ЛА и АГ (ИУ9), занятие 3

Инвариантные подпространства линейных операторов

Д. А. Степанов

Подпространство U векторного пространства V над полем $\Bbbk$ называется *инвариантным подпространством* ЛО $\varphi\colon V \to V$, если $\varphi(\boldsymbol{x}) \in U$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in U$. Очевидным образом ЛО φ определяет ЛО $\varphi_{|U}\colon U \to U$:

$$\forall \boldsymbol{x} \in U \ \varphi_{|U}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}).$$

ЛО $\varphi_{|U}$ называется *ограничением* ЛО φ на инвариантное подпространство U.

Задача 1. Докажите, что если U и W являются инвариантными подпространствами ЛО $\varphi\colon V \to V$, то $U \cap W$ и $U + W$ также будут инвариантными подпространствами для φ.

Пусть $\lambda \in \Bbbk$ — собственное значение ЛО φ. Подпространство

$$U_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\},$$

состоящее из всех собственных векторов ЛО φ, отвечающих собственному значению λ, плюс нулевой вектор, называется *собственным подпространством* ЛО φ, отвечающим собственному значению λ. Ясно, что любое собственное подпространство ЛО φ является в то же время и инвариантным подпространством ЛО φ, а ограничение $\varphi_{|U_\lambda}$ — гомотетия с коэффициентом λ:

$$\varphi_{|U_\lambda} = \lambda \operatorname{id}_{U_\lambda},$$

где $\operatorname{id}_{U_\lambda}$ — тождественный ЛО на U_λ.

С парой (ЛО на V, инвариантное подпространство) связан ещё один объект. Напомним, что для любого подпространства U векторного пространства V определено *факторпространство* V/U. Определим отображение $p\colon V \to V/U$ формулой $p(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{x} \in V$, а $[\boldsymbol{x}]$ — класс вектора $\boldsymbol{x}$ в факторпространстве V/U. Отображение p называется *естественной проекцией*.

Задача 2. Покажите, что естественная проекция $p\colon V \to V/U$ — линейное отображение.

Лемма 1. *Пусть U — инвариантное подпространство ЛО $\varphi\colon V \to V$. Тогда существует и единствен такой ЛО $\bar\varphi\colon V/U \to V/U$ на факторпространстве V/U, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[d, "p"] \\ V/U \arrow[r, "\bar\varphi"'] & V/U \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $p \circ \varphi = \bar\varphi \circ p$.

ЛО $\bar\varphi$ называется линейным оператором, *индуцированным* ЛО φ на факторпространстве V/U.

Задача 3. Докажите лемму 1 (Указаиние: определите $\bar\varphi$ формулой

$$\bar\varphi([\boldsymbol{x}]) = [\varphi(\boldsymbol{x})],$$

затем проверьте корректность этого определения, линейность $\bar\varphi$ и другие требования леммы 1).

Теорема 1. *Пусть $\dim V = n$ и U — k-мерное инвариантное подпространство ЛО $\varphi\colon V \to V$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис пространства V, причём векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ образуют базис подпространства U. Тогда матрица ЛО φ в базисе $\boldsymbol{e}$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $A \in M_k(\Bbbk)$, $B \in M_{n-k}(\Bbbk)$, $C \in M_{k\times(n-k)}(\Bbbk)$, $0 \in M_{(n-k)\times k}$, причём матрица A служит матрицей ограничения $\varphi_{|U}$ ЛО φ на U в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, а матрица B — матрицей индуцированного ЛО $\bar\varphi$ на факторпространстве V/U в базисе $[\boldsymbol{e}_{k+1}], \ldots, [\boldsymbol{e}_n]$.

Следствие 1. *Если U — инвариантное подпространство ЛО φ, то характеристический многочлен ограничения $\varphi_{|U}$ ЛО φ на U делит характеристический многочлен ЛО φ: $\chi_{\varphi_{|U}} \mid \chi_\varphi$.*

Пример 1 ([П, 1503]). Найдём все инвариантные подпространства полупростого ЛО $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, который в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ из собственных векторов имеет диагональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

с *различными* собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали.

Заметим, что характеристический многочлен ЛО φ равен

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda).$$

Пусть U — инвариантное подпространство размерности k данного ЛО. Так как по следствию 1 характеристический многочлен ограничения ЛО φ на U обязан делить многочлен $\chi_A(\lambda)$, многочлен $\chi_{\varphi_{|U}}(\lambda)$ может быть только произведением k множителей вида $\lambda_i - \lambda$. Чтобы не усложнять обозначения, предположим, что

$$\chi_{\varphi_{|U}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda).$$

Это означает, что ЛО $\varphi_{|U}$ имеет k различных собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Но каждому собственному числу соответствует хотя бы один собственный вектор, и, с другой стороны, ясно, что любой собственный вектор ЛО $\varphi_{|U}$ будет в то же время и собственным вектором ЛО φ. Но φ имеет лишь один (с точностью до пропорциональности) собственный вектор, отвечающий λ_i — это $\boldsymbol{e}_i$. Отсюда мы заключаем, что векторы $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, k$, принадлежат подпространству U. Эти векторы линейно независимы, а размерность U равна k. Следовательно, подпространство U порождается векторами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.

К инвариантным подпространствам вида

$$\langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k} \rangle, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,$$

нужно добавить нулевой подпространство $\{\mathbf{0}\}$, которое является инвариантным для любого ЛО. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между инвариантными подпространствами ЛО φ и подмножествами множества из n индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$. При этом можно считать, что нулевое подпространство соответствует пустому подмножеству $\varnothing$. Значит, количество всех инвариантных подпространств ЛО φ равно количеству всех подмножеств n-элементного множества. Как известно из комбинаторики, это количество равно 2^n. †

Пример 2 ([П, 1501]). Найдём все инвариантные подпространства ЛО

$\boldsymbol{D}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданного в каноническом базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

ЛО $\boldsymbol{D}$ можно понимать как оператор дифференцирования, действующий на пространстве многочленов степени не выше $n-1$, записанный в подходящем базисе.

Заметим, во-первых, что ЛО $\boldsymbol{D}$ (и его матрица A) является *нильпотентным* степени n, т. е. $\boldsymbol{D}^n = 0$, но $\boldsymbol{D}^{n-1} \neq 0$. ЛО $\boldsymbol{D}$ обладает одним собственным числом $\lambda = 0$, которому соответствует единственный, с точностью до пропорциональности, собственный вектор $\boldsymbol{e}_1$. Соответствующее собственное подпространство является инвариантным, совпадает с ядром ЛО $\boldsymbol{D}$:

$$V_0 = \ker \boldsymbol{D},$$

и имеет размерность 1. Итак, кроме тривиальных инвариантных подпространств $\{\boldsymbol{0}\}$ и V мы можем указать ещё одно инвариантное подпространство $U_1 = V_0 = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$.

Следующее существенное замечание состоит в том, что так как $\boldsymbol{D}^n = 0$, ядра операторов $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^2, \ldots, \boldsymbol{D}^n$ образуют возрастающую последовательность подпространств:

$$\ker \boldsymbol{D} \subseteq \ker \boldsymbol{D}^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker \boldsymbol{D}^n = V.$$

Обозначим $U_i = \ker \boldsymbol{D}^i$, $i = 1, \ldots, n$, и $U_0 = \{\boldsymbol{0}\}$. Вычислив степени матрицы A, легко убедиться, что

$$\ker \boldsymbol{D}^i = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i \rangle, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

а следовательно $\dim U_i = i$. Цепочка подпространств

$$\{\boldsymbol{0}\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_n = V, \tag{1}$$

исчерпывающая всё пространство V, называется *фильтрацией* векторного пространства V. Если некоторый вектор $\boldsymbol{x}$ переходит в нуль под действием ЛО $\boldsymbol{D}^i$, то вектор $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ переходит в нуль под действием ЛО $\boldsymbol{D}^{i-1}$, а значит и подавно $\boldsymbol{x} \in \ker \boldsymbol{D}^i$. Это показывает, что все подпространства U_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, являются инвариантными для $\boldsymbol{D}$.

Покажем, что других инвариантных подпространств у ЛО $\boldsymbol{D}$ нет. Действительно, пусть U — какое-либо инвариантное подпространство. Посмотрим, как это подпространство пересекается с фильтрацией (1), а именно, найдём такое наименьшее натуральное k, что $U \subseteq U_k$. Такое $k \leqslant n$ обязательно существует, ибо $U_n = V$. Далее, поскольку k с данным свойством наименьшее, в пространстве U найдётся такой вектор $\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{D}^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, но $\boldsymbol{D}^{k-1}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ (это т. н. вектор высоты k). Положим

$$\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_{k-1} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{D}^{k-1}(\boldsymbol{x}).$$

Докажем теперь, что векторы $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ линейно независимы. Пусть

$$\mu_1 \boldsymbol{f}_1 + \mu_2 \boldsymbol{f}_2 + \cdots + \mu_k \boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

для некоторых $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Подействуем на равенство (2) ЛО $\boldsymbol{D}^{k-1}$. Так как все $\boldsymbol{f}_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$ под действием $\boldsymbol{D}^{k-1}$ обратятся в нуль, получим

$$\mu_k \boldsymbol{D}^{k-1}(\boldsymbol{f}_k) = \mu_k \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{0}.$$

Но $\boldsymbol{f}_1 \neq \boldsymbol{0}$, следовательно $\mu_k = 0$. Действуя на (2) последовательно ЛО $\boldsymbol{D}^{k-2}, \ldots, \boldsymbol{D}$ можно убедиться, что $\mu_i = 0$ и при $i < k-1$. Но тогда $\dim U \geqslant k$, и в то же время U содержится в подпространстве U_k размерности k. Значит, $U = U_k$. В терминах пространства многочленов U_k состоит из всех многочленов степени не выше $k-1$. †

Заметим, что ЛО вполне может обладать бесконечным множеством инвариантных подпространств, как показывает пример гомотетии $\lambda\,\mathrm{id}_V$ на любом пространстве V, где $\dim V \geqslant 2$ и базовое поле $\Bbbk$ бесконечно.

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [П, 1504, 1506].

По основной теореме алгебры любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Поэтому ЛО на конечномерном комплексном пространстве обязательно имеет хотя бы одно собственное число, а значит и собственный вектор. Как следствие получаем такое утверждение.

Теорема 2. *Любой линейный оператор на конечномерном комплексном векторном пространстве обладает по крайней мере одним одномерным инвариантным подпространством.*

Следствие 2. *Если $\varphi\colon V \to V$ — ЛО на конечномерном комплексном пространстве V, то в V существует базис, в котором матрица ЛО φ имеет верхний треугольный вид.*

Задача 4. Докажите, что любой ЛО на бесконечномерном векторном пространстве V имеет нетривиальное (отличное от нулевого пространства и всего V) инвариантное подпространство.

Как мы знаем, ЛО на действительном векторном пространстве может не иметь собственных чисел и векторов, а значит и одномерных инвариантных подпространств. Для исследования вопроса об инвариантных подпространствах действительного ЛО нам потребуется понятие комплексификации действительного векторного пространства и линейного оператора.

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. По аналогии с определением комплексного числа определим множество $V_{\mathbb{C}}$ как множество всех упорядоченных пар $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ пространства V, которые мы будем записывать как $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$:

$$V_{\mathbb{C}} = \{\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\}.$$

Операцию сложения элементов множества $V_{\mathbb{C}}$ определим как сложение векторов прямой суммы пространств формулой

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}' + i\boldsymbol{v}' \in V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') + i(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'),$$

а умножение на комплексные числа формулой

$$\lambda = a + ib \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \in V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{x} = (a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}) + i(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}).$$

Лемма 2. *Алгебраическая структура* $(V_{\mathbb{C}}, +, \lambda\cdot)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, *является векторным пространством над полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел.*

Пространство $V_{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* действительного векторного пространства V. Продолжая аналогию с комплексными числами, условимся писать $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$ для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \in V_{\mathbb{C}}$ и называть вектор $\bar{\boldsymbol{x}}$ *сопряжённым* к вектору $\boldsymbol{x}$.

Лемма 3. *Векторы* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \in V$ *линейно независимы (над* $\mathbb{R}$*) тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{e}_1 + i\,\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{e}_k + i\,\boldsymbol{0} \in V_{\mathbb{C}}$ *линейно независимы (над* $\mathbb{C}$*). В частности, если* $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, *то и* $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$.

Пусть теперь $\varphi\colon V \to V$ — ЛО. Определим отображение $\varphi_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ формулой

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}) + i\varphi(\boldsymbol{v}).$$

Лемма 4. *Отображение* $\varphi_{\mathbb{C}}$ *является линейным оператором на пространстве* $V_{\mathbb{C}}$.

ЛО $\varphi_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией линейного оператора* φ. Заметим, что если ЛО φ имеет матрицу A в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства V, то ЛО $\varphi_{\mathbb{C}}$ имеет ту же матрицу A в базисе $\boldsymbol{e}_1 + i\,\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{e}_n + i\,\boldsymbol{0}$ пространства $V_{\mathbb{C}}$. В частности, ЛО φ и его комплексификация имеют одинаковые характеристические многочлены.

Теорема 3. *Пусть $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$ — комплексное собственное число комплексификации $\varphi_{\mathbb{C}}$ ЛО φ, определённого на конечномерном действительном векторном пространстве V, а $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ — соответствующий собственный вектор ЛО $\varphi_{\mathbb{C}}$. Тогда $\bar{\lambda} = a - ib$ также будет собственным числом ЛО $\varphi_{\mathbb{C}}$, а отвечающим ему собственным вектором будет $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$. Более того, векторы $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ линейно независимы и порождают 2-мерное инвариантное подпространство ЛО φ. Матрицей ограничения ЛО φ на это подпространство служит $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.*

Следствие 3. *Любой действительный ЛО на конечномерном векторном пространстве обладает хотя бы одним инвариантным подпространством размерности, не превышающей 2.*

Пример 3. Найдём инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который задан в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -6 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём сначала характеристический многочлен матрицы A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 4 \\ -6 & -3-\lambda & 7 \\ 0 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \ominus$$

разложим определитель по первому столбцу:

$$\ominus (-4-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 7 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(\lambda^2+26) + 6(2\lambda+14) =$$

$$= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 14\lambda - 20 = -\lambda^2(\lambda+2) - 2(\lambda^2 + 7\lambda + 10) =$$
$$= -\lambda^2(\lambda+2) - 2(\lambda+2)(\lambda+5) = -(\lambda+2)(\lambda^2 + 2\lambda + 10).$$

Действительный ЛО φ имеет лишь одно собственное число $\lambda_1 = -2$, в то время как его комплексификация $\varphi_{\mathbb{C}}$ имеет ещё два комплексно сопряжённых собственных числа $\lambda_2 = -1-3i$ и $\lambda_3 = -1+3i$ (это комплексные корни квадратного уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$).

Решите самостоятельно однородную СЛАУ с матрицей

$$A + 2E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

и убедитесь, что числу $\lambda_1 = -2$ отвечает один собственный вектор ЛО φ, а именно

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём теперь собственные векторы комплексификации $\varphi_{\mathbb{C}}$, отвечающие собственному числу $\lambda_2 = -1-3i$. Имеем:

$$A + (1+3i)E = \begin{pmatrix} -3+3i & -2 & 4 \\ -6 & -2+3i & 7 \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)\cdot(-3-3i) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 6+6i & -12-12i \\ -6 & -2+3i & 7 \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} -(2) \\ (1)+3(2) \\ (3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2-3i & -7 \\ 0 & 15i & 9-12i \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)\times(i/3) \\ (3) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2-3i & -7 \\ 0 & -5 & 4+3i \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)/(-5) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2-3i & -7 \\ 0 & 1 & -4/5-(3/5)i \end{pmatrix}$$

Далее мы вычтем из первой строки вторую, умноженную на $2-3i$. Вычислим сначала значение выражения

$$-7+(2-3i)(4/5+(3/5)i) = -7+\frac{1}{5}(2-3i)(4+3i) = -7+\frac{1}{5}(17-6i) = -\frac{18}{5}-\frac{6}{5}i.$$

После указанного преобразования матрицы получим:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -18/5-(6/5)i \\ 0 & 1 & -4/5-(3/5)i \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)/6 \\ (2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5-(1/5)i \\ 0 & 1 & -4/5-(3/5)i \end{pmatrix}.$$

Отсюда, придавая свободной третьей переменной значение 5, находим собственный вектор

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 4+3i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Видно, что вычисление комплексных собственных векторов довольно трудоёмко. Положительный момент заключается в том, что собственный вектор, отвечающий $\lambda_3 = -1+3i$, искать с помощью решения системы не нужно. По теореме 3 достаточно взять сопряжённый вектор к вектору $\boldsymbol{f}_2$:

$$\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 4-3i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

По той же теореме 3, ЛО φ имеет 2-мерное инвариантное подпространство, порождённое действительной

$$\boldsymbol{u} = (3, 4, 5)^T$$

и мнимой

$$\boldsymbol{v} = (1, 3, 0)^T$$

частями вектора $\boldsymbol{f}_2$. Матрицей ограничения ЛО φ на это подпространство в базисе $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ будет

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

а матрицей самого φ в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ —

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу перехода S от канонического базиса пространства $\mathbb{R}^3$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ и проверьте, что $B = S^{-1}AS$.

Итак, в данный момент мы имеем два нетривиальных инвариантных подпространства ЛО φ: одномерное $L = \langle \boldsymbol{f}_1 \rangle$ и 2-мерное $U = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. Допустим, что у φ есть ещё какое-то инвариантное подпространство W. Но если $\dim W = 1$, то это собственное подпространство, а собственный вектор у нас один, следовательно $W = L$. Если $\dim W = 2$, то рассмотрим пересечение $W \cap U$, которое в силу задачи 1 тоже инвариантно для

φ. По формуле Грассмана размерность этого пересечения равна 1 или 2, но вторая возможность реализуется только если $W = U$. В первом же случае мы снова приходим к выводу, что $W \cap U = L$. Но L не содержится в U. Это можно проверить и непосредственно, но лучше всего воспользоваться тем фактом (следствие 1), что если бы L содержалось в U, то характеристический многочлен $\lambda^2 + 2\lambda + 10$ ограничения ЛО φ на U делился бы на характеристический многочлен $-\lambda + 2$ ограничения ЛО φ на L. Однако это очевидно неверно. Мы доказали, что инвариантных подпространств, отличных от L и U, у ЛО φ нет. †

Задача 5. Найти инвариантные подпространства ЛО $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в каноническом базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 8 & -24 & 19 \\ 10 & 32 & 26 \end{pmatrix}$.

Список литературы

[П] И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд., М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.