ЛА и АГ (ИУ9), занятие 4

Жорданова нормальная форма линейных операторов: вычисление ЖНФ матриц порядка 2, 3, 4

Д. А. Степанов

В настоящем занятии все векторные пространства будут предполагаться определёнными над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. С целью упрощения вычислений большинство задач составлены таким образом, чтобы фактически вычисления осуществлялись в поле $\mathbb{R}$.

Жордановой клеткой размера k с собственным числом $\lambda \in \mathbb{C}$ называется квадратная матрица

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{C}).$$

Квадратная матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется матрицей в *жордановой нормальной форме (ЖНФ)*, если A представляет собой блочно-диагональную матрицу с жордановыми клетками на диагонали, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{k_2}(\lambda_1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_{k_m}(\lambda_m)} \end{pmatrix},$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Теорема 1. *Для любого ЛО $\varphi\colon V \to V$ на конечномерном комплексном векторном пространстве V существует базис (т. н.* жорданов базис*), в котором матрица ЛО φ имеет жорданову нормальную форму. ЖНФ ЛО φ определена однозначно с точностью до порядка жордановых клеток.*

Жорданов базис в общем случае определён неоднозначно.

Алгоритм построения жорданова базиса и ЖНФ данного ЛО изложен, например, в [П, задача 1529]. Мы рассмотрим его реализацию для матриц небольшого размера (т. е. для ЛО на пространствах небольшой размерности), для которых возможен ряд упрощений.

Для удобства введём ещё некоторую терминологию. Напомним, что собственное число матрицы (ЛО) A является корнем характеристического уравнения $\chi_A(\lambda) = 0$. *Алгебраической кратностью* собственного числа λ_0 матрицы (ЛО) A называется его кратность как корня характеристического уравнения. *Геометрической кратностью* собственного числа λ_0 называется максимальное количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_0. Другими словами, геометрическая кратность — это размерность собственного подпространства U_{λ_0}, отвечающего собственному числу λ_0. Обозначать алгебраическую кратность будем $m_a(\lambda_0)$, а геометрическую — $m_g(\lambda_0)$.

Теорема 2. *Геометрическая кратность собственного числа ЛО никогда не превосходит алгебраической кратности: $m_g(\lambda_0) \leqslant m_a(\lambda_0)$.*

A. Матрицы размера 2×2**.** Пусть ЛО $\varphi\colon V \to V$, $\dim V = 2$, задан в некотором базисе матрицей $A \in M_2(\mathbb{C})$. Возможны два случая.

Случай 1. Матрица A имеет два различных собственных числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. В таком случае ЛО φ полупрост, и в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ из собственных векторов имеет матрицу

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Это и есть ЖНФ — она состоит из двух жордановых клеток размера 1, а $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ — жорданов базис. Приёмы отыскания собственных чисел и векторов были рассмотрены в предыдущих занятиях. Здесь мы отметим только, что этим ЖНФ и жорданову базису можно поставить в соответствие диаграмму

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \tag{2}$$

Здесь ψ_i — это ЛО $\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V$, $i = 1, 2$. Фактически диаграмма лишь отражает тот факт, что собственный вектор $\boldsymbol{f}_i$ переходит в нуль под действием ЛО ψ_i. Обратите внимание, однако, что жордановы клетки матрицы (1) соответствуют столбцам диаграммы (2).

Случай 2. Матрица A имеет одно собственное число, т. е. её характеристический многочлен имеет один двукратный корень $\lambda \in \mathbb{C}$.

Случай 2.1. Матрица A имеет два линейно независимых собственных вектора, другими словами, и *алгебраическая*, и *геометрическая кратность* собственного числа λ равна 2. Но тогда мы по-существу возвращаемся к случаю 1, ибо

ЛО φ снова полупрост. Более того, его ЖНФ — скалярная матрица

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix} = \lambda E,$$

и ЛО φ является даже гомотетией. Но гомотетия в любом базисе имеет скалярную матрицу λE, значит, таковой является и матрица A. В качестве жорданова базиса можно взять любой базис пространства V. Таким образом, в этом случае задача построения ЖНФ и жорданова базиса тривиальна.

Случай 2.2. Матрица A имеет лишь один (с точностью до пропорциональности) собственный вектор $\boldsymbol{f}_1$. Другими словами, геометрическая кратность собственного числа λ равна 1. В этом случае ЛО φ уже не полупрост, и ни в каком базисе не имеет диагональной матрицы. Поэтому для его ЖНФ остаётся всего одна возможность — матрица

$$J = J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

состоящая из одной жордановой клетки размера 2.

Для построения жорданова базиса найдём такой вектор $\boldsymbol{f}_2$, что $\psi(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_1$, где $\psi = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$. Для этого достаточно найти какое-нибудь решение СЛАУ

$$Bx = f_1, \tag{4}$$

где $B = A - \lambda E$, а f_1 — это вектор-столбец координат вектора $\boldsymbol{f}_1$. Существование решения у системы (4), а значит и вектора $\boldsymbol{f}_2$, доказывается в общей теории ЖНФ. Там же доказывается, что векторы $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ линейно независимы. Следовательно, они образуют базис в пространстве V. Непосредственно проверяется, что в этом базисе ЛО φ имеет матрицу (3) (убедитесь, что вы это понимаете), так что это жорданов базис.

Построенный нами базис изображён на диаграмме справа. Обратите внимание, что диаграмма состоит из одного столбца высоты два, что соответствует единственной клетке размера 2 в ЖНФ (3).

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi"] \\ \boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

Пример 1. Найдём ЖНФ и построим жорданов базис ЛО, который в некотором базисе двумерного векторного пространства имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 9 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2,$$

поэтому ЛО φ имеет одно собственное число $\lambda_1 = -2$. Соответствующий собственный вектор $\boldsymbol{f}_1$ находится из системы с матрицей

$$A + 2E = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

откуда $f_1 = (3, 2)^T$. Знания того, что мы имеем одно собственное число и один собственный вектор, вполне достаточно, чтобы указать ЖНФ ЛО φ:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Для построения жорданова базиса нужно ещё найти вектор $\boldsymbol{f}_2$. Решим систему $Bx = f_1$ с $B = A + 2E$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 3 \\ -4 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, но нам подойдёт любое из них. Выберем $f_2 = (1, 1)^T$. Итак, жорданов базис состоит из векторов $f_1 = (3, 2)^T$ и $f_2 = (1, 1)^T$. †

Задача 1. Найдите ЖНФ и постройте жорданов базис ЛО, который в некотором базисе задан матрицей

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -10+i & 25 \\ -4 & 10+i \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Б. Матрицы размера 3×3. Пусть теперь ЛО $\varphi\colon V \to V$, $\dim V = 3$, задан в некотором базисе матрицей $A \in M_3(\mathbb{C})$. Возможны три случая.

Случай 1. Матрица A имеет 3 различных собственных числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. ЛО φ в этом случае полупростой, ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$$

имеет три жордановых клетки размера 1, а жорданов базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ состоит из собственных векторов, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Такая ситуация изображается диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi_1"] & \boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi_2"] & \boldsymbol{f}_3 \arrow[d, "\psi_3"] \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

где $\psi_i = \varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V$, $i = 1, 2, 3$.

Случай 2. Матрица A имеет 2 различных собственных числа $\lambda, mu \in \mathbb{C}$, т. е. характеристический многочлен χ_A имеет двукратный корень λ и простой корень μ. Этот случай в свою очередь разбивается на два в зависимости от геометрической кратности числа λ.

Случай 2.1. Пусть геометрическая кратность собственного числа λ равна 2, т. е. этому числу отвечают два линейно независимых собственных вектора. ЛО φ снова оказывается полупростым и этот случай ничем по существу не отличается от случая 1.

Случай 2.2. Пусть теперь геометрическая кратность числа λ равна 1, т. е. ему отвечает один (с точностью до пропорциональности) собственный вектор $\boldsymbol{f}_1$. Так как собственных чисел у нас два, ЖНФ не может иметь менее, чем две жордановы клетки. С другой стороны, ЛО φ в данном случае не полупрост, поэтому для ЖНФ остаётся единственная возможность состоять из одной клетки размера 2 и одной размера 1. Итак,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Положим теперь $\psi = \varphi - \lambda\, \mathrm{id}_V$. Общая теория ЖНФ обеспечивает существование такого вектора $\boldsymbol{f}_2$, что $\psi(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_1$ (это т. н. *вектор высоты* 2). Координаты вектора $\boldsymbol{f}_2$ можно найти из СЛАУ $Bx = f_2$, где $B = A - \lambda E$. Обозначим ещё $\boldsymbol{f}_3$ собственный вектор ЛО φ, отвечающий собственному числу μ. Тогда $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ — жорданов базис, в котором φ имеет матрицу J. Соответствующая диаграмма изображена справа.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi"] & \\
\boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi"] & \boldsymbol{f}_3 \arrow[d, "\theta"] \\
\mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Здесь $\theta = \varphi - \mu\, \mathrm{id}_V$.

Случай 3. Матрица A имеет одно собственное число алгебраической кратности 3, т. е. характеристический многочлен χ_A имеет один трёхкратный корень λ. Этот случай распадается на три в зависимости от геометрической кратности числа λ.

Случай 3.1. Если геометрическая кратность собственного числа λ равна 3, т. е. ему отвечают три линейно независимых собственных вектора, то ЛО φ полупрост и, более того, является гомотетией: $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$, $A = \lambda E$. Этот случай тривиален: ЖНФ — это матрица λE, жорданов базис — любой базис в пространстве V.

Случай 3.2. Геометрическая кратность собственного числа λ равна 2. Вообще, количество жордановых клеток в ЖНФ ЛО всегда равно максимальному количеству линейно независимых собственных векторов этого ЛО. Так что в этом случае для ЖНФ имеется лишь одна возможность

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

— матрица из двух жордановых клеток размера 2 и 1. В этом отношении данный случай похож на случай 2.2, но вот жорданов базис здесь удобнее искать по-другому.

Обозначим пока два линейно независимых собственных вектора нашего ЛО $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Если в случае 2.2 мы “поднимали” один из этих векторов до вектора $\boldsymbol{f}_2$, то в данном случае гарантии, что система вида $Bx = v_i$, $i = 1$ или 2, совместна, нет. Поэтому лучше пойти с другой стороны и применить метод “спуска”. А именно, выберем в пространстве V любой вектор $\boldsymbol{f}_2$ с условием $\psi(\boldsymbol{f}_2) \neq \mathbf{0}$, $\psi = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$. На практике всегда достаточно перебрать векторы f_2 с координатами $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ и выбрать из них тот, для которого $Bf_2 \neq 0$, где $B = A - \lambda E$. Далее нужно положить $\boldsymbol{f}_1 = \psi(\boldsymbol{f}_2)$ (в координатах $f_1 = Bf_2$), а в качестве f_3 выбрать тот из собственных векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, который не пропорционален вектору $\boldsymbol{f}_1$ (может оказаться, что вектору $\boldsymbol{f}_1$ не пропорционален ни $\boldsymbol{v}_1$, ни $\boldsymbol{v}_2$, тогда в качестве $\boldsymbol{f}_3$ можно взять любой из них). Построенные таким образом векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ и образуют жорданов базис, в котором ЛО φ имеет ЖНФ J. Диаграмма в этом случае аналогична диаграмме (5), только ψ_1 и ψ_2 нужно заменить на ψ.

Случай 3.3. Геометрическая кратность собственного числа λ равна 1, т. е. ЛО φ имеет один собственный вектор $\boldsymbol{v}_1$. Опять-таки информации об алгебраической и геометрической кратности числа λ достаточно, чтобы определить ЖНФ ЛО

φ. В данном случае это единственная жорданова клетка размера 3:

$$J = J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Диаграмма имеет вид (6), а векторы $\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$, дополняющие единственный собственный вектор $\boldsymbol{v}_1$ до жорданова базиса, можно найти как методом "подъёма", так и методом "спуска". Например, в методе "спуска" нужно сначала выбрать такой вектор $\boldsymbol{f}_3 \in V$, что $\psi^2(\boldsymbol{f}_3) = \psi(\psi(\boldsymbol{f}_3)) \neq \mathbf{0}$, а затем положить $\boldsymbol{f}_2 = \psi(\boldsymbol{f}_3)$, $\boldsymbol{f}_1 = \psi(\boldsymbol{f}_2)$; здесь, как и раньше, $\psi = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{f}_3 \arrow[d, "\psi"] \\ \boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi"] \\ \boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbf{0} \end{tikzcd} \tag{6}$$

При этом, возможно, собственный вектор $\boldsymbol{f}_1$ будет отличаться скалярным множителем от собственного вектора $\boldsymbol{v}_1$, найденного при определении геометрической кратности собственного числа λ. Самостоятельно продумайте, как в данном случае можно применить метод "подъёма".

Пример 2. Найдём ЖНФ и построим жорданов базис ЛО $\varphi\colon V \to V$ на 3-мерном векторном пространстве V, который в некотором базисе задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 1)^3.$$

Многочлен χ_A имеет единственный трёхкратный корень $\lambda = 1$. Значит, мы имеем случай **Б**.3. Чтобы понять, какова геометрическая кратность собственного числа $\lambda = 1$, найдём собственные векторы.

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ФСР этой однородной СЛАУ состоит из двух векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, геометрическая кратность равна 2, мы имеем случай **Б**.3.2 и

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— ЖНФ данного ЛО.

Чтобы применить метод “спуска”, заметим, что вектор $e_1 = (1, 0, 0)^T$ не обращается в нуль при умножении на матрицу $B = A - E$:

$$Be_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (= v_1 - v_2) \neq 0.$$

Теперь мы можем положить

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это искомый жорданов базис. †

Пример 3. Найдём теперь ЖНФ и жорданов базис ЛО $\varphi\colon V \to V$, $\dim V = 3$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 6 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ 6 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+3) - (6\lambda+9) = -\lambda^3.$$

Единственный корень многочлена χ_A и единственное собственное число ЛО φ алгебраической кратности 3 — $\lambda = 0$.

Найдём теперь собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)-(1) \\ (3)-2(1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Это показывает, что геометрическая кратность собственного числа $\lambda = 0$ равна 1, и мы имеем случай **Б**.3.3. ЖНФ, таким образом, состоит из одной жордановой клетки размера 3:

$$J = \left(\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \right).$$

Продемонстрируем в этом примере метод “подъёма” для вычисления векторов жорданова базиса. Так как $\lambda = 0$, матрица $B = A - \lambda E$ совпадает с матрицей A. Решим систему $Ax = f_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (2)-(1) \\ (3)-2(1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Одно из решений —

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решим теперь систему $Ax = f_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (2)-(1) \\ (3)-2(1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Здесь выберем решение $f_3 = (1, 2, 2)^T$. Итак, жорданов базис:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве дополнительного задания найдите матрицу перехода S от исходного базиса, в котором ЛО φ задан матрицей A, к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$, и убедитесь, что $S^{-1}AS = J$. †

Для самостоятельного решения рекомендуется задача [П, 1532] (в данном издании опечатка: правильная матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$).

B. Матрицы размера 4×4**.** Рассмотрим теперь ЛО $\varphi \colon V \to V$, действующих на 4-мерном пространстве V. Матрицу, задающую ЛО φ в некотором базисе пространства V, снова обозначим через A. На этот раз возможны четыре основных случая.

Случай 1. Матрица A имеет 4 различных собственных числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$. Тогда ЛО φ полупрост и имеет ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_4} \end{pmatrix},$$

состоящую из четырёх жордановых клеток размера 1. Жорданов базис совпадает с базисом $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ из собственных векторов этого ЛО. Соответствующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi_1"] & \boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi_2"] & \boldsymbol{f}_3 \arrow[d, "\psi_3"] & \boldsymbol{f}_4 \arrow[d, "\psi_4"] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

где $\psi_i = \varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Случай 2. Матрица A имеет 3 различных собственных числа. Обозначим λ_1 собственное число алгебраической кратности 2 и λ_2, λ_3 два других собственных числа алгебраической кратности 1. Этот случай в свою очередь распадается на два в зависимости от геометрической кратности собственного числа λ_1.

Случай 2.1. Геометрическая кратность числа λ_1 равна 2, т. е. ему отвечают два линейно независимых собственных вектора. В этом случае ЛО φ тоже полупрост и этот случай по существу не отличается от случая 1.

Случай 2.2. Геометрическая кратность числа λ_1 равна 1. Всего мы имеем, таким образом, 3 линейно независимых собственных вектора — по одному, отвечающему каждому из собственных числе $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Из этих векторов невозможно составить базис 4-мерного пространства V, поэтому ЛО φ не полупрост. Но собственным числам λ_2, λ_3 так или иначе отвечают две жордановых клетки размера 1, значит, собственному числу λ_1 отвечает клетка размера 2 и ЖНФ, таким образом,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Жорданов базис здесь удобно искать методом “подъёма”. Пусть $\boldsymbol{f}_1$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_1. В качестве $\boldsymbol{f}_2$ нужно взять какое-либо решение СЛАУ $Bx = f_1$, где $B = A - \lambda_1 E$. Пусть $\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ — собственные векторы, отвечающие λ_2, λ_3 соответственно. Тогда $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ — искомый жорданов базис. Его принято изображать диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi_1"] & & \\
\boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi_1"] & \boldsymbol{f}_3 \arrow[d, "\psi_2"] & \boldsymbol{f}_4 \arrow[d, "\psi_3"] \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

где $\psi_i = \varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V$, $i = 1, 2, 3$.

Случай 3. Матрица A имеет 2 различных собственных числа λ и μ. Для алгебраических и геометрических кратностей имеются следующие возможности.

Случай 3.1. Алгебраическая кратность одного из собственных чисел, например, λ, равна 3. Алгебраическая кратность числа μ тогда равна 1. Геометрическая кратность числа μ тогда тоже 1, а геометрическая кратность числа λ может принимать любое из значений $1, 2, 3$.

`Случай 3.1.1.` Пусть $m_g(\lambda) = 3$. Тогда ЛО φ полупрост и этот случай аналогичен случаю 1.

`Случай 3.1.2.` Пусть $m_g(\lambda) = 2$. ЖНФ состоит из трёх жордановых клеток размеров 2, 1 и 1:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

и в этом отношении данный случай аналогичен случаю 2.2. Жорданов базис, однако, найти несколько сложнее.

Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ — два линейно независимых собственных вектора, отвечающих числу λ. Положим $\psi = \varphi - \lambda \operatorname{id}_V$, $B = A - \lambda E$. Теперь нужно найти такой вектор $\boldsymbol{f}_2 \in V$, что $\psi^2(\boldsymbol{f}_2) = \mathbf{0}$, но $\psi(\boldsymbol{f}_2) \neq \mathbf{0}$. На практике нужно сначала найти базис ядра $\ker \psi^2$ ЛО ψ^2 (это ФСР однородной СЛАУ $B^2 x = 0$), и взять тот вектор f_2, для которого $Bf_2 \neq 0$ (один из векторов ФСР обязательно будет удовлетворять поставленному условию). Далее нужно положить $\boldsymbol{f}_1 = \psi(\boldsymbol{f}_2)$, $\boldsymbol{f}_3$ — тот из векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, который не пропорционален вектору $\boldsymbol{f}_1$, и $\boldsymbol{f}_4$ — собственный вектор ЛО φ, отвечающий собственному числу μ.

`Случай 3.1.3.` Пусть $m_g(\lambda) = 1$. Теперь ЖНФ имеет две жордановы клетки размеров 3 и 1:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Жорданов базис удобнее всего искать методом “подъёма”. Пусть $\boldsymbol{f}_1$ — единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор, отвечающий λ. Сначала, решив СЛАУ $Bx = f_1$, где $B = A - \lambda E$, найдём такой вектор $\boldsymbol{f}_2$, что $\psi(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_1$, $\psi = \varphi - \lambda \operatorname{id}_V$. Затем, решив СЛАУ $Bx = f_2$, найдём такой вектор $\boldsymbol{f}_3$, что $\psi(\boldsymbol{f}_3) = \boldsymbol{f}_2$. В качестве вектора $\boldsymbol{f}_4$ нужно взять собственный вектор, отвечающий числу μ. Диаграмма изображена справа, в ней $\theta = \varphi - \mu \operatorname{id}_V$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{f}_3 \arrow[d, "\psi"] & \\ \boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi"] & \\ \boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi"] & \boldsymbol{f}_4 \arrow[d, "\theta"] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{tikzcd} \qquad (7)$$

Случай 3.2. Алгебраические кратности обоих собственных чисел λ и μ равны 2. Для геометрических кратностей возможности следующие.

`Случай 3.2.1.` $m_g(\lambda) = m_g(\mu) = 2$. ЛО φ полупростой, случай аналогичен случаю 1.

`Случай 3.2.2.` $m_g(\lambda) = 1$, $m_g(\mu) = 2$ (или наоборот). ЖНФ состоит из трёх клеток $J_2(\lambda)$, $J_1(\mu)$, $J_1(\mu)$. Метод построения векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ аналогичен описанному в случае 2.2, но векторы $\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ — это собственные векторы, отвечающие собственному числу μ.

`Случай 3.2.3.` $m_g(\lambda) = m_g(\mu) = 1$. Единственная возможность для ЖНФ — состоять из двух клеток размера 2:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Жорданов базис можно найти также методом “подъёма”. А именно, нужно найти такой вектор $\boldsymbol{f}_2$, что $\psi(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_1$, где $\psi = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$, $\boldsymbol{f}_1$ — собственный вектор, отвечающий λ, и такой вектор $\boldsymbol{f}_4$, что $\theta(\boldsymbol{f}_4) = \boldsymbol{f}_3$, где $\theta = \varphi - \mu\,\mathrm{id}_V$, а $\boldsymbol{f}_3$ — собственный вектор, отвечающий μ. Соответствующая диаграмма изображена справа.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{f}_2 & & \boldsymbol{f}_4 \\ \downarrow\psi & & \downarrow\theta \\ \boldsymbol{f}_1 & & \boldsymbol{f}_3 \\ \downarrow\psi & & \downarrow\theta \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

Случай 4. Матрица A имеет одно собственное число λ алгебраической кратности 4. Имеем 4 случая в зависимости от геометрической кратности числа λ.

Случай 4.1. Если $m_g(\lambda) = 4$, то ЛО φ — гомотетия $\lambda\,\mathrm{id}_V$, ЖНФ $\lambda E = A$. Этот случай тривиален.

Случай 4.2. Пусть $m_g(\lambda) = 3$. ЖНФ состоит из трёх жордановых клеток $J_2(\lambda), J_1(\lambda), J_1(\lambda)$ и в целом этот случай аналогичен случаю 2.2, но жорданов базис удобнее искать методом “спуска”. А именно, пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — три линейно независимых собственных вектора, отвечающих собственному числу λ. Сначала нужно найти такой вектор $\boldsymbol{f}_2 \in V$, что $\psi(\boldsymbol{f}_2) \neq \mathbf{0}$, $\psi = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$, и положить $\boldsymbol{f}_1 = \psi(\boldsymbol{f}_2)$. Затем нужно выбрать из $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ два таких вектора $\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$, которые дополняли бы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ до базиса пространства V.

Случай 4.3. $m_g(\lambda) = 2$. Это единственный случай для матриц размера $\leqslant 4$, в котором знания алгебраической и геометрической кратности собственных чисел не достаточно для определения ЖНФ. Действительно, ЖНФ должна состоять из двух жордановых клеток, но число 4 можно двумя способами представить в виде суммы двух натуральных слагаемых: $4 = 3 + 1 = 2 + 2$. Имеем, соответственно, две возможности для ЖНФ:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Чтобы различить их, нужно найти квадрат ЛО $\psi = \varphi - \lambda \operatorname{id}_V$ (матрицы $B = A - \lambda E$). Если $\psi^2 = 0$, то имеем случай б), если $\psi^2 \neq 0$ (ψ^3 всегда равно 0) — то а).

Жорданов базис в случае а) находится как методом “спуска” (см. пример 4 далее), так и методом “подъёма”, а в случае б) — методом “подъёма” собственных векторов, аналогично случаю 3.2.3.

Случай 4.4. Пусть, наконец, $m_g(\lambda) = 1$. Этим условием ЖНФ определена однозначно как

$$J = J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и состоит из единственной жордановой клетки.

Жорданов базис несложно находится методом “спуска”. Сначала находим такой вектор $\boldsymbol{f}_4 \in V$, что $\psi^3(\boldsymbol{f}_4) \neq \mathbf{0}$ ($B^3 f_4 \neq 0$), где, как всегда, $\psi = \varphi - \lambda \operatorname{id}_V$ ($B = A - \lambda E$), и этот вектор $\boldsymbol{f}_4$ высоты 4 “порождает” остальные векторы жорданова базиса в соответствии с диаграммой, представленной справа. Возможен в этом случае и метод “подъёма”. Продумайте его самостоятельно.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{f}_4 \arrow[d, "\psi"] \\ \boldsymbol{f}_3 \arrow[d, "\psi"] \\ \boldsymbol{f}_2 \arrow[d, "\psi"] \\ \boldsymbol{f}_1 \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

Пример 4. Найдём ЖНФ ЛО, который в некотором базисе 4-мерного векторного пространства задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

и построим соответствующий жорданов базис.

Характеристический многочлен удобнее всего вычислить, разложив определитель $|A - \lambda E|$ по третьему столбцу. Имеем:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda) \begin{vmatrix} -6-\lambda & 13 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 13 \\ -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & -6-\lambda \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) + 3(2\lambda - 3) + 3(-\lambda + 2)\big) =$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1) = (\lambda - 1)^4,$$

откуда находим единственное собственное число $\lambda = 1$ алгебраической кратности 4.

Теперь нужно найти соответствующие собственные векторы.

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(4) \\ (1)/(-3) \\ (2)-2(4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)-4(2) \\ (2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда ФСР $v_1 = (0, 0, 1, 0)^T$, $v_2 = (3, 1, 0, 1)^T$. Итак, геометрическая кратность собственного числа $\lambda = 1$ равна 2. Чтобы различить ЖНФ а) и б) случая **B**.4.3, вычислим квадрат матрицы $B = A - E$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \neq 0,$$

следовательно, это случай а) и ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы уже вычислили B^2, сразу видно, что, например, $B^2 e_1 = (3, 1, 3, 1)^T \neq 0$, где $e_1 = (1, 0, 0, 0)^T$. Вот и положим

$$f_3 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = Bf_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_1 = Bf_2 = B^2 f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $f_1 = 3v_1 + v_2$. Дополнить тройку f_1, f_2, f_3 до базиса можно, например, собственным вектором

$$f_4 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда f_1, f_2, f_3, f_4 — жорданов базис. Диаграмма имеет вид (7) с $\mu = \lambda$, $\theta = \psi$. †

Для самостоятельного решения рекомендуется задача [П, 1534] и следующая задача.

Задача 2. Для ЛО, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

найдите ЖНФ и соответствующий жорданов базис.

Список литературы

[П] И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд., М.: Лабораториия базовых знаний, 2003.