ЛА и АГ (ИУ9), занятие 1
Матрицы линейных операторов

Д. А. Степанов

Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем $\Bbbk$. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если выполнены условия а) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V\ \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$ и б) $\forall \boldsymbol{x} \in V\ \forall \lambda \in \Bbbk\ \varphi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{x})$. *Линейным оператором* (ЛО) называется линейное отображение $\varphi\colon V \to V$ векторного пространства V в себя. В книге [П] вместо термина ЛО используется термин *линейное преобразование*.

Задача 1. Доказать, что если $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение и $\mathbf{0}$ — нулевой вектор пространства V, то $\varphi(\mathbf{0})$ — нулевой вектор пространства W.

Лемма 1. *Линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ однозначно определяется своими значениями на базисе пространства V. Более подробно: пусть $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — какой либо базис пространства V, а $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$ — произвольный набор векторов пространства W. Тогда существует, и притом единственное, такое линейное отображение $\varphi\colon V \to W$, что $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{f}_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис пространства V, $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m\}$ — базис пространства W, и $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение. Рассмотрим векторы $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n) \in W$ и разложим их по базису $\boldsymbol{f}$:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_j) = a_{1j}\boldsymbol{f}_1 + a_{2j}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{mj}\boldsymbol{f}_m, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $a_{ij} \in \Bbbk$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\Bbbk)$$

называется *матрицей линейного отображения φ в базисах* (*или по отношению к базисам*) $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$. Если сформулировать это определение словами, то можно сказать, что столбцы матрицы линейного отображения — это координаты образов векторов базиса $\boldsymbol{e}$ в базисе $\boldsymbol{f}$. В случае, если $\varphi\colon V \to V$ — ЛО, то всегда полагают $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}$, матрица A оказывается квадратной размера $n \times n$ и называется *матрицей ЛО φ в базисе $\boldsymbol{e}$*.

Теорема 1. *Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение, $\boldsymbol{e}$ — базис в V, $\boldsymbol{f}$ — базис с пространстве W, $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in W$. Обозначим через x^e вектор-столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, а через y^f — вектор-столбец координат вектора $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{f}$. Пусть A — матрица линейного отображения в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$. Тогда в координатах отображение φ действует умножением столбца x^e на матрицу A, т. е.*

$$y^f = Ax^e.$$

Если $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ — два базиса (старый и новый соотв.) пространства V, а $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — старый и новый базисы пространства W, то определены матрицы A и $B \in M_{m,n}(\Bbbk)$ линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ по отношению к старой $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}$ и новой $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{b}$ паре базисов пространств V и W. Кроме этого определены матрицы перехода $S = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ и $U = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$. Заметим, что $S \in M_n(\Bbbk)$, $U \in M_m(\Bbbk)$ и являются невырожденными.

Теорема 2. *Матрица линейного отображения φ преобразуется к новым базисам по формуле:*

$$B = U^{-1}AS.$$

В случае, когда $\varphi\colon V \to V$ — ЛО, A — его матрица в старом базисе $\boldsymbol{e}$, B — в новом базисе $\boldsymbol{f}$, получаем следующую формулу преобразования матрицы ЛО к новому базису:

$$B = S^{-1}AS. \tag{1}$$

Множество всех линейных отображений из пространства V в пространство W будем обозначать $\mathrm{Hom}(V, W)$. На этом множестве определены следующие операции.

1) Сложение линейных отображений. Если $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, то, по определению

$$\forall \boldsymbol{x} \in V \quad (\varphi + \psi)(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{y}).$$

2) Умножение линейного отображения на число. Если $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\lambda \in \Bbbk$, то, по определению

$$\forall \boldsymbol{x} \in V \quad (\lambda\varphi)(\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}).$$

Задача 2. Убедитесь, что $\varphi+\psi$ и $\lambda\varphi$ действительно являются линейными отображениями.

Лемма 2. *Алгебраическая структура* $(\mathrm{Hom}(V, W), +, \lambda\cdot)$ *представляет собой векторное пространство над* $\Bbbk$.

Пусть теперь имеются линейные отображения $\varphi\colon V \to W$ и $\psi\colon U \to V$. Тогда определена их *композиция* $\theta = \varphi \circ \psi\colon U \to W$:

$$\forall \boldsymbol{x} \in U \quad \theta(\boldsymbol{x}) = \varphi(\psi(\boldsymbol{x})),$$

см. также диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\theta=\varphi\circ\psi"'] & V \arrow[r, "\varphi"] & W. \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Задача 3. Убедитесь, что композиция $\varphi \circ \psi$ является линейным отображением из U в W. В частности, композиция оказывается бинарной операцией на множестве $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Лемма 3. *Алгебраическая структура* $(\mathrm{Hom}(V, V), +, \lambda\cdot, \circ)$ *представляет собой ассоциативную алгебру с единицей над полем* $\Bbbk$.

Задача 4. Будет ли алгебра $\mathrm{Hom}(V, V)$ коммутативной? От чего это зависит?

Линейное отображение $\psi\colon W \to V$ называется *обратным* к линейному отображению $\varphi\colon V \to W$, если $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ и $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, где id_V — тождественный ЛО на пространстве V, id_W — тождественный ЛО на пространстве W. Линейное отображение, к которому существует обратное, называется *обратимым*.

Задача 5. Выведите формально из определения, что линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ тогда и только тогда обратимо, когда оно биективно. Покажите также, что если φ обратимо, то обратное отображение единственно.

Из задачи 5 следует, что обратимое линейное отображение это то же, что изоморфизм. Обратное отображение к линейному отображению φ обозначается φ^{-1}.

Задача 6. а) Приведите пример таких линейных отображений $\varphi\colon V \to W$ и $\psi\colon W \to V$, что $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$, но $\varphi \circ \psi \neq \mathrm{id}_W$. б) Приведите пример таких ЛО $\varphi\colon V \to V$ и $\psi\colon V \to V$, что $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$, но $\varphi \circ \psi \neq \mathrm{id}_V$ (Указание: пространство V должно быть бесконечномерным).

Задача 7. Покажите, что если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ — произвольные отображения между множествами X и Y и $g \circ f = \mathrm{id}_X$, то f инъективно, а g сюръективно.

Теорема 3. *а) Пусть $\varphi\colon V \to W$, $\psi\colon V \to W$ — линейные отображения, $\boldsymbol{e}$ — базис в пространстве V, $\boldsymbol{f}$ — базис в пространстве W, A и $B \in M_n(\Bbbk)$ — матрицы отображений φ и ψ соответственно в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, и $\lambda \in \Bbbk$. Тогда отображение $\varphi+\psi$ имеет матрицу $A+B$, а отображение $\lambda\varphi$ — матрицу λA в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$.*

б) Пусть $\psi\colon U \to V$, $\varphi\colon V \to W$ — линейные отображения, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ — базисы в пространствах U, V, W соответственно, B — матрица отображения ψ в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, A — матрица отображения φ в базисах $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$. Тогда матрицей композиции $\varphi \circ \psi$ линейных отображений ψ и φ в базисах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{g}$ служит матрица AB — произведение матриц A и B (для лучшего понимания этого пункта см. диаграмму (2)*).*

в) Пусть линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ обратимо и имеет матрицу A в базисах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ пространств V, W соответственно. Тогда матрица A обратима и обратное отображение φ^{-1} имеет матрицу A^{-1} в базисах $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}$.

Следствие 1. *Если векторное пространство V имеет размерность n, а векторное пространство W — m, то векторное пространство $\mathrm{Hom}(V,W)$ линейных отображений из V в W изоморфно пространству $M_{m,n}(\Bbbk)$ матриц размера $m \times n$, в частности, $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = mn$.*

Следствие 2. *Если векторное пространство V имеет размерность n, то алгебра $(\mathrm{Hom}(V,V), +, \lambda\cdot, \circ)$ линейных операторов на V изоморфна алгебре $(M_n(\Bbbk), +, \lambda, \cdot)$ квадратных матриц размера $n \times n$ над полем $\Bbbk$, где $\cdot$ обозначает операцию умножения матриц; в частности, $\dim \mathrm{Hom}(V,V) = n^2$.*

Пример 1 ([ЕД, 4.83]). Отображение $\varphi\colon V_3 \to V_3$ задано формулой $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — фиксированное число. Во-первых, проверим, что φ — ЛО. Имеем:

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) =$$

по аксиоме дистрибутивности векторного пространства

$$= \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}),$$

$$\varphi(\mu\boldsymbol{x}) = \lambda(\mu\boldsymbol{x}) =$$

по аксиоме ассоциативности умножения на число и в силу коммутативности умножения в поле $\mathbb{R}$

$$= \mu(\lambda\boldsymbol{x}) = \mu\varphi(\boldsymbol{x}),$$

для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_3$, $\mu \in \mathbb{R}$. Значит, φ — действительно ЛО.

Теперь найдём матрицу ЛО φ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{i}) &= \lambda\boldsymbol{i} = \lambda\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}, \\ \varphi(\boldsymbol{j}) &= \lambda\boldsymbol{j} = 0\boldsymbol{i} + \lambda\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}, \\ \varphi(\boldsymbol{k}) &= \lambda\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \lambda\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицей этого ЛО служит

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E.$$

Данный ЛО действует растяжением (сжатием) любого вектора в λ раз. Такой ЛО называется гомотетией.

Для самостоятельного решения рекомендуются задачи [ЕД, 4.85], [ЕД, 4.86] и [ЕД, 4.87]. В задаче [ЕД, 4.85] задайте вектор $\boldsymbol{e}$ направляющими косинусами

$$\boldsymbol{e} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k},$$

а в задаче [ЕД, 4.86] положите

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

и предполагайте базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ правым.

Задача 8. Обобщите задачу [ЕД, 4.83] следующим образом. Пусть V — произвольное векторное пространство над полем $\mathbb{k}$, $\lambda \in \mathbb{k}$ и отображение $\varphi\colon V \to V$ действует как абстрактная гомотетия: $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Покажите, что φ — ЛО и, если V конечномерно, φ имеет матрицу λE в любом базисе пространства V.

Задача 9. Докажите, что если если ЛО φ на пространстве V обладает тем свойством, что его матрица не зависит от базиса, то φ — гомотетия. (Указание: используя формулу (1) сведите задачу к следующему утверждению. Если матрица A коммутирует с любой невырожденной матрицей S: $AS = SA$, то A — скалярная матрица, т. е. $A = \lambda E$ (случай $\lambda = 0$ не исключается).)

Пример 2 ([ЕД, 4.110 а)]). Отображение $\boldsymbol{D}\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ действует на пространстве действительных многочленов степени не выше $n-1$ как дифференцирование: $\boldsymbol{D}(f(t)) = \frac{d}{dt}f(t)$. Тот факт, что $\boldsymbol{D}$ является ЛО, следует из свойств производной $(f+g)' = f' + g'$ и $(\lambda f)' = \lambda f'$, $f, g \in \mathcal{P}_n$,

$\lambda \in \mathbb{R}$. Найдём матрицу D ЛО $\boldsymbol{D}$ в базисе $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$. Имеем:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{D}(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^{n-2} + 0 \cdot t^{n-1}, \\ \boldsymbol{D}(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^{n-2} + 0 \cdot t^{n-1}, \\ \boldsymbol{D}(t^2) = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^{n-2} + 0 \cdot t^{n-1}, \\ \dotfill \\ \boldsymbol{D}(t^{n-1}) = (n-1)t^{n-2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + (n-1) \cdot t^{n-2} + 0 \cdot t^{n-1}, \end{array} \tag{3}$$

откуда

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что при составлении матрицы ЛО коэффициенты разложений (3) записываются *в столбцы* матрицы. Этим определение матрицы ЛО напоминает определение матрицы перехода. В качестве дополнительного задания покажите, не производя вычислений, что $D^n = 0$.

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [ЕД, 4.110 б)], [ЕД, 4.112], [ЕД, 4.90], [ЕД, 4.91].

Пример 3 ([П, 1445]). ЛО $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ соответственно в $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, где

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 5), & \boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1), \\ \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 2), & \boldsymbol{b}_2 = (1, 1, -1), \\ \boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0), & \boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 2). \end{array}$$

Найдём матрицу ЛО φ в каноническом базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

Пусть $X \in M_3(\mathbb{R})$ — искомая матрица. Столбцы $(\boldsymbol{a}_i)^T$, $(\boldsymbol{b}_j)^T$, $i, j = 1, 2, 3$, представляют собой столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ в базисе $\boldsymbol{e}$. По теореме 1,

$$X(\boldsymbol{a}_i)^T = (\boldsymbol{b}_i)^T, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Если обозначить через A и B матрицы, составленные из столбцов $(\boldsymbol{a}_i)^T$, $(\boldsymbol{b}_j)^T$, то 3 равенства (4) эквивалентны одному матричному равенству

$$XA = B,$$

откуда, если матрица A невырождена, матрица X однозначно находится как

$$X = BA^{-1}.$$

Данную формулу можно использовать как стандартный метод решения подобных задач. Но не путайте её с формулой $X = A^{-1}B$, которая возникала у нас при вычислении матриц перехода!

Вычислим обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований. Заодно мы убедимся, что матрица A невырождена.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2)-(1) \\ (1) \\ (3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)-2(1) \\ (3)-5(1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)-(3) \\ (3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3)+3(2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)-(3) \\ (2)-2(3) \\ -(3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (1)-(2) \\ (2) \\ (3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для самостоятельного решения предлагается задача [П, 1446].

Пример 4 ([П, 1453]). ЛО φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ некоторого 3-мерного пространства имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдём его матрицу B в базисе

$$\boldsymbol{f}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3.$$

Это задача на формулу (1). Матрица перехода

$$S = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверьте с помощью элементарных преобразований, что

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

После этого получаем

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для самостоятельного решения рекомендуется задача [П, 1452].

Пример 5. Свойство линейности ортогональной проекции вектора на прямую или плоскость (см. теор. материал 1-го семестра) означает, что ортогональную проекцию можно рассматривать как ЛО на пространстве V_3. Найдём матрицу P в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ оператора φ проектирования пространства на плоскость α с уравнением

$$x + y + z = 0.$$

1-й способ. Найдём проекции на плоскость α векторов базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Для этого заметим, что из уравнения плоскости мы сразу видим базис ортогонального дополнения к α — это вектор нормали $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$. Поэтому сначала найдём ортогональные составляющие векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ относительно α — они же проекции векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ на вектор $\boldsymbol{n}$. Имеем:

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{i} = \frac{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \frac{1}{3}(1, 1, 1) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

Легко убедиться, что и $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{j}$ и $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{k}$ равны $(1/3, 1/3, 1/3)$. Отсюда

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{i}) &= \boldsymbol{i} - \mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{i} = (2/3, -1/3, -1/3),\\ \varphi(\boldsymbol{j}) &= \boldsymbol{j} - \mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{j} = (-1/3, 2/3, -1/3),\\ \varphi(\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{k} - \mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{k} = (-1/3, -1/3, 2/3).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

2-й способ. Можно заметить, что если дополнить вектор $\boldsymbol{n}$ до базиса пространства V_3 любыми двумя векторами $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$, лежащими в плоскости α, то в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{n}$ ЛО φ имеет матрицу

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, в базисе $\boldsymbol{f}$ ЛО φ действует "стиранием" третьей координаты. Векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ легко подбираются, например,

$$\boldsymbol{f}_1 = (-1, 0, 1),\ \boldsymbol{f}_2 = (0, -1, 1).$$

Теперь матрица перехода

$$S = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, по формуле 1,

$$P = T^{-1}_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{e}} R T_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{e}} = SRS^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Для самостоятельного решения предлагается задача [П, 1438].

Ядром линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ называется множество

$$\ker\varphi = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \subseteq V.$$

Образом линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ называется множество

$$\operatorname{im}\varphi = \{\boldsymbol{y} \in W \mid \exists \boldsymbol{x} \in V : \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\} \subseteq W.$$

Задача 10. Докажите, что ядро $\ker\varphi$ является векторным подпространством пространства V, а образ $\operatorname{im}\varphi$ — векторным подпространством пространства W.

Очевидно, что линейное отображение φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{im}\varphi = W$.

Задача 11. Докажите, что линейное отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\ker\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Лемма 4. *Если линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ имеет матрицу A относительно некоторых базисов пространств V и W, то*

$$\dim\operatorname{im}\varphi = \operatorname{Rg} A.$$

Теорема 4. *Если $\varphi\colon V \to V$ — ЛО на конечномерном пространстве V, то*

$$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi = \dim V.$$

Следствие 3. *ЛО на конечномерном пространстве инъективен тогда и только тогда, когда он сюръективен.*

Задача 12. Найдите размерность ядра и образа ЛО на $\mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 13. ЛО $\varphi\colon V \to V$ называется *идемпотентным*, если $\varphi^2 = \varphi$, где $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Выяснить геометрический смысл идемпотентного ЛО.

Список литературы

[ЕД] А. В. Ефимов, Б. П. Демидович (ред.), Сборник задач по математике для втузов, в четырёх частях, часть 1, Линейная алгебра и основы математического анализа, 3-е изд., М.: Наука, 1993.

[П] И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд., М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.