ЛА и АГ (ИУ9), занятие 5

Жорданова нормальная форма линейных операторов: дополнительные задачи

Д. А. Степанов

В этом занятии мы рассмотрим некоторые дополнительные задачи, связанные с теорией ЖНФ. Как и в предыдущем занятии, все векторные пространства предполагаются определёнными над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Как уже указывалось в занятии 4, имеется алгоритм для нахождения ЖНФ и жорданова базиса произвольной матрицы, см. [П, 1529]. Но понимания общей теории ЖНФ и навыков вычисления ЖНФ небольших матриц в целом достаточно, чтобы находить и ЖНФ ЛО на пространствах произвольной размерности.

Пример 1 ([П, 1536]). Найдём ЖНФ и построим жорданов базис ЛО φ, который в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ некоторого n-мерного векторного пространства задан матрицей

$$A = B^2, \text{ где } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Вполне очевидно, что характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \pm\lambda^n$ и матрица A, таким образом, имеет единственное собственное число $\lambda = 0$ алгебраической кратности n. Также стразу видно, что этому собственному числу отвечает два линейно независимых собственных вектора: $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Значит, геометрическая кратность $m_g(0) = 2$ и ЖНФ данного ЛО должна состоять из двух жордановых клеток. Вопрос сводится лишь к размеру этих клеток и к построению жорданова базиса.

Действие ЛО φ на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ можно схематически представить диаграммой (1). Конкретный вид верхней части столбцов зависит от чётности числа n. Если $n = 2k$ чётное, то верхним вектором первого столбца будет $\boldsymbol{e}_{2k-1}$, а верхним вектором второго столбца — $\boldsymbol{e}_{2k}$. В случае нечётного $n = 2k+1$ то наверху первого и второго столбца будем иметь векторы $\boldsymbol{e}_{2k+1}$ и $\boldsymbol{e}_{2k}$ соответственно.

Жорданов базис, таким образом, совпадает с точностью до порядка векторов с исходным базисом $\boldsymbol{e}$. А именно, чтобы получить жорданов базис в чётном случае векторы базиса $\boldsymbol{e}$ нужно перенумеровать так:

$$\begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, "\varphi"] & \vdots \arrow[d, "\varphi"] \\ \boldsymbol{e}_3 \arrow[d, "\varphi"] & \boldsymbol{e}_4 \arrow[d, "\varphi"] \\ \boldsymbol{e}_1 \arrow[d, "\varphi"] & \boldsymbol{e}_2 \arrow[d, "\varphi"] \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{tikzcd} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{e}_{2k-1},$$

$$\boldsymbol{f}_{k+1} = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_{k+2} = \boldsymbol{e}_4, \ldots, \boldsymbol{f}_{2k} = \boldsymbol{e}_{2k}.$$

В нечётном случае нумерация следующая:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{f}_{k+1} = \boldsymbol{e}_{2k+1},$$

$$\boldsymbol{f}_{k+2} = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_{k+3} = \boldsymbol{e}_4, \ldots, \boldsymbol{f}_{2k+1} = \boldsymbol{e}_{2k}.$$

Такой диаграмме соответствует ЖНФ

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_k(0)} & 0 \\ 0 & \boxed{J_k(0)} \end{pmatrix}$$

при чётном $n = 2k$ и ЖНФ

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{k+1}(0)} & 0 \\ 0 & \boxed{J_k(0)} \end{pmatrix}$$

при нечётном $n = 2k + 1$. Напомним, что $J_k(\lambda)$ обозначает жорданову клетку размера k с собственным числом λ. †

Задача 1. Найдите ЖНФ и постройте жорданов базис ЛО φ, который в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ некоторого n-мерного векторного пространства задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если требуется найти только ЖНФ ЛО, заданного некоторой матрицей A, но не жорданов базис, то может быть полезна следующая формула.

Теорема 1. *Пусть λ — собственное число ЛО φ, заданного в некотором базисе матрицей $A \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда количество жордановых клеток $J_k(\lambda)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в ЖНФ ЛО φ, даётся формулой*

$$\operatorname{Rg}(A-\lambda E)^{k-1} - 2\operatorname{Rg}(A-\lambda E)^{k} + \operatorname{Rg}(A-\lambda E)^{k+1}, \tag{2}$$

где для любой квадратной матрицы B принято, что $B^0 = E$.

Пример 2. Найдём ЖНФ ЛО, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно проверяется, что собственные числа — $\lambda_1 = -1$ алгебраической кратности 2 и $\lambda_2 = 1$ алгебраической кратности 1. Положим $B = A - \lambda_1 E = A + E$. Тогда

$$\operatorname{Rg} B^0 = \operatorname{Rg} E = 3,$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (3)-(1) \\ (2)-(1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} B = 2,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (3)-2(1) \\ (2)-(1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} B^2 = 2,$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} B^3 = 1,$$

откуда, по формуле (2), количество клеток $J_1(-1)$ размера 1 равно

$$\operatorname{Rg} B^0 - 2\operatorname{Rg} B + \operatorname{Rg} B^2 = 3 - 4 + 1 = 0,$$

а количество клеток $J_2(-1)$ размера 2 —

$$\operatorname{Rg} B - 2\operatorname{Rg} B^2 + \operatorname{Rg} B^3 = 2 - 2 + 1 = 1.$$

Из-за того, что матрица A имеет размер 3, на собственное число $\lambda_2 = 1$ остаётся одна жорданова клетка размера 1. Итак,

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— ЖНФ данного ЛО. †

Задача 2. Используя формулу (2), найдите ЖНФ ЛО, заданных матрицами

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & -1 \\ -1 & 9 & -5 & -3 \\ -1 & 11 & -7 & -3 \\ -1 & 11 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Для ускорения вычислений собственные числа сообщаются сразу: в случае а) имеется единственное собственное число $\lambda = 2$, а в случае б) два собственных числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -2$.

Если $f \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен от переменной t с комплексными коэффициентами, $\varphi\colon V \to V$ — ЛО, то определён ЛО $f(\varphi)\colon V \to V$ — результат подстановки ЛО φ в многочлен f. Если

$$f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n,$$

то $f(\varphi)$ определяется формулой

$$f(\varphi) = a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \dots + a_n \mathrm{id}_V,$$

где $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k}$ — k-кратная композиция ЛО φ с самим собой, а id_V — тождественный ЛО на пространстве V. Аналогично, если A — квадратная матрица, то определено значение многочлена f на матрице A:

$$f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n E.$$

Здесь A^k — k-я степень матрицы A, а E — единичная матрица того же размера, что и A.

Многочлен $f \in \mathbb{C}[t]$ называется *аннулирующим* для ЛО φ (матрицы A), если $f(\varphi) = 0$ — нулевой ЛО ($f(A) = 0$ — нулевая матрица).

Теорема 2 (Теорема Гамильтона-Кэли)**.** *Характеристический многочлен линейного оператора φ (матрицы A) является аннулирующим для этого ЛО (матрицы): $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ ($\chi_A(A) = 0$).*

Ненулевой многочлен $\mu_\varphi(t)$ называется *минимальным многочленом* ЛО φ, если а) μ_φ имеет минимальную степень среди всех ненулевых аннулирующих многочленов ЛО φ, и б) старший коэффициент многочлена μ_φ равен единице. Аналогично можно определить понятие минимального многочлена матрицы A. Известно, что любой ЛО на конечномерном векторном пространстве имеет минимальный многочлен, и минимальный многочлен данного ЛО определён единственным образом. Известно также, что минимальный многочлен ЛО φ делит любой аннулирующий многочлен ЛО φ. В частности, из теоремы Гамильтона-Кэли тогда следует, что минимальный многочлен μ_φ делит характеристический многочлен χ_φ ЛО φ.

Если известна ЖНФ ЛО φ, то его минимальный многочлен находится легко.

Теорема 3. *Пусть известны все различные собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ЛО φ. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ обозначим через k_i наибольший размер жордановой клетки с собственным числом λ_i, которая встречается в ЖНФ ЛО φ. Тогда*

$$\mu_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{k_i}$$

— минимальный многочлен ЛО φ.

Следствие 1 (Критерий полупростоты ЛО в терминах минимального многочлена)**.** *ЛО φ полупрост тогда и только тогда, когда минимальный многочлен μ_φ не имеет кратных корней.*

Пример 3. В примере 1 занятия 4 мы нашли ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

ЛО, который был задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

По теореме 3 минимальный многочлен

$$\mu_A(t) = (t+2)^2 = \chi_A(t).$$

В примере 2 занятия 4 мы нашли ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

ЛО, который был задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме 3

$$\mu_A(t) = (t-1)^2.$$

Этот многочлен имеет меньшую степень, чем характеристический многочлен $\chi_A(t) = (1-\lambda)^3$ матрицы A.

В примере 3 занятия 4 была ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

ЛО, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Минимальный многочлен

$$\mu_A(t) = t^3$$

в этом случае с точностью до знака совпадает с характеристическим $\chi_A(t) = -t^3$. Проверьте непосредственным вычислением в этом примере, что $A^2 \neq 0$, но $A^3 = 0$.

В примере 4 занятия 4 мы нашли ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

ЛО, который был задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

По теореме 3
$$\mu_A(t) = (t-1)^3,$$
в то время как $\chi_A(t) = (t-1)^4$.

В примере 1 настоящего занятия минимальный многочлен будет
$$\mu_A(t) = t^{\lceil n/2 \rceil},$$
где $\lceil n/2 \rceil$ — верхнее целое от числа $n/2$.

Наконец, в примере 2 минимальный многочлен
$$\mu_A(t) = (t+1)^2(t-1)$$
с точностью до знака совпадает с характеристическим. †

Задача 3. Вернитесь к примерам, в которых вы самостоятельно находили ЖНФ, и во всех них найдите минимальный многочлен.

Теория ЖНФ позволяет определить значение $f(A)$ функции f на матрице A (или ЛО φ) для довольно широкого класса функций. Мы уже определили значение многочлена $f \in \mathbb{C}[t]$ на матрице A.

Задача 4. Покажите, что если A и B — подобные матрицы, а $f \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен, то и матрицы $f(A)$ и $f(B)$ тоже подобны. Точнее, докажите, что если
$$B = S^{-1}AS,$$
то
$$f(B) = S^{-1}f(A)S$$
для невырожденной матрицы S.

Рассмотрим сначала случай, когда
$$A = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
— жорданова клетка размера k.

Теорема 4. *Если $f \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен, то имеет место формула*

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \dfrac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $f^{(j)}$ обозначает j-ю производную многочлена f.

Теперь вполне естественно определить значение $f(J_k(\lambda))$ формулой (4) *для любой функции* f, лишь бы её 1-я, 2-я и т. д. $(k-1)$-я производные *были определены в точке* $t = \lambda$ (для простоты предположим пока, что $\lambda \in \mathbb{R}$).

Нетрудно проверить просто по определению действий с матрицами, что если A — блочная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

с квадратными блоками $A_1, \dots, A_m$ на диагонали, то для любого многочлена $f \in \mathbb{C}[t]$

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(A_m) \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь матрица A приведена к ЖНФ J: $A = SJS^{-1}$,

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{K_2}(\lambda_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_{k_m}(\lambda_m)} \end{pmatrix},$$

с помощью матрицы перехода S. Пусть f — функция, определённая на каждой жордановой клетке $J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_m}(\lambda_m)$. Тогда по определению полагают

$$f(A) = Sf(J)S^{-1} = S \begin{pmatrix} f(J_{k_1}(\lambda_1)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(J_{k_2}(\lambda_2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(J_{k_m}(\lambda_m)) \end{pmatrix} S^{-1}. \tag{5}$$

Пример 4. Вычислим экспоненту от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

из примера 1 занятия 4. Мы уже напоминали соответствующую ЖНФ (3). Напомним также из занятия 4 жорданов базис: $f_1 = (3, 2)^T$ и $f_2 = (1, 1)^T$. Отсюда

$$A = SJS^{-1}, \quad \text{где } S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$e^A = Se^J S^{-1},$$

где по формуле (5)

$$e^J = \exp\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} = e^{-2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно $e^A = e^{-2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = e^{-2}\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$ †

Пример 5. Вычислим 2020-ю степень матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 12 \Rightarrow \lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 2.$$

Собственные векторы:

$$\lambda_1 = -6\colon A + 6E = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2\colon A - 2E = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что ЛО, заданный матрицей A, полупрост, жорданов базис совпадает с базисом из собственных векторов, а ЖНФ - диагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что
$$J^{2020} = \begin{pmatrix} 6^{2020} & 0 \\ 0 & 2^{2020} \end{pmatrix}.$$
Отсюда
$$\begin{aligned} A^{2020} &= \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{2020} & 0 \\ 0 & 2^{2020} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot 2^{2020} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{2020} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= 2^{2017} \begin{pmatrix} 5 \cdot 3^{2020} + 3 & 5 - 5 \cdot 3^{2020} \\ 3 - 3^{2021} & 3^{2021} + 5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
что и даёт ответ к задаче. †

Задача 5. Найдите 2020-ю степень матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Также для самостоятельного решения предлагаются задачи [П, 1168,1170].

Список литературы

[П] И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд., М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.