambda$ . Значит,  $\lambda$  — корень характеристического уравнения оператора  $\mathcal{A}$ .

Легко видеть, что все корневые векторы, отвечающие корню  $\lambda$ , с добавлением нулевого вектора, образуют подпространство в  $V$ . Это подпространство называется **корневым подпространством** и обозначается через  $V^\lambda$ .

Итак,  $V^\lambda$  содержит в себе подпространство  $V_\lambda$  собственных векторов, отвечающих характеристическому числу  $\lambda$ .

Кроме того,  $V^\lambda$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ . Действительно, если  $x \in V^\lambda$ , т.е.  $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^m x = 0$ , тогда

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^m (\mathcal{A}x) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^m x = \mathcal{A}0 = 0,$$

значит,  $\mathcal{A}x \in V^\lambda$ .

Заметим также, что из утверждения 9.2 видно, что если  $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}$  — жорданов базис для некоторой жордановой клетки  $J_k(\lambda)$  из жордановой нормальной формы оператора  $\mathcal{A}$ , то

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_1 &= 0, \\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_2 &= e_1, \\ &\dots \\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_{k-1} &= e_{k-2}, \\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_k &= e_{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $e_i$  — корневой вектор высоты  $i$ , отвечающий корню  $\lambda$ .

**Теорема 9.4.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда  $V$  распадается в прямую сумму корневых подпространств, отвечающим всем (различными) собственным значениям оператора  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{E}$  — некоторый жорданов базис для линейного оператора  $\mathcal{A}$ , который существует в силу теоремы 9.1. Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  — все различные собственные значения, то переупорядочим векторы базиса  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{E}_p$  так, чтобы базисные векторы  $\mathcal{E}_i$  отвечали всем клеткам с  $\lambda_i$  на диагонали. Далее, пусть  $U_i$  — подпространство, порожденное векторами из  $\mathcal{E}_i$ . Понятно, что  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$ . Из утверждения 9.2 получаем, что  $U_i$  — инвариантное подпространство относительно действия  $\mathcal{A}$ . Нужно показать, что каждое  $U_i$  и есть корневое подпространство  $V^{\lambda_i}$ , отвечающее  $\lambda_i$ .

Так как все векторы из жорданова базиса, отвечающие собственному значению  $\lambda_i$ , являются корневыми, отвечающими корню  $\lambda_i$ , то и любая их линейная комбинация будет корневым вектором, отвечающими корню  $\lambda_i$ . Значит,  $U_i \subset V^{\lambda_i}$ .

Докажем обратное включение. Пусть  $x$  — произвольный вектор из  $V^{\lambda_i}$ . Так как  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$ , то

$$x = x_i + \tilde{x},$$

где

$$x_i \in U_i \subset V^{\lambda_i}, \quad \tilde{x} \in U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p.$$

Тогда  $\tilde{x} = x - x_i \in V^{\lambda_i}$ , т.е. для некоторого натурального  $m$  выполняется  $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^m \tilde{x} = 0$ .

Так как каждое подпространство  $U_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ , то и

$$U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p$$

инвариантно относительно действия оператора  $\mathcal{A}$ , а значит, и относительно действия оператора  $\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I}$ . Так как ограничение оператора  $\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I}$  на подпространство  $U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p$ , очевидно, имеет невырожденную матрицу в базисе  $\mathcal{E}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{E}_{i-1} \sqcup \mathcal{E}_{i+1} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{E}_p$ , значит, на  $U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p$  оператор  $\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I}$  действует невырожденно.

Отсюда получаем, что равенство  $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^m \tilde{x} = 0$  может выполняться только для нулевого вектора  $\tilde{x}$ , т.е.  $x = x_i \in U_i$ , что доказывает включение  $U_i \supset V^{\lambda_i}$ . ■

В частности, мы доказали:

**Следствие 9.3.**  $\dim V^\lambda = m$ , где  $m$  — кратность корня  $\lambda$  характеристического уравнения оператора  $\mathcal{A}$ .

## 9.5. Вычисление функций от матриц

Хотя жорданова нормальная форма выглядит сложнее, чем, например, диагональная матрица, однако и с ней можно достаточно просто производить алгебраические операции, в частности, используя правило сокращенного умножения блочных матриц. Так, для произвольного многочлена

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m$$

с коэффициентами из поля  $F$  и произвольной жордановой матрицы

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

имеем

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(J_{k_1}(\lambda_1)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(J_{k_2}(\lambda_2)) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(J_{k_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, как вычислить многочлен от одной жордановой клетки.

**Утверждение 9.4.** Пусть

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

— жорданова клетка порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda$  на диагонали. Тогда

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

(Таким образом, на диагонали стоят числа  $f(\lambda)$ , затем правее и выше диагонали параллельно диагонали идет ряд с числами  $\frac{f'(\lambda)}{1!}$ , еще выше идет ряд с числами  $\frac{f''(\lambda)}{2!}$ , далее — ряд с числами  $\frac{f^{(3)}(\lambda)}{3!}$  и т.д.)

*Доказательство.* Представим многочлен  $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m$  по формуле Тейлора в точке  $\lambda$ :

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t - \lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(t - \lambda)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(t - \lambda)^m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(J_k(\lambda)) &= f(\lambda)E + \frac{f'(\lambda)}{1!}(J_k(\lambda) - \lambda E) + \\ &+ \frac{f''(\lambda)}{2!}(J_k(\lambda) - \lambda E)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(J_k(\lambda) - \lambda E)^m. \end{aligned}$$

Но  $J_k(\lambda) - \lambda E = J_k(0)$ , следовательно,

$$f(J_k(\lambda)) = f(\lambda)E + \frac{f'(\lambda)}{1!}J_k(0) + \frac{f''(\lambda)}{2!}J_k(0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}J_k(0)^m. \quad (9.5)$$

Как нам уже известно,  $i$ -я степень жордановой клетки  $J_k(0)$  есть матрица, диагональ единиц в которой сдвинута на  $i - 1$  позицию вправо и вверх по сравнению с ее положением в  $J_k(0)$ . При вычислении  $f(J_k(\lambda))$  по формуле (9.5) мы получим, что различные слагаемые суммы имеют ненулевые элементы на разных «диагоналях», причем эти элементы вычисляются по требуемой формуле  $\frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!}$ . ■

Далее ограничимся полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

Итак, было определено понятие значения многочлена от линейного оператора (матрицы). Постараемся обобщить это определение на случай функций, задаваемых степенными рядами  $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m t^m$ . Примерами степенных рядов являются ряды Тейлора. Например,

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \quad (\forall t \in \mathbb{R}), \\ \ln(1+t) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m} \quad (\forall t \in (-1, 1]), \\ \cos t &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!} \quad (\forall t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Напомним, что степенной ряд

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m t^m$$

называется *сходящимся* в точке  $\lambda$ , если последовательность частичных сумм

$$S_l(\lambda) = \sum_{m=0}^l \alpha_m \lambda^m$$

сходится при  $l \rightarrow \infty$ . При этом предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l(\lambda)$$

обозначается через  $f(\lambda)$  и называется значением ряда  $f(t)$  в точке  $\lambda$ . Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m t^m,$$

## Содержание

если этот ряд сходится при всех  $\lambda$  с условием  $|\lambda| < R$  и расходится при всех  $|\lambda| > R$ . В пределах любого замкнутого круга, целиком состоящего из точек, в которых ряд сходится, функция, задаваемая рядом  $f(t)$ , является бесконечно дифференцируемой, причем

$$f^{(n)}(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} S_l^{(n)}(t)$$

для любого  $n = 1, 2, \dots$ . Эти факты из математического анализа мы принимаем без доказательства.

**Определение 9.5.** Пусть дана последовательность квадратных матриц

$$\{ A^{(m)} = (a_{ij}^{(m)}) \mid m = 1, 2, \dots \}$$

одного и того же порядка. Мы скажем, что матрица

$$A = (a_{ij})$$

является пределом этой последовательности, если для каждой пары индексов  $i, j$  имеем

$$a_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^{(m)}.$$

**Замечание 9.1.** Из соответствующих свойств числовых последовательностей легко выводятся аналогичные свойства последовательностей квадратных матриц о том, что предел суммы равен сумме пределов слагаемых, предел произведения — произведению пределов, предел последовательности произведений на постоянную матрицу — произведению постоянной матрицы на предел данной последовательности. И, в частности, для постоянной обратимой матрицы  $T$  верно, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (T^{-1} A^{(m)} T) = T^{-1} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} A^{(m)} \right) T.$$

Эта формула позволит нам вычисление функции от матрицы свести к вычислению этой же функции от жордановой нормальной формы матрицы.

**Теорема 9.5.** Пусть функция  $f(t)$  задается степенным рядом с радиусом сходимости  $R$ . И пусть  $A$  — произвольная квадратная матрица порядка  $n$  над полем  $\mathbb{C}$ , все собственные значения которой по модулю меньше  $R$ . Тогда определено значение  $f(A)$ . Если  $A$  — жорданова матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

с жордановыми клетками  $J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s)$ , то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(J_{k_1}(\lambda_1)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(J_{k_2}(\lambda_2)) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(J_{k_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix},$$

причем значение  $f(J_k(\lambda))$  от жордановой клетки вычисляется по формуле

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Нам нужно доказать, что последовательность матриц  $\{S_l(A)\}$  сходится. Так как для любой постоянной обратимой матрицы  $T$  верно, что

$$S_l(T^{-1}JT) = T^{-1}S_l(J)T,$$

предел последовательности  $\{S_l(A)\}$  существует тогда и только тогда, когда существует предел последовательности матриц  $\{S_l(J)\}$ . Значит, существование предела достаточно доказывать для жордановых матриц  $J$  и даже (в силу правил действий над блочными матрицами) только для жордановых клеток. По утверждению 9.4 для одной клетки  $J_k(\lambda)$  имеем:

$$S_l(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} S_l(\lambda) & \frac{S_l'(\lambda)}{1!} & \frac{S_l''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{S_l^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{S_l^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & S_l(\lambda) & \frac{S_l'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{S_l^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{S_l^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_l(\lambda) & \frac{S_l'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_l(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Так как  $|\lambda| < R$ , то используя утверждение о почленном дифференцировании, получаем, что предел последовательности таких матриц существует и равен в точности

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

■

**Пример 1.** Если  $f(t) = e^t$ , то  $R = \infty$  и для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  имеем

$$e^{J_k(\lambda)} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \frac{e^\lambda}{2!} & \cdots & \frac{e^\lambda}{(k-2)!} & \frac{e^\lambda}{(k-1)!} \\ 0 & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \cdots & \frac{e^\lambda}{(k-3)!} & \frac{e^\lambda}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** Пусть требуется найти значение функции  $f(t) = e^t$  от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим жорданову нормальную форму матрицы  $A$

$$J = \begin{pmatrix} i\varphi & 0 \\ 0 & -i\varphi \end{pmatrix}$$

(на диагонали стоят собственные значения матрицы  $A$ ) и матрицу перехода в соответствующий жорданов базис

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

(столбцы — координаты собственных векторов для  $A$ , отвечающие  $i\varphi$  и  $-i\varphi$ ). Тогда  $A = TJT^{-1}$  и, следовательно,

$$e^A = Te^JT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

## Содержание

# Глава 10. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Все сказанное выше о линейных операторах в произвольном векторном пространстве остается, конечно, в силе и в евклидовом пространстве, т.е. в векторном пространстве над  $\mathbb{R}$  с заданным на нем скалярным произведением. С введением же скалярного произведения операторы приобретают новые свойства подобно тому, как векторы приобретают длину.

Для начала рассмотрим, какая связь возникает между линейными операторами и билинейными функциями в случае евклидова пространства.

## 10.1. Связь между линейными операторами и билинейными функциями в евклидовом пространстве

Пусть  $V$  — конечномерное евклидово пространство (над полем действительных чисел).

Как мы знаем (теорема 3.5), каждому вектору  $v \in V$  соответствует линейная функция  $\varphi_v \in V^*$ , заданная по правилу

$$\varphi_v(x) = (x, v),$$

и это соответствие  $v \mapsto \varphi_v$  является изоморфизмом векторных пространств  $V$  и  $V^*$ . Причем, если  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный ортонормированный базис в  $V$ , то коэффициенты  $\varphi_v(e_i) = (e_i, v)$  линейной функции  $\varphi_v$  в этом базисе равны координатам вектора  $v$  в этом базисе.

Аналогично, каждому линейному оператору  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  соответствует билинейная функция

$$\beta_{\mathcal{A}}(x, y) = (x, \mathcal{A}y). \quad (10.1)$$

При этом матрица билинейной функции  $\beta_{\mathcal{A}}$  в ортонормированном базисе  $\mathcal{E}$  совпадает с матрицей оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе. Проверим это.

Для начала докажем, что правило (10.1) действительно задает билинейную функцию. Имеем:

$$1) \beta_{\mathcal{A}}(x, y + z) = (x, \mathcal{A}(y + z)) = (x, \mathcal{A}y + \mathcal{A}z) = (x, \mathcal{A}y) + (x, \mathcal{A}z) = \beta_{\mathcal{A}}(x, y) + \beta_{\mathcal{A}}(x, z);$$

$$\beta_{\mathcal{A}}(x, \lambda y) = (x, \mathcal{A}(\lambda y)) = (x, \lambda \mathcal{A}y) = \lambda(x, \mathcal{A}y) = \lambda \beta_{\mathcal{A}}(x, y).$$

$$2) \beta_{\mathcal{A}}(x + y, z) = (x + y, \mathcal{A}z) = (x, \mathcal{A}z) + (y, \mathcal{A}z) = \beta_{\mathcal{A}}(x, z) + \beta_{\mathcal{A}}(y, z);$$

$$\beta_{\mathcal{A}}(\lambda x, y) = (\lambda x, \mathcal{A}y) = \lambda(x, \mathcal{A}y) = \lambda \beta_{\mathcal{A}}(x, y).$$

Пусть теперь  $B = (b_{i,j})$  — матрица билинейной функции  $\beta_{\mathcal{A}}$  в ортонормированном базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ , а  $A = (a_{i,j})$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе. Тогда для всех  $i, j$  имеем

$$b_{i,j} = \beta_{\mathcal{A}}(e_i, e_j) = (e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, \sum_{k=1}^n a_{k,j}e_k) = \sum_{k=1}^n a_{k,j}(e_i, e_k) = \sum_{k=1}^n a_{k,j}\delta_i^k = a_{i,j},$$

т.е.  $A = B$ . В частности, отсюда следует, что отображение  $\mathcal{A} \mapsto \beta_{\mathcal{A}}$ , определяемое формулой (10.1), инъективно.

Более того, для любой билинейной функции  $\beta$  в пространстве  $V$  найдется линейный оператор  $\mathcal{A}$  такой, что  $\beta = \beta_{\mathcal{A}}$ . Действительно, пусть теперь  $B = (b_{i,j})$  — матрица произвольной билинейной функции  $\beta$  в ортонормированном базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $X, Y$  — столбцы координат произвольных векторов  $x, y \in V$  в данном базисе. Как мы знаем (смотри формулу (4.2)), билинейная функция в матричном виде запишется так

$$\beta(x, y) = X^t B Y.$$

Рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{A}$ , который в базисе  $\mathcal{E}$  имеет матрицу  $B$ . И пусть  $Z$  — столбец координат вектора  $z = \mathcal{A}y$  в базисе  $\mathcal{E}$ , таким образом,  $Z = B Y$ . По правилу вычисления скалярного произведения в координатах в ортонормированном базисе (Утверждение 3.6 п.2) имеем

$$(x, \mathcal{A}y) = (x, z) = X^t Z = X^t B Y.$$

Значит,  $\beta(x, y) = \beta_{\mathcal{A}}(x, y)$  для любых  $x, y \in V$ , т.е.  $\beta = \beta_{\mathcal{A}}$  для данного оператора  $\mathcal{A}$ .

Итак, нами доказана следующая теорема

**Теорема 10.1. Формула**

$$\beta_{\mathcal{A}}(x, y) = (x, \mathcal{A}y)$$

*устанавливает в конечномерном евклидовом пространстве взаимно однозначное соответствие между билинейными функциями и линейными операторами.*

Подчеркнем, что установленное соответствие не зависит от базиса.

И хотя в произвольном ортонормированном базисе матрицы линейного оператора и соответствующей ему билинейной функции совпадают, в неортонормированном базисе они не обязаны совпадать.

**ЗАДАЧА.** Проверьте, что отображение, сопоставляющее каждому линейному оператору  $\mathcal{A}$  билинейную функцию  $\beta_{\mathcal{A}}$ , определяемую формулой (10.1), является изоморфизмом пространства линейных операторов на пространство билинейных функций в конечномерном евклидовом пространстве  $V$ .

## 10.2. Операция перехода к сопряженному оператору

Пусть  $V$  — конечномерное евклидово пространство.

**Определение 10.1.** Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор в  $V$ . Линейный оператор

$$\mathcal{A}^* : V \rightarrow V$$

называется **сопряженным** к  $\mathcal{A}$ , если для любых  $x, y \in V$  выполняется

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y).$$

**Теорема 10.2.** В конечномерном евклидовом пространстве  $V$  каждому линейному оператору  $\mathcal{A}$  отвечает сопряженный оператор и притом только один.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный ортонормированный базис в  $V$ . И пусть  $A$  — матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе. Докажем, что линейный оператор  $\mathcal{C}$  с матрицей  $A^t$  в базисе  $\mathcal{E}$  является сопряженным к  $\mathcal{A}$ . Надо проверить, что  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{C}y)$  для любых  $x, y \in V$ . В самом деле, используя матричную форму записи скалярного произведения в ортонормированном базисе (Утверждение 3.6 п.2), имеем

$$(\mathcal{A}x, y) = (AX)^t Y = X^t A^t Y = X^t (A^t Y) = (x, \mathcal{C}y),$$

где  $X, Y$  — столбцы координат произвольных векторов  $x, y \in V$  в базисе  $\mathcal{E}$ .

Осталось проверить единственность сопряженного оператора. Допустим, существуют два различных линейных оператора  $\mathcal{A}_1^*$  и  $\mathcal{A}_2^*$ , сопряженных к  $\mathcal{A}$ . Тогда для любых  $x, y \in V$

$$(x, \mathcal{A}_1^* y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}_2^* y).$$

Значит,  $\mathcal{A}_1^*$  и  $\mathcal{A}_2^*$  определяют одну и ту же билинейную функцию по правилу (10.1), что противоречит теореме 10.1. ■

В частности, мы доказали

**Утверждение 10.1.** В любом ортонормированном базисе матрица линейного оператора  $\mathcal{A}^*$ , сопряженного к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , является транспонированной к матрице оператора  $\mathcal{A}$ .

Заметим, что в неортонормированном базисе связь между матрицами операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  более сложна.

Получим связь операции перехода от  $\mathcal{A}$  к  $\mathcal{A}^*$  с операциями сложения и умножения линейных операторов.

**Утверждение 10.2.** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — произвольные линейные операторы в конечномерном евклидовом пространстве  $V$ ,  $\lambda$  — произвольное вещественное число. Тогда верны следующие соотношения:

- 1)  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$ ,
- 2)  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ ,
- 3)  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$ ,
- 4)  $(\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \mathcal{A}^*$ ,
- 5)  $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}$ .

*Доказательство.*

$$1) (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{B}^* \mathcal{A}^* y).$$

Но, с другой стороны, по определению  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^*$  имеем:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* y).$$

Сравнивая первые части этих двух равенств и вспомнив, что линейный оператор однозначно определяется соответствующей билинейной функцией (теорема 10.1), получаем:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*.$$

2) Пользуясь определением сопряженного оператора и симметричностью скалярного произведения, получаем:

$$(x, (\mathcal{A}^*)^* y) = (\mathcal{A}^* x, y) = (y, \mathcal{A}^* x) = (\mathcal{A}y, x) = (x, \mathcal{A}y).$$

Далее, как и в п.1, используем теорему 10.1.

Пункты 3)-4) доказываются аналогично. Проверьте это! ■

### 10.3. Самосопряженные линейные операторы

Пусть  $V$  — конечномерное евклидово пространство.

**Определение 10.2.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  евклидова пространства  $V$  называется **самосопряженным** (или **симметрическим**), если

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,$$

т.е. для любых  $x, y \in V$  выполняется

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y).$$

**Утверждение 10.3.** *Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  евклидова пространства  $V$  является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном ортонормированном базисе является симметрической.*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный ортонормированный базис в  $V$ , а  $A = (a_{i,j})$  — матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе. По определению матрицы линейного оператора и правилу вычисления скалярного произведения в координатах в ортонормированном базисе для всех  $i, j$  имеем

$$(\mathcal{A}e_i, e_j) = \left( \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k, e_j \right) = a_{j,i}$$

и

$$(e_i, \mathcal{A}e_j) = \left( e_i, \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k \right) = a_{i,j}.$$

Отсюда получаем, что если  $\mathcal{A}$  — самосопряженный оператор, то первые части этих двух равенств равны. Тогда и последние части этих двух равенств равны:  $a_{i,j} = a_{j,i}$  для всех  $i, j$ , что означает, что матрица  $A$  является симметрической.

Обратно, если матрица  $A$  является симметрической, то  $a_{i,j} = a_{j,i}$  для всех  $i, j$ , т.е. последние части этих двух равенств равны, откуда следует, что и первые части этих двух равенств равны:  $(\mathcal{A}e_i, e_j) = (e_i, \mathcal{A}e_j)$  для всех  $i, j$ . В силу линейности скалярного произведения по каждому аргументу и по определению линейного оператора отсюда следует, что и  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$  для любых векторов  $x, y \in V$ , т.е.  $\mathcal{A}$  — самосопряженный оператор. ■

**ЗАДАЧА 1.** Доказать, что линейный оператор  $\mathcal{A}$  является кососимметрическим (т.е.  $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ ) тогда и только тогда, когда в произвольном ортонормированном базисе его матрица кососимметрична (т.е.  $A^t = -A$ ).

Далее нашей целью будет приведение матрицы самосопряженного оператора к наиболее простому виду. Для этого нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 10.1.** *Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — самосопряженный линейный оператор пространства  $V$ ,  $U$  — подпространство в  $V$ , инвариантное относительно  $\mathcal{A}$ ,  $U^\perp$  — ортогональное дополнение к  $U$ . Тогда  $U^\perp$  является подпространством, инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $w$  — произвольный вектор из  $U^\perp$ . Требуется, доказать, что  $\mathcal{A}w \in U^\perp$ .

Пусть  $u$  — произвольный вектор из  $U$ . Тогда по определению сопряженного линейного оператора имеем  $(\mathcal{A}w, u) = (w, \mathcal{A}u)$ . В свою очередь,  $(w, \mathcal{A}u) = 0$ , так как  $\mathcal{A}u \in U$  в силу инвариантности подпространства  $U$  относительно  $\mathcal{A}$ , а  $w \in U^\perp$ . Таким образом,  $(\mathcal{A}w, u) = 0$  для любого  $u \in U$ , что и означает,  $\mathcal{A}w \in U^\perp$ . ■

С помощью этой леммы получим канонический вид для матрицы самосопряженного линейного оператора.

**Теорема 10.3.** *Для любого самосопряженного линейного оператора  $\mathcal{A}$  конечномерного евклидова пространства  $V$  найдется ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна.*

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что утверждение теоремы эквивалентно тому, что для самосопряженного линейного оператора  $\mathcal{A}$  конечномерного евклидова пространства  $V$  найдется ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Существование такого базиса будем доказывать индукцией по  $n = \dim V$ .



1) Характеристический многочлен  $\chi_A(t)$  оператора  $A$  разлагается на линейные множители (над  $\mathbb{R}$ ), т.е. все собственные числа самосопряженного оператора  $A$  вещественны.

2) Размерность каждого собственного подпространства  $V_\lambda$  равна кратности соответствующего корня  $\lambda$  характеристического многочлена  $\chi_A(t)$ .

3) Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу.

*Доказательство.* Первые два утверждения немедленно следуют из предыдущей теоремы и теоремы 8.3.

Для вывода последнего утверждения из предыдущей теоремы достаточно заметить, что если  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $A$ , причем  $Ae_i = \lambda_i e_i$ , то  $V_\lambda$  есть линейная оболочка тех  $e_i$ , для которых  $\lambda_i = \lambda$ . Впрочем, это утверждение легко можно доказать и непосредственно. В самом деле, пусть  $x \in V_\lambda$ ,  $y \in V_\mu$ ,  $\lambda \neq \mu$ . Тогда имеем

$$(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

и

$$(x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

По определению самосопряженного оператора, первые части этих двух равенств равны, следовательно, равны и их последние части:

$$\lambda(x, y) = \mu(x, y).$$

Откуда получаем, что  $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$ . Так как  $\lambda - \mu \neq 0$ , значит,  $(x, y) = 0$ . ■

**Следствие 10.2.** Для любой симметрической матрицы  $A$  найдется ортогональная матрица  $T$  и диагональная матрица  $D$  такие, что

$$A = TDT^t.$$

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу  $A$  как матрицу некоторого самосопряженного оператора  $A$  евклидова пространства в ортонормированном базисе  $\mathcal{E}_1$ . По теореме 10.3 для оператора  $A$  найдется ортонормированный базис  $\mathcal{E}_2$ , в котором его матрица  $D$  диагональна. Тогда из формулы (7.8) получаем

$$A = TDT^{-1},$$

где  $T$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}_1$  к базису  $\mathcal{E}_2$ . Теперь осталось только заметить, что по утверждению 3.8 матрица  $T$ , как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, ортогональна и, следовательно,  $T^{-1} = T^t$ . ■

Заметим, что для теоремы 10.3 справедлива обратная теорема.

**Утверждение 10.4.** Если для линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве найдется ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна, то этот оператор является самосопряженным.

Действительно, так как диагональная матрица является симметрической, то по утверждению 10.3 оператор будет самосопряженным.

**Замечание 10.1.** Из теоремы 10.3 следует наглядно-геометрический смысл действия произвольного самосопряженного оператора: в  $n$ -мерном евклидовом пространстве выделяются  $n$  попарно ортогональных направлений (соответствующих направлениям собственных векторов, образующих ортонормированный базис). Каждому из этих направлений ставится в соответствие вещественное число (собственное значение  $\lambda_i$ ). Если  $\lambda_i > 0$ , то

по соответствующему направлению производится растяжение (сжатие) пространства в  $\lambda_i$  раз. Если  $\lambda_i < 0$ , то по соответствующему направлению производится растяжение (сжатие) пространства в  $|\lambda_i|$  раз и симметрия относительно подпространства, ортогонального данному направлению. Нулевому собственному значению соответствует уже не сжатие, а проектирование на подпространство, ортогональное данному направлению.

**Утверждение 10.5.** *Для любого конечномерного евклидова пространства верно следующее.*

1) Сумма самосопряженных линейных операторов, а также произведение самосопряженного оператора на вещественное число является снова самосопряженным оператором.

2) Композиция двух самосопряженных операторов является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.

*Доказательство.* Используя свойства операции сопряжения (см. утверждение 10.2), получаем следующее.

1) Если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — самосопряженные операторы,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^* = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

$$(\alpha\mathcal{A})^* = \alpha\mathcal{A}^* = \alpha\mathcal{A}.$$

2) Из  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$  следует

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}.$$

Обратно, если  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{A}\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ , то

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{A}.$$

■

## 10.4. Приведение к главным осям

Уже знаем, что формула

$$\beta_{\mathcal{A}}(x, y) = (x, \mathcal{A}y)$$

устанавливает в конечномерном евклидовом пространстве взаимно однозначное соответствие между билинейными функциями и линейными операторами (теорема 10.1).

Покажем, что для того, чтобы линейный оператор  $\mathcal{A}$  был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы билинейная функция  $\beta_{\mathcal{A}}$  была симметрической.

В самом деле, симметричность билинейной функции  $\beta_{\mathcal{A}}$  означает, что

$$\beta_{\mathcal{A}}(x, y) = \beta_{\mathcal{A}}(y, x),$$

что эквивалентно равенству

$$(x, \mathcal{A}y) = (y, \mathcal{A}x),$$

которое, в свою очередь, эквивалентно определению самосопряженного линейного оператора:

$$(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}x, y).$$

Из теоремы 10.3 вытекает важная

**Теорема 10.4.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  — симметрическая билинейная функция. Тогда в  $V$  существует ортонормированный базис

$\mathcal{E}$ , в котором квадратичная функция  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ , соответствующая  $\beta$ , записывается в виде суммы квадратов:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad (10.2)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — координаты вектора  $x$  в базисе  $\mathcal{E}$ , а  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Как было показано выше, если  $\beta$  симметрическая билинейная функция, то по теореме 10.1 существует такой самосопряженный линейный оператор  $\mathcal{A}$ , что

$$\beta(x, y) = (x, \mathcal{A}y).$$

Выберем в  $V$  в качестве векторов ортонормированного базиса систему  $\{e_1, \dots, e_n\}$  попарно ортогональных собственных векторов самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  (это возможно в силу теоремы 10.3). Тогда

$$\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1, \quad \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2, \quad \dots, \quad \mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n.$$

Пусть  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$  — произвольные векторы из  $V$ . Так как

$$(e_i, e_j) = \delta_i^j,$$

то

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= (x, \mathcal{A}y) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \mathcal{A} \left( \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \right) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathcal{A}e_j \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j e_j \right) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n. \end{aligned}$$

В частности, имеем

$$q(x) = \beta(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

■

Нахождение в евклидовом пространстве ортонормированного базиса, в котором данная квадратичная формы записывается в виде суммы квадратов, называется **приведением этой формы к главным осям**.

Отметим, что числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  в выражении (10.2) определены однозначно с точностью до перестановки, так как это собственные значения соответствующего самосопряженного оператора. Выражение (10.2) называют **каноническим видом** квадратичной функции  $q$ .

## 10.5. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов

Следующая теорема является по существу другой формулировкой теоремы 10.4.

**Теорема 10.5.** Пусть  $V$  — произвольное  $n$ -мерное векторное пространство над полем действительных чисел. И пусть в  $V$  заданы две квадратичные функции  $q(x)$  и  $h(x)$ , причем  $h(x)$  положительно определена. Тогда существует базис, в котором обе эти функции записываются в виде суммы квадратов.

*Доказательство.* Пусть  $\beta(x, y)$  — симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной функции  $h(x)$ . Введем в  $V$  скалярное произведение, положив

$$(x, y) = \beta(x, y).$$

Это является законным, так как аксиомы скалярного произведения означают, что  $(x, y)$  есть симметрическая положительно определенная билинейная функция. Пространство  $V$  станет, таким образом, евклидовым. По теореме 10.4 в  $V$  существует ортонормированный (в смысле определенного нами скалярного произведения) базис  $\mathcal{E}$ , в котором квадратичная функция  $q(x)$  приводится к сумме квадратов, т.е. к виду

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad (10.3)$$

где  $x_i$  — координаты вектора  $x$  в базисе  $\mathcal{E}$ . В то же время скалярное произведение в ортонормированном базисе  $\mathcal{E}$  имеет вид

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

т.е. для  $h(x) = \beta(x, x) = (x, x)$  выполняется:

$$h(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (10.4)$$

Таким образом, мы нашли базис, в котором обе квадратичные функции  $q(x)$  и  $h(x)$  одновременно записываются в виде суммы квадратов, что и требовалось. ■

В теореме 10.5 доказано, что в  $V$  существует базис, в котором квадратичные функции  $q(x)$  и  $h(x)$  имеют вид (10.3) и (10.4). Покажем, как найти числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

В базисе  $\mathcal{E}$  из доказательства теоремы 10.5 матрицы квадратичных функций  $q(x)$  и  $h(x)$  имеют вид

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\det(Q - tH) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t).$$

Пусть  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{H}$  — матрицы квадратичных функций  $q(x)$  и  $h(x)$  в произвольном базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Тогда по формуле (4.3) имеем

$$\tilde{Q} = T^t Q T, \quad \tilde{H} = T^t H T,$$

где  $T$  — матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Поэтому

$$\det(\tilde{Q} - t\tilde{H}) = \det T^t \det(Q - tH) \det T = (\det T)^2 (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t).$$

Отсюда следует, что числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  являются корнями уравнения

$$\det(\tilde{Q} - t\tilde{H}) = 0,$$

где  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{H}$  — матрицы функций  $q(x)$  и  $h(x)$  в произвольном базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

Заметим, что требование положительной определенности одной из функций является существенным в теореме 10.5. В качестве примера, показывающего это, рассмотрим следующие квадратичные функции

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad h(x) = 2x_1 x_2,$$

из которых ни одна не является положительно определенной. Функции  $q(x)$  соответствует матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а  $h(x)$  — матрица

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель

$$\det(Q - tH) = \det \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & -1 \end{pmatrix} = -(t^2 + 1)$$

не имеет вещественных корней, то, согласно сказанному выше, обе функции не могут быть приведены одновременно к сумме квадратов.

Кроме самосопряженных операторов, со скалярным произведением также естественно связаны ортогональные операторы.

## 10.6. Ортогональные операторы

Пусть  $V$  — конечномерное евклидово пространство.

**Определение 10.3.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  евклидова пространства  $V$  называется **ортогональным**, если он сохраняет значение скалярного произведения, т.е. для любых  $x, y \in V$  выполняется

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y).$$

Отметим, что равенство  $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$  для любых  $x, y \in V$  эквивалентно тому, что  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ . Действительно, из равенства  $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$  для любых  $x, y \in V$  имеем  $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, y) = (x, y)$ , или  $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x - x, y) = 0$ . Это означает, что вектор  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x - x$  ортогонален любому вектору пространства и, следовательно, является нулевым. Поскольку равенство  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = x$  выполняется для всех  $x$ , преобразование  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  является тождественным. Обратное, из равенства  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$  получаем

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{I}x, y) = (x, y).$$

В силу свойств операции сопряжения имеем, что равенство  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$  равносильно равенству  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{I}$ . Следовательно, линейный оператор  $\mathcal{A}$  ортогонален тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ . В частности, ортогональный линейный оператор является невырожденным.

**Замечание.** В конечномерном пространстве условия  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$  и  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{I}$  эквивалентны. В бесконечномерном пространстве — это два различные условия.

**Утверждение 10.6.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного евклидова пространства  $V$  является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном ортонормированном базисе является ортогональной.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный ортонормированный базис в  $V$ , а  $A = (a_{i,j})$  — матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе. По определению матрицы линейного оператора и правилу вычисления скалярного произведения в координатах в ортонормированном базисе для всех  $i, j$  имеем два равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) &= \left( \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k, \sum_{l=1}^n a_{l,j}e_l \right) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}, \\ (e_i, e_j) &= \delta_i^j. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Если оператор  $\mathcal{A}$  ортогонален, то равны первые части равенств (10.5), значит, равны и последние части этих равенств:  $\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,i} = \delta_i^j$  для всех  $i, j$ , т.е.  $A^t A = E$ , что означает, что матрица  $A$  ортогональна.

Обратно, если матрица  $A$  является ортогональной, то  $A^t A = E$ , что в координатной форме означает:  $\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \delta_i^j$  для всех  $i, j$ , т.е. равны последние части в равенствах (10.5), откуда следует, что равны и первые части этих двух равенств:  $(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j)$  для всех  $i, j$ . В силу линейности скалярного произведения по каждому аргументу и по определению линейного оператора отсюда следует, что и  $(Ax, Ay) = (x, y)$  для любых векторов  $x, y \in V$ , т.е.  $A$  — ортогональный оператор. ■

**Утверждение 10.7.** *Линейный оператор ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.*

*В частности, ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.*

*Доказательство.* Если оператор  $A$  ортогонален, то

$$|Ax| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = |x|.$$

Обратное утверждение следует из тождества

$$(x, y) = \frac{1}{2}(|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2).$$

Действительно, если оператор  $A$  сохраняет длины векторов, то

$$\begin{aligned} (Ax, Ay) &= \frac{1}{2}(|Ax + Ay|^2 - |Ax|^2 - |Ay|^2) = \\ &= \frac{1}{2}(|A(x + y)|^2 - |Ax|^2 - |Ay|^2) = \frac{1}{2}(|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2) = (x, y). \end{aligned}$$

Для доказательства того, что ортогональный оператор сохраняет углы между векторами, достаточно заметить, что раз ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение и длины векторов, то он сохраняет и косинус угла между векторами. ■

**Утверждение 10.8.** *Линейный оператор конечномерного евклидова пространства  $V$  ортогонален тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

*Доказательство.* Если оператор  $A$  ортогонален, то по предыдущему утверждению он сохраняет как длины векторов, так и углы между векторами, а значит,  $A$  переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Наоборот, пусть некоторый линейный оператор  $A$  в евклидовом пространстве  $V$  переводит ортонормированный базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  в ортонормированный базис  $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ . Рассмотрим в  $V$  произвольные векторы

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ (Ax, Ay) &= \left( A \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right), A \left( \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \right) = \left( \sum_{i=1}^n x_i Ae_i, \sum_{j=1}^n y_j Ae_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \end{aligned}$$

т.е.  $(x, y) = (Ax, Ay)$ . Следовательно, оператор  $A$  ортогонален. ■

**Утверждение 10.9.** *Все собственные значения ортогонального линейного оператора равны 1 или  $-1$ .*



Заметим, что, используя матрицы  $\Pi(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  и  $\Pi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , можно при желании оставить не более одного свободного диагонального элемента, равного  $-1$ , и не более одного, равного  $1$ .

*Доказательство.* Доказательство будем вести индукцией по размерности  $n$  евклидова пространства  $V$ .

Пусть  $n = 1$  и  $e$  — произвольный единичный вектор пространства  $V$ . Тогда  $\{e\}$  образует ортонормированный базис в  $V$  и  $\mathcal{A}e = \lambda e$ , причем  $\lambda = \pm 1$  по утверждению 10.9. Таким образом матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом ортонормированном базисе имеет указанный вид.

Пусть  $n = 2$  и  $\{e_1, e_2\}$  — произвольный ортонормированный базис пространства  $V$ . Тогда  $\{\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2\}$  — также ортонормированный базис по утверждению 10.8. Пусть вектор  $\mathcal{A}e_1$  получается из вектора  $e_1$  поворотом на угол  $\alpha$ . Для вектора  $\mathcal{A}e_2$  возможны два случая: либо он получается из  $e_2$  также поворотом на угол  $\alpha$ , либо он противоположен получаемому таким образом вектору.

В первом случае оператор  $\mathcal{A}$  есть поворот на угол  $\alpha$ , и его матрица в базисе  $\{e_1, e_2\}$  имеет вид

$$\Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Во втором случае оператор  $\mathcal{A}$  есть отражение относительно биссектрисы угла между  $e_1$  и  $\mathcal{A}e_1$ , и его матрица в подходящем ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, при  $n \leq 2$  теорема доказана.

Предположим она доказана для всех евклидовых пространств размерности меньше  $n$ , и докажем ее для евклидова пространства  $V$  размерности  $n$ .

Согласно теореме 8.2,  $\mathcal{A}$ , как линейный оператор над  $\mathbb{R}$ , имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство  $W$ . По лемме 10.2 подпространство  $W^\perp$  также инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ . Так как ограничение оператора  $\mathcal{A}$  на инвариантное подпространство  $W^\perp$  продолжает быть ортогональным, и размерность подпространства  $W^\perp$  меньше  $n$  (по теореме 3.2), то к  $W^\perp$  можно применить предположение индукции и найти в  $W^\perp$  ортонормированный базис  $\mathcal{E}_{W^\perp}$ , в котором матрица  $A_{W^\perp}$  ограничения линейного оператора  $\mathcal{A}$  на подпространство  $W^\perp$  имеет канонический вид.

Если  $W$  одномерно, то в  $W$  существует собственный вектор  $e_1$  длины 1 с собственным значением  $\pm 1$ . Тогда  $\{e_1\} \sqcup \mathcal{E}_{W^\perp}$  — ортонормированный базис пространства  $V$ . По утверждению 7.6 в этом базисе матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A_{W^\perp} \end{pmatrix},$$

который является каноническим видом, или превращается в него после изменения нумерации векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Если  $\dim W = 2$ , то в  $W$  существует ортонормированный базис  $\{e_1, e_2\}$ , в котором матрица  $A_W$  оператора  $\mathcal{A}$  (рассматриваемого лишь в  $W$ ) имеет вид

$$A_W = \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\{e_1, e_2\} \sqcup \mathcal{E}_{W^\perp}$  — ортонормированный базис пространства  $V$ , в котором по утверждению 7.6 матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_W & 0 \\ 0 & A_{W^\perp} \end{pmatrix},$$

## Содержание

являющийся каноническим. ■

Такое представление матрицы ортогонального оператора, иногда, называют *разложением оператора на плоские вращения*, так как каждому двумерному подпространству соответствует поворот, и эти повороты могут осуществляться последовательно. Надо однако помнить, что в общем случае имеются собственные подпространства с собственными значениями 1 и  $-1$ .

Для трехмерного евклидова пространства теорема 10.6 означает, что матрица любого ортогонального оператора  $\mathcal{A}$  в подходящем ортонормированном базисе имеет один из двух видов:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае оператор  $\mathcal{A}$  представляет собой поворот на угол  $\alpha$  вокруг некоторой оси, во втором — зеркальный поворот, т.е. поворот, совмещенный с отражением относительно плоскости, ортогональной оси поворота.

Ясно, что зеркальный поворот не может быть результатом непрерывного движения, так как он изменяет ориентацию пространства. Следовательно, конечный результат сколь угодно сложного реального движения твердого тела с закрепленной точкой — такой же, как при простом повороте вокруг подходящей оси на подходящий угол. Это совершенно не тривиальное утверждение называется *теоремой Эйлера*.

Множество невырожденных линейных операторов  $n$ -мерного пространства  $V$  образует группу, называемую *полной линейной группой* пространства  $V$  и обозначаемую  $GL(V)$ .

**Утверждение 10.10.** *Ортогональные операторы в евклидовом пространстве  $V$  образуют подгруппу группы  $GL(V)$ , называемую ортогональной группой и обозначаемую  $O(V)$ .*

*Доказательство.* Как мы знаем, ортогональные операторы являются невырожденными. Проверим, что множество ортогональных операторов замкнуто относительно групповых операций.

Пусть  $\mathcal{O}$  — ортогональный оператор, т.е.  $\mathcal{O}\mathcal{O}^* = \mathcal{I}$ . Тогда по свойствам операции сопряжения имеем

$$\mathcal{O}^{-1}(\mathcal{O}^{-1})^* = \mathcal{O}^*(\mathcal{O}^*)^* = \mathcal{O}^*\mathcal{O} = \mathcal{I},$$

откуда следует, что  $\mathcal{O}^{-1}$  — ортогональный оператор.

Пусть  $\mathcal{O}_1$  и  $\mathcal{O}_2$  — ортогональные операторы, т.е.  $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_1^* = \mathcal{I}$  и  $\mathcal{O}_2\mathcal{O}_2^* = \mathcal{I}$ . Тогда по свойствам операции сопряжения имеем

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)^* = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_2^*\mathcal{O}_1^* = \mathcal{O}_1\mathcal{I}\mathcal{O}_1^* = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_1^* = \mathcal{I},$$

что означает ортогональность оператора  $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2$ .

Из равенств  $\mathcal{I}\mathcal{I}^* = \mathcal{I}\mathcal{I} = \mathcal{I}$  следует, что тождественный оператор также является ортогональным. ■

## 10.7. Полярное разложение

**Определение 10.4.** Самосопряженный линейный оператор  $\mathcal{C}$  в евклидовом пространстве  $V$  называется *положительно определенным*, если соответствующая ему симметрическая билинейная функция положительно определена, т.е.  $(x, \mathcal{C}x) > 0$  для любого ненулевого вектора  $x \in V$ .

**Лемма 10.3.** *Самосопряженный оператор  $\mathcal{C}$  в конечномерном евклидовом пространстве  $V$  положительно определен тогда и только тогда, когда все собственные значения оператора  $\mathcal{C}$  положительны.*





Положим  $\mathcal{O} = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ . Тогда  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{O}$  и

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{C}\mathcal{O}(\mathcal{C}\mathcal{O})^* = \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}^*\mathcal{C}^* = \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}^*\mathcal{C}.$$

Значит,

$$\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}^*\mathcal{C} = \mathcal{C}^2$$

Отсюда после сокращения на  $\mathcal{C}$  получаем, что  $\mathcal{O}\mathcal{O}^* = \mathcal{I}$ , т.е.  $\mathcal{O}$  — ортогональный оператор.

Предположим, что существует другое разложение  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{O}}$ , где  $\tilde{\mathcal{C}}$  — положительно определенный самосопряженный оператор, а  $\tilde{\mathcal{O}}$  — ортогональный оператор. Тогда

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{O}}^*\tilde{\mathcal{C}}^* = \tilde{\mathcal{C}}^2.$$

Так как  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{C}^2$ , то ввиду леммы 10.4 получаем, что  $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}$  и, следовательно,  $\mathcal{O} = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{C}}^{-1}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{O}}$ . ■

Аналогично можно получить, что всякий невырожденный линейный оператор  $\mathcal{A}$  в конечномерном евклидовом пространстве единственным образом представляется в виде  $\mathcal{A} = \mathcal{O}'\mathcal{C}'$ , где  $\mathcal{C}'$  — положительно определенный самосопряженный оператор, а  $\mathcal{O}'$  — ортогональный оператор.

# Глава 11. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для линейных операторов в унитарных пространствах имеется теория, аналогичная рассмотренной для линейных операторов в евклидовых пространствах, причем в унитарном пространстве все оказывается даже проще, так как в унитарном пространстве всякий линейный оператор имеет собственный вектор. Изложим эту теорию вкратце, опуская большинство доказательств, так как они аналогичны приведенным выше для евклидовых пространств.

**ЗАДАЧА.** Провести доказательства всех утверждений и теорем этого раздела. Для этого, в частности, полезно вспомнить отличия между аксиомами скалярного произведения в унитарном пространстве и аксиомами скалярного произведения в евклидовом пространстве.

## 11.1. Сопряженный линейный оператор в унитарном пространстве

Пусть  $V$  — унитарное пространство.

Также как и для евклидова пространства можно доказать, что формула

$$\beta_{\mathcal{A}}(x, y) = (x, \mathcal{A}y)$$

устанавливает в конечномерном унитарном пространстве взаимно однозначное соответствие между полуторалинейными функциями и линейными операторами. В произвольном ортонормированном базисе для матрицы  $A$  линейного оператора и матрицы  $B$  соответствующей ему полуторалинейной функции выполняется

$$B = \bar{A},$$

где черта над матрицей означает комплексное сопряжение всех ее элементов.

**Определение 11.1.** Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор в  $V$ . Линейный оператор

$$\mathcal{A}^* : V \rightarrow V$$

называется **сопряженным** к  $\mathcal{A}$ , если для любых  $x, y \in V$  выполняется

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y).$$

Повторяя рассуждения, приведенные для случая евклидова пространства, получаем, что справедливо следующее.

**Теорема 11.1.** В конечномерном унитарном пространстве  $V$  каждому линейному оператору  $\mathcal{A}$  отвечает сопряженный оператор и притом только один.

**Утверждение 11.1.** Если линейный оператор  $\mathcal{A}$  в каком-нибудь ортонормированном базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  имеет матрицу  $A$ , то оператор  $\mathcal{A}^*$  в том же базисе имеет матрицу  $\bar{A}^t$ .

Связь операции перехода от  $\mathcal{A}$  к  $\mathcal{A}^*$  с операциями сложения и умножения линейных операторов аналогична как в случае евклидова пространства (смотри утверждение 10.2), отличие только в четвертом утверждении: в унитарном пространстве выполняется равенство

$$(\lambda\mathcal{A})^* = \bar{\lambda}\mathcal{A}^*.$$

## 11.2. Эрмитовый линейный оператор

**Определение 11.2.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  унитарного пространства  $V$  называется *эрмитовым* (или *самосопряженным*), если

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,$$

т.е. для любых  $x, y \in V$  выполняется

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y).$$

**Утверждение 11.2.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного унитарного пространства  $V$  является эрмитовым тогда и только тогда, когда его матрица  $A$  в произвольном ортонормированном базисе является эрмитовой (т.е.  $A^t = \bar{A}$ ). В частности, на диагонали матрицы  $A$  стоят действительные числа.

**Утверждение 11.3.** Собственные значения эрмитова оператора вещественны.

*Доказательство.* Пусть  $x$  — собственный вектор эрмитова оператора  $\mathcal{A}$  и  $\lambda$  — соответствующее собственное значение, т.е.

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

По определению эрмитова оператора

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x),$$

т.е.

$$(\lambda x, x) = (x, \lambda x).$$

Вынося  $\lambda$  за скобки, получим

$$\lambda(x, x) = \bar{\lambda}(x, x),$$

и так как  $(x, x) \neq 0$ , то  $\lambda = \bar{\lambda}$ , что и требовалось доказать. ■

**Утверждение 11.4.** Собственные векторы эрмитова оператора, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.

**Утверждение 11.5.** Для любого конечномерного унитарного пространства выполняется следующее.

1) Сумма эрмитовых линейных операторов, а также произведение эрмитова оператора на вещественное число является снова эрмитовым оператором.

2) Композиция двух эрмитовых операторов является эрмитовым оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.

## 11.3. Унитарный линейный оператор

**Определение 11.3.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  унитарного пространства  $V$  называется *унитарным*, если он сохраняет значение скалярного произведения, т.е. для любых  $x, y \in V$  выполняется

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y).$$

Отметим, что равенство  $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$  для любых  $x, y \in V$  эквивалентно тому, что  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ . В силу свойств операции сопряжения в конечномерном пространстве имеем, что условия  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$  и  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{I}$  эквивалентны. (В бесконечномерном пространстве — это два различных условия!) Следовательно, линейный оператор  $\mathcal{A}$  унитарен тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ . В частности, унитарный линейный оператор является невырожденным.

Множество невырожденных линейных операторов  $n$ -мерного пространства  $V$  образует группу, называемую *полной линейной группой* пространства  $V$  и обозначаемую  $GL(V)$ .

**Утверждение 11.6.** Унитарные операторы в унитарном пространстве  $V$  образуют подгруппу группы  $GL(V)$ , называемую *унитарной группой* и обозначаемую  $U(V)$ .

**Утверждение 11.7.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного унитарного пространства  $V$  является унитарным тогда и только тогда, когда его матрица  $A$  в произвольном ортонормированном базисе является унитарной (т.е.  $A^t \bar{A} = E$ ).

**Утверждение 11.8.** Линейный оператор унитарен тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.

В частности, унитарный оператор сохраняет углы между векторами.

**Утверждение 11.9.** Линейный оператор конечномерного унитарного пространства  $V$  унитарен тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.

**Утверждение 11.10.** Собственные значения унитарного линейного оператора по модулю равны 1.

*Доказательство.* Пусть  $x$  — собственный вектор унитарного оператора  $\mathcal{A}$  с собственным значением  $\lambda$ . Тогда

$$(x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x, x).$$

Так как  $(x, x) \neq 0$ , получаем  $\lambda \bar{\lambda} = 1$ , значит,  $|\lambda| = 1$ , что и требовалось. ■

#### 11.4. Канонические виды для эрмитовых и унитарных операторов

**Лемма 11.1.** Пусть  $V$  — конечномерное унитарное пространство,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — эрмитовый или унитарный линейный оператор пространства  $V$ ,  $U$  — подпространство в  $V$ , инвариантное относительно  $\mathcal{A}$ ,  $U^\perp$  — ортогональное дополнение к  $U$ . Тогда  $U^\perp$  является подпространством, инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ .

С помощью этой леммы получим канонический вид для матриц эрмитова и унитарного линейных операторов.

**Теорема 11.2.** Для любого эрмитова или унитарного линейного оператора  $\mathcal{A}$  конечномерного унитарного пространства  $V$  найдется ортонормированный базис  $\mathcal{E}$  из собственных векторов.

*Доказательство.* У любого линейного оператора над полем комплексных чисел есть одномерное инвариантное подпространство  $U$  (следствие 8.1). По лемме 11.1 ортогональное дополнение  $U^\perp$  к  $U$  также будет инвариантным. Применив к  $U^\perp$  предположение индукции, получим требуемое. ■

Утверждение теоремы 11.2 эквивалентно следующему: Для любого эрмитова или унитарного линейного оператора  $\mathcal{A}$  конечномерного унитарного пространства  $V$  найдется ортонормированный базис, в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  диагональна, т.е. имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные значения оператора  $\mathcal{A}$ . При этом, если  $\mathcal{A}$  — эрмитов, то  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  вещественны (в силу утверждения 11.3), а если  $\mathcal{A}$  унитарен, то  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — числа, по модулю равные единице (в силу утверждения 11.10).

Тем, что каждый унитарный оператор имеет ортонормированный базис из собственных вектор, унитарные операторы существенно отличаются от ортогональных операторов евклидова пространства.

Также заметим, что прямое обращение теоремы 10.3 — утверждение 10.4 — на эрмитовы операторы не переносится: эрмитова матрица должна иметь вещественные числа на главной диагонали, а потому не всякая диагональная матрица эрмитова. Однако, используя утверждение 11.2, можно доказать следующее.

**Утверждение 11.11.** *Если для линейного оператора в конечномерном унитарном пространстве найдется ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна с вещественными числами на главной диагонали, то этот оператор является эрмитовым.*

Так как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому задается унитарной матрицей, то основной результат данного раздела можно в матричных терминах сформулировать следующим образом:

Пусть  $A$  — заданная эрмитова матрица. Тогда  $A$  может быть представлена в виде

$$A = T^{-1}DT,$$

где  $T$  — унитарная матрица, а  $D$  — диагональная матрица, у которой на диагонали стоят вещественные числа.

Пусть  $U$  — заданная унитарная матрица. Тогда существует такая унитарная матрица  $T$ , что  $U$  представляется в виде

$$U = T^{-1}DT,$$

где  $D$  — диагональная матрица, у которой по диагонали стоят числа, по модулю равные 1.

**Замечание 11.1.** Как было отмечено в разделе 6.3, комплексификация  $V^{\mathbb{C}}$  евклидова пространства  $V$  каноническим образом превращается в унитарное пространство, если определить скалярное умножение по формуле

$$(x + iu, y + iv) = ((x, y) + (u, v)) + i((x, v) - (y, u)).$$

При этом комплексное продолжение  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  самосопряженного (соотв., ортогонального) оператора  $\mathcal{A}$  будет эрмитовым (соотв., унитарным) оператором.

Формула

$$\beta_{\mathcal{A}}(x, y) = (x, \mathcal{A}y)$$

устанавливает в конечномерном унитарном пространстве взаимно однозначное соответствие между эрмитовыми полуторалинейными функциями и эрмитовыми линейными операторами.

Применяя теорему 11.2 о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов для эрмитова оператора, мы получаем, что для любой эрмитовой квадратичной функции  $q$  в конечномерном унитарном пространстве существует ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональна, т.е.

$$q(x) = \lambda_1|x_1|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2. \quad (11.1)$$

Числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  определены однозначно с точностью до перестановки, так как это собственные значения соответствующего эрмитова оператора. Выражение (11.1) называют **каноническим видом** эрмитовой квадратичной функции  $q$ .

### 11.5. Аналогия с комплексными числами

Операция  $*$  в известной мере аналогична операции перехода от данного комплексного числа  $z$  к комплексно сопряженному  $\bar{z}$ . Эта аналогия не случайна. Действительно, для матриц первого порядка над комплексным полем операция  $*$  как раз и состоит в замене данного числа комплексно сопряженным. Среди всех комплексных чисел вещественные числа характеризуются тем свойством, что  $\bar{z} = z$ . Для линейных операторов аналогичным объектом являются эрмитовы операторы, которые, как мы знаем, характеризуются равенством  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ .

Всякое комплексное число  $z$  можно однозначно представить в алгебраической форме:  $z = a + ib$ , где  $a$  и  $b$  — вещественные числа. Аналогично этому:

*Всякий линейный оператор  $\mathcal{A}$  может быть единственным образом представлен в виде*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2,$$

где  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  — эрмитовы операторы.

Действительно,

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^*}{2} + i \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}^*}{2i}.$$

Введем обозначения

$$\frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^*}{2} = \mathcal{A}_1, \quad \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}^*}{2i} = \mathcal{A}_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^* &= \left( \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^*}{2} \right)^* = \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)^* = \frac{1}{2} (\mathcal{A}^* + (\mathcal{A}^*)^*) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{A}^* + \mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^* &= \left( \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}^*}{2i} \right)^* = -\frac{1}{2i} (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)^* = -\frac{1}{2i} (\mathcal{A}^* - (\mathcal{A}^*)^*) = \\ &= -\frac{1}{2i} (\mathcal{A}^* - \mathcal{A}) = \mathcal{A}_2, \end{aligned}$$

т.е.  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  — эрмитовы операторы.

Докажем единственность представления в виде  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2$ , где  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  — эрмитовы операторы. Допустим,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_1 + i\mathcal{A}'_2$  — другое такое представление. Тогда

$$\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}'_1 + i\mathcal{A}'_2$$

или

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1 = i(\mathcal{A}'_2 - \mathcal{A}_2).$$

Применяя операцию сопряжения к левой части равенства, получим:

$$(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1)^* = \mathcal{A}_1^* - \mathcal{A}'_1{}^* = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1.$$

А применяя операцию сопряжения к правой части равенства,

$$\left( i(\mathcal{A}'_2 - \mathcal{A}_2) \right)^* = -i(\mathcal{A}'_2 - \mathcal{A}_2)^* = -i(\mathcal{A}'_2{}^* - \mathcal{A}_2^*) = -i(\mathcal{A}'_2 - \mathcal{A}_2) = -(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1).$$

Следовательно,  $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1 = -(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1)$ . Откуда получаем, что  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}'_1$ . Значит, и  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}'_2$ , что и завершает доказательство.

Таким образом, эрмитовы операторы играют среди всех линейных операторов унитарного пространства роль, аналогичную роли вещественных чисел среди всех комплексных.

Своеобразным аналогом положительных вещественных чисел служат положительно определенные эрмитовы операторы.

**Определение 11.4.** Эрмитов оператор  $\mathcal{C}$  называется *положительно определенным*, если соответствующая ему эрмитова полуторалинейная функция положительно определена, т.е. для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется:

$$(x, \mathcal{C}x) > 0.$$

Положительная определенность эрмитова оператора равносильна тому, что все его собственные значения положительны.

**Теорема 11.3.** *Всякий невырожденный линейный оператор  $\mathcal{A}$  в конечномерном унитарном пространстве единственным образом представляется в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{O},$$

где  $\mathcal{C}$  — положительно определенный эрмитовый оператор, а  $\mathcal{O}$  — унитарный оператор.

Такое представление линейного оператора называется его *полярным разложением*.

В одномерном случае невырожденный линейный оператор есть просто ненулевое комплексное число, а его полярное разложение — тригонометрическая форма этого числа. Поскольку тригонометрическая форма комплексного числа связана с полярными координатами на плоскости, это объясняет термин «полярное разложение» в общем случае.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется линейным (векторным) пространством? Что такое базис и размерность пространства? Если в векторном пространстве  $V$  заданы  $n$  линейно независимых векторов, можно ли утверждать, что  $\dim V = n$ ?
2. Как определяется матрица перехода от одного базиса к другому? Как изменяются координаты вектора при переходе от базиса к базису?
3. Дайте определение подпространства векторного пространства. Что называется суммой подпространств? Если для подпространств  $U$  и  $W$  некоторого векторного пространства выполняется равенство  $\dim U + \dim W = \dim U+W$ , что можно утверждать о подпространстве  $U \cap W$ ?
4. Когда сумма подпространств линейного пространства является прямой?
5. Дайте определения линейной функции и сопряженного пространства. Что такое двойственный базис? Какова связь между матрицей перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к  $\mathcal{F}$  и матрицей перехода от базиса  $\mathcal{E}^*$ , двойственного к  $\mathcal{E}$ , к базису  $\mathcal{F}^*$ , двойственному к  $\mathcal{F}$ ?
6. Что называется евклидовым пространством? Докажите неравенство Коши — Буняковского. Для каких векторов неравенство Коши — Буняковского превращается в равенство?
7. При каком условии система ненулевых ортогональных векторов образует базис? По какой формуле вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе? Как изменится формула, если вместо ортонормированного базиса рассмотреть ортогональный?
8. Если матрица перехода от ортогонального базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\mathcal{F}$  является ортогональной, верно ли, что базис  $\mathcal{F}$  тоже будет ортогональным?
9. Докажите, что множество ортогональных матриц образует группу по умножению? Будет ли множество ортогональных матриц образовывать группу по сложению? Можно ли утверждать, что произведение ортогональной матрицы на число снова ортогональная матрица?
10. Как найти угол и расстояние между вектором и подпространством евклидова пространства?
11. Как строится изоморфизм линейных пространств  $V$  и  $V^*$  в случае евклидовых пространств?
12. Что называется билинейной функцией? Как определяется матрица билинейной функции в данном базисе? Как изменится матрица билинейной функции при переходе к другому базису? Как зависит ранг билинейной функции от выбора базиса?
13. Для какой билинейной функции существует базис пространства, в котором матрица функции диагональна?
14. К какому простому виду приводится любая квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием над полем комплексных и над полем действительных чисел?
15. Сформулируйте и докажите критерий отрицательной определенности квадратичной функции.
16. Дайте определение полуторалинейных функций, эрмитовых квадратичных функций. Чем отличаются свойства эрмитовых квадратичных функций от свойств квадратичных функций?
17. Дайте определение унитарного пространства. Чем отличаются свойства скалярного произведения в унитарном пространстве от свойств скалярного произведения в евклидовом пространстве?

18. Докажите критерий Сильвестра для эрмитовых квадратичных форм.

19. Будет ли множество унитарных матриц порядка  $n$  относительно умножения образовывать группу? Будет ли множество унитарных матриц порядка  $n$  относительно сложения образовывать группу?

20. Что называется линейным отображением? Как определяется матрица линейного отображения? Как она изменяется при переходе к другим базисам? Как изменяется ее ранг?

21. Как по рангу линейного отображения определить, будет ли линейное отображение сюръективным? инъективным?

22. Как изменяется матрица линейного оператора при переходе к новому базису? Как изменяется ранг и определитель матрицы линейного оператора?

23. Какой вид имеет матрица линейного оператора при наличии инвариантных подпространств?

24. Как зависит характеристический многочлен от выбора базиса?

25. Что такое собственные векторы и собственные значения? Какова связь между собственными числами линейного оператора и корнями характеристического многочлена?

26. Может ли линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над полем действительных чисел не иметь инвариантных подпространств? Какова должна быть размерность пространства  $V$ , чтобы линейный оператор обладал инвариантными подпространствами? Может ли линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над полем действительных чисел иметь инвариантное подпространство размерности 3?

27. Дайте определение собственного подпространства. Какова связь между кратностью собственного значения линейного оператора и размерностью собственного подпространства, отвечающего этому собственному значению?

28. Может ли система собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям, быть линейно зависимой? Может ли система собственных векторов линейного оператора, отвечающих одному и тому же собственному значению, быть линейно независимой?

29. В чем состоит необходимое и достаточное условие для существования базиса из собственных векторов линейного оператора?

30. Какое условие является достаточным для того, чтобы существовал базис конечномерного векторного пространства, в котором матрица линейного оператора была бы треугольной? Будет ли это условие необходимым?

31. Что такое минимальный многочлен и каковы его свойства?

32. Будет ли линейный оператор диагонализируемым, если его минимальный многочлен не имеет корней? Как по кратности корней минимального многочлена определить, диагонализируем ли линейный оператор, если поле алгебраически замкнуто?

33. Что такое жорданова клетка и жорданова матрица? Чему равны их характеристические и минимальные многочлены? Что такое жорданов базис?

34. Какое условие является достаточным для существования жорданова базиса? Будет ли это условие являться необходимым?

35. Однозначно ли определена жорданова нормальная форма?

36. Чему равно значение многочлена от жордановой клетки? Как можно вычислить функцию от матрицы?

37. Какова связь между линейным оператором и билинейной функцией в евклидовом пространстве?

38. Докажите, что в евклидовом пространстве любому линейному оператору отвечает сопряженный оператор и притом только один. Какова связь операции перехода от оператора к сопряженному оператору с операциями сложения и умножения линейных операторов?

**39.** Может ли матрица симметрического линейного оператора в каком-нибудь базисе быть не симметрической? Может ли матрица ортогонального линейного оператора в каком-нибудь базисе быть не ортогональной?

**40.** Пусть ортогональное дополнение к подпространству  $U$  является инвариантным подпространством линейного оператора  $\mathcal{A}$  в евклидовом пространстве. Будет ли  $U$  также инвариантным подпространством? Что можно сказать в случае, когда  $\mathcal{A}$  является ортогональным или симметрическим оператором?

**41.** Каков канонический вид симметрического оператора евклидова пространства? Если матрица линейного оператора в некотором базисе диагональна, является ли этот линейный оператор симметрическим?

**42.** Известно, что в некотором базисе, не являющемся ортогональным, матрица оператора симметрическая. Можно ли утверждать, что этот оператор является симметрическим? Можно ли утверждать, что этот оператор не является симметрическим? Что можно утверждать, если базис ортогональный, но не ортонормированный?

**43.** Докажите, что если линейный оператор, действующий в векторном пространстве над полем действительных чисел, имеет в некотором базисе симметрическую матрицу, то этот оператор имеет базис из собственных векторов, даже если векторное пространство не является евклидовым.

**44.** Приведите пример ортогонального оператора, не имеющего собственных векторов. Какой может быть размерность евклидова пространства, в котором есть такие операторы?

**45.** Каков канонический вид ортогонального оператора евклидова пространства?

**46.** Опишите процесс приведения квадратичной формы к главным осям в евклидовом пространстве.

**47.** В каком случае пару квадратичных форм можно одновременно привести к сумме квадратов?

**48.** Что такое полярное разложение невырожденного линейного оператора евклидова пространства?

**49.** Какой линейный оператор называется эрмитовым? Может ли характеристический многочлен эрмитова оператора иметь мнимые корни? Какой канонический вид имеют матрицы эрмитова оператора?

**50.** Чем отличается определение унитарного оператора от определения ортогонального оператора? Чем отличаются свойства унитарного оператора от свойств ортогонального оператора?

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. 512 с.
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. М.: Физматлит, 2002. 374 с.
3. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. М.: Факториал, 1999. 528 с.
4. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966. 280 с.
5. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Линейная алгебра: Учеб. для втузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 335 с.
6. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учеб. для вузов. М.: Физматлит, 2004. 358 с.
7. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, Физматлит, 1996. 304 с.
8. *Власов П.А., Кавинов А.В., Канатников А.Н.* Алгебра: Метод. указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 80 с.