ЛА и АГ (ИУ9), занятие 2

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Д. А. Степанов

Вектор $\boldsymbol{x}$ векторного пространства V над полем $\Bbbk$ называется *собственным вектором* линейного оператора (ЛО) $\varphi\colon V \to V$, если $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ и

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \tag{1}$$

для некоторого элемента $\lambda \in \Bbbk$. Элемент $\lambda \in \Bbbk$ называется *собственным значением* ЛО φ, если существует такой вектор $\boldsymbol{x} \in V$, что $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ и $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$. Собственное значение λ и собственный вектор $\boldsymbol{x}$ ЛО φ, связанные соотношением (1), называются *отвечающими друг другу*. В случае, когда поле $\Bbbk$ числовое, например, $\Bbbk = \mathbb{R}$, вместо термина "собственное значение" обычно используется термин *собственное число*. Для вычисления собственных значений ЛО, заданного в некотором базисе матрицей A, используется *характеристический многочлен* матрицы (или линейного оператора) A. По определению, это многочлен $\chi_A(\lambda) \in \Bbbk[\lambda]$ от переменной λ с коэффициентами в поле $\Bbbk$, получающийся при раскрытии определителя

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E|,$$

где E — единичная матрица того же размера, что и A. *Характеристическим уравнением* матрицы A называется уравнение

$$\chi_A(\lambda) = 0.$$

Лемма 1. *Если квадратные матрицы $A \in M_n(\Bbbk)$ и $B \in M_n(\Bbbk)$ подобны, т. е. существует такая невырожденная матрица $S \in M_n(\Bbbk)$, что $B = S^{-1}AS$, то характеристические многочлены матриц A и B равны:*

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda).$$

Следствие 1. *Характеристический многочлен является инвариантом линейного оператора, т. е., характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ матрицы A ЛО φ не зависит от базиса, в котором вычислена матрица A.*

Благодаря следствию 1 имеет смысл говорить о *характеристическом многочлене ЛО φ*.

Теорема 1. *Элемент $\lambda_0 \in \Bbbk$ тогда и только тогда будет собственным значением ЛО φ (матрицы A), когда λ_0 является корнем характеристического уравнения ЛО φ (матрицы A).*

Пример 1 ([ЕД, 4.136]). Найдём собственные числа и собственные векторы ЛО, который в некотором базисе 3-мерного действительного векторного пространства задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы мы найдём координатами в том же базисе, в котором ЛО имеет данную матрицу.

Во-первых, вычислим характеристический многочлен матрицы A. Имеем

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} \ominus$$

разложим определитель по 1-й строке:

$$\begin{aligned} \ominus (4-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & 3 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -7-\lambda \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = \\ = (4-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 1) + 5(-5\lambda + 2) + 2(6\lambda - 3) = \\ = -\lambda^3 + \lambda^2. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0,$$

из которого находим собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$.

Для того, чтобы найти собственные векторы матрицы (ЛО) A, для каждого из собственных чисел λ_i, $i = 1, 2$, нужно решить однородную СЛАУ

$$(A - \lambda_i E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Собственными векторами, отвечающими собственному числу λ_i, будут все *ненулевые* (нетривиальные) решения этой СЛАУ. Найдём сначала собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 0$. В этом случае $A - \lambda_1 E = A$, т. е. нужно решить однородную СЛАУ с матрицей A. Воспользуемся методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2)-(1) \\ (1) \\ (3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)-4(1) \\ (3)-6(1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)/3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)+2(2) \\ (2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в ходе решения хотя бы одна из строк матрицы должна стать нулевой, что и произошло. Действительно, ведь мы решаем систему с матрицей $A - \lambda E$ как раз для такого λ, при котором эта матрица вырождена. Это замечание можно использовать для самопроверки. Если оказалось, что СЛАУ имеет невырожденную матрицу, значит, собственное число было найдено неверно.

Придавая свободной третьей переменной значение $x_3 = 3$, найдём соответствующие значения базисных переменных $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Так как у нас одна свободная переменная x_3, ФСР состоит из одного вектора $(1, 2, 3)^T$. Общее решение в векторной форме записывается как $\boldsymbol{x} = c\,(1, 2, 3)^T$, $c \in \mathbb{R}$. Вспомним, однако, что собственный вектор по определению не может быть нулевым. Поэтому нам нужно исключить из множества решений нулевой вектор. Следовательно, собственными векторами матрицы A, отвечающими собственному числу $\lambda_1 = 0$, будут все векторы вида

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

Поскольку все собственные векторы пропорциональны *одному* вектору $(1, 2, 3)^T$, то в такой ситуации допускается говорить, что *матрица A имеет один собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_1 = 0$.*

Найдём теперь собственные векторы, отвечающие числу $\lambda_2 = 1$. Имеем:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решим однородную СЛАУ с такой матрицей, действуя снова по методу

Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2)-2(1) \\ (1) \\ (3)-2(1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(1) \\ (2)+3(1) \\ (3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)+2(2) \\ (2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае ФСР состоит из вектора $(1, 1, 1)^T$, а всё множество собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному числу $\lambda_2 = 1$, может быть описано как

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R}, \; c \neq 0.$$

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [ЕД, 4.134], [ЕД, 4.142].

Пример 2 ([ЕД, 4.135]). Рассмотрим вкратце аналогичную задачу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления характеристического многочлена разложим определитель $|A - \lambda E|$ по последнему столбцу:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0(\dots) - 0(\dots) + (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3$$

Из характеристического уравнения $(2-\lambda)^3 = 0$ мы видим, что матрица (ЛО) A имеет лишь одно собственное число $\lambda_1 = 2$. Найдём соответствующие собственные векторы. Имеем

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем x_2 в качестве базисной, а x_1, x_3 в качестве свободных переменных. ФСР однородной СЛАУ с матрицей $A - 2E$ найдём с помощью таблицы (см. теорию решения однородных СЛАУ в материалах 1-го семестра):

x_1	x_2	x_3
1	2	0
0	0	1

Таким образом, ФСР состоит из двух векторов $(1, 2, 0)^T$ и $(0, 0, 1)^T$. Общее решение записывается как

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Чтобы исключить из множества решений нулевой вектор достаточно вспомнить, что векторы ФСР всегда линейно независимы, а значит только их тривиальная линейная комбинация равна нулю. Поэтому множество всех *собственных* векторов матрицы A описывается как

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

В такой ситуации допускается говорить, что одному собственному числу $\lambda_1 = 2$ матрицы A отвечают *два* собственных вектора.

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [ЕД, 4.139], [П, 1472].

Полезно помнить и о геометрическом смысле собственного вектора: это вектор, который под действием линейного оператора переходит в коллинеарный вектор (возможно, нулевой). С помощью этого соображения тоже можно решать некоторые задачи.

Пример 3 ([ЕД, 4.130]). Линейный оператор $\boldsymbol{A}\colon V_3 \to V_3$ действует как проектирование на ось Ox:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение, а $\boldsymbol{i}$ — первый вектор некоторого ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Найдём собственные числа и векторы ЛО $\boldsymbol{A}$.

Во-первых, вектор $\boldsymbol{i}$ и все коллинеарные ему векторы под действием ЛО $\boldsymbol{A}$ проектируются в себя, т. е. остаются на месте. Значит, мы уже нашли одно семейство собственных векторов $c\boldsymbol{i}$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Ясно, что они отвечают собственному числу $\lambda_1 = 1$. На первый взгляд может показаться, что никакие другие векторы не остаются на тех же прямых, на которых лежали, под действием проектирования на Ox. Но если вспомнить, что собственный вектор может переходить и в $\mathbf{0}$, становится ясно, что собственными будут и все векторы, перпендикулярные оси Ox, и все они отвечают собственному числу $\lambda_2 = 0$. Аналитически их можно описать следующим образом:

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{j} + c_2\boldsymbol{k},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [ЕД, 4.131] и

Задача 1. Пусть V — произвольное векторное пространство, $\mathrm{id}\colon V \to V$ — тождественный, а $\mathbf{0}\colon V \to V$ — нулевой ЛО, т. е., $\forall \boldsymbol{x} \in V$ $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $\mathbf{0}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Не производя вычислений, найдите собственные векторы и собственные значения ЛО id и $\mathbf{0}$.

Задача 2. Существуют ли ЛО, у которых вообще нет собственных значений и собственных векторов? (См. также задачу [ЕД, 4.144]).

Задача 3. Найдите *комплексные* собственные числа и собственные векторы ЛО $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, который в каноническом базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Доказать, что любой ЛО, действующий на пространстве V_3, имеет хотя бы одно собственное число и собственный вектор.

ЛО зазывается *вырожденным*, если его матрица в некотором базисе вырождена. Можно показать, что это условие на самом деле не зависит от базиса, в котором записывается матрица ЛО.

Задача 5. Доказать, что ЛО является вырожденным тогда и только тогда, когда 0 является его собственным значением.

Напомним, что ЛО $\varphi\colon V \to V$ называется *обратимым*, если существует *обратный* ЛО, т. е. такой ЛО $\varphi^{-1}\colon V \to V$, что $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}$, $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Задача 6. Пусть ЛО $\varphi\colon V \to V$ обратим и имеет собственное значение λ. Доказать, что тогда $\lambda \neq 0$ и элемент $\lambda^{-1} \in \Bbbk$ будет собственным значением обратного ЛО φ^{-1}.

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ *— собственные векторы ЛО* $\varphi \colon V \to V$*, отвечающие* различным *собственным значениям:* $\varphi(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ *и* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$*,* $i, j = 1, \ldots, k$*. Тогда векторы* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ *линейно независимы.*

Задача 7. Пусть ЛО φ действует на n-мерном векторном пространстве V. Доказать, что если φ имеет *n различных* собственных значений, то в пространстве V найдётся базис, в котором матрица ЛО φ диагональна. Такой ЛО называется *диагонализируемым* или *полупростым.*

Задача 8. Показать, что ЛО $\varphi \colon V \to V$ тогда и только тогда будет полупростым, когда в пространстве V найдётся базис, состоящий из собственных векторов ЛО φ.

Пример 4 ([ЕД, 4.176]). Выясним, является ли диагонализируемым действительный ЛО с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Действуя, как объяснялось выше, находим сначала собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Далее, находим собственные векторы, отвечающие λ_1:

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c_1 \in \mathbb{R}, \; c_1 \neq 0,$$

и собственные векторы, отвечающие λ_2:

$$\boldsymbol{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_2, c_3 \in \mathbb{R}, \; c_2^2 + c_3^2 \neq 0.$$

Непосредственно можно убедиться, что собственные векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно независимы (можно, например, составить из них матрицу и найти её ранг или определитель), а следовательно они образуют базис в данном трёхмерном пространстве. Поэтому в соответствии с задачей 8 наш ЛО диагонализируемый.

В качестве дополнительного упражнения предлагается сделать следующее. Убедитесь, что в базисе $\boldsymbol{f}$ данный ЛО имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно ли, что матрицей перехода от исходного базиса к базису $\boldsymbol{f}$ будет матрица

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Напомним, что при переходе к новому базису матрица ЛО меняется в соответствии с формулой

$$B = S^{-1}AS. \tag{2}$$

Найдите обратную матрицу к матрице перехода S и убедитесь, что для наших A, B и S формула (2) выполняется.

Пример 5. Является ли полупростым ЛО $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который имеет в каноническом базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}?$$

Характеристический многочлен и собственные числа:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -3.$$

Собственные векторы:

$$\lambda_1 = -3\colon \quad A + 3E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ФСР } \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Все собственные векторы ЛО φ пропорциональны вектору $\boldsymbol{v}_1$. Таким образом можно сказать, что, с точностью до пропорциональности, ЛО φ имеет лишь один собственный вектор, а поэтому составить базис пространства $\mathbb{R}^2$ из собственных векторов ЛО φ нельзя. Следовательно, φ не полупрост.

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [ЕД, 4.174] и [ЕД, 4.175].

Список литературы

[ЕД] А. В. Ефимов, Б. П. Демидович (ред.), Сборник задач по математике для втузов, в четырёх частях, часть 1, Линейная алгебра и основы математического анализа, 3-е изд., М.: Наука, 1993.

[П] И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд., М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.