ЛА и АГ (ИУ9), занятие 6

Линейные операторы на евклидовых и унитарных пространствах

Д. А. Степанов

Пусть V — *евклидово* или *унитарное* пространство, т. е. векторное пространство над $\mathbb{R}$ с обычным скалярным произведением в первом случае и векторное пространство над $\mathbb{C}$ с эрмитовым скалярным произведением во втором. В обоих случаях скалярное произведение будем обозначать символом $(\cdot,\cdot)$. Линейный оператор (ЛО) $\varphi^*\colon V \to V$ называется *сопряжённым* к ЛО $\varphi\colon V \to V$, если

$$\forall x, y \in V \quad (\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi^*(\boldsymbol{y})).$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ и $\psi\colon V \to V$ — ЛО на евклидовом или унитарном пространстве V, $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — ортонормированный базис в V и $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ($M_n(\mathbb{C})$) — матрицы ЛО φ и ψ в базисе $\boldsymbol{e}$ соответственно. ЛО ψ сопряжён к ЛО φ тогда и только тогда, когда а) $B = A^T$, если пространство V евклидово, и б) $B = \bar{A}^T$, где $\bar{A}$ обозначает матрицу $(\bar{a}_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$ из комплексно сопряжённых элементов, если пространство V унитарное.*

Отметим некоторые свойства операции перехода к сопряжённому ЛО. Пусть φ, ψ — ЛО на евклидовом или унитарном пространстве, $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ в унитарном случае).

1. $\varphi^{**} = \varphi$;
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3. $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*$;
4. $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$;
5. если φ обратим, то обратим и φ^* и $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

ЛО $\varphi\colon V \to V$ называется *самосопряжённым*, если $\varphi^* = \varphi$, или, что то же самое,

$$\forall x, y \in V \quad (\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{y})).$$

Следствие 1. *а) Если $\varphi\colon V \to V$ — самосопряжённый ЛО на евклидовом пространстве, то его матрица в любом ортонормированном базисе пространства V симметрична. Наоборот, если известно, что матрица ЛО φ в некотором ортонормированном базисе симметрична, то ЛО φ самосопряжённый. б) Если $\varphi\colon V \to V$ — самосопряжённый ЛО на унитарном пространстве, то его матрица в любом ортонормированном базисе пространства V*

сопряжённо симметрична ($A = \bar{A}^T$). Наоборот, если известно, что матрица ЛО φ в некотором ортонормированном базисе сопряжённо симметрична, то ЛО φ самосопряжённый.

В унитарном случае самосопряжённый ЛО называется также *эрмитовым* ЛО. Теории (вещественных) самосопряжённых и эрмитовых ЛО полностью аналогичны. Полезно помнить такое свойство собственных векторов самосопряжённого ЛО:

Лемма 1. *Если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — собственные векторы самосопряжённого ЛО, отвечающие* различным *собственным числам, то $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ ортогональны: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.*

Следующая теорема 2 описывает т. н. *канонический вид* самосопряжённого ЛО.

Теорема 2. *Если $\varphi\colon V \to V$ — самосопряжённый ЛО на евклидовом или унитарном конечномерном пространстве V, то все собственные числа ЛО φ действительны и в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов ЛО φ. В частности, самосопряжённый ЛО всегда полупрост и имеет диагональную матрицу в некотором ортонормированном базисе.*

Теорема 2 проясняет геометрический смысл самосопряжённого ЛО. Это оператор, который действует как комбинация сжатий/растяжений по взаимно перпендикулярным направлениям.

ЛО $\varphi\colon V \to V$ на евклидовом или унитарном пространстве V называется *ортогональным* (соответственно *унитарным*), если

$$\forall x, y \in V \quad (\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Эта формула означает, что ортогональный (унитарный) ЛО сохраняет скалярное произведение любых двух векторов и, следовательно, сохраняет также длины всех векторов и углы между всеми парами векторов. Таким образом, ортогональный (унитарный) ЛО имеет простой геометрический смысл: это *движение* пространства V.

Напомним, что квадратная матрица $S \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если

$$S^T S = E;$$

квадратная матрица $S \in M_n(\mathbb{C})$ называется *унитарной*, если

$$\bar{S}^T S = E,$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Теорема 3. *Если $\varphi\colon V \to V$ — ортогональный (унитарный) ЛО, то его матрица в любом ортонормированном базисе пространства V ортогональна (соотв. унитарна). Наоборот, если известно, что матрица ЛО φ в некотором ортонормированном базисе ортогональна (унитарна), то ЛО φ ортогональный (унитарный).*

Теоремы 4 и 5 описывают канонический вид ортогонального и унитарного ЛО.

Теорема 4. *Если $\varphi\colon V \to V$ — ортогональный ЛО на n-мерном евклидовом пространстве V, то в пространстве V существует такой ортонормированный базис, что матрица ЛО φ в этом базисе имеет блочно-диагональный вид с блоками ± 1 размера 1×1 и блоками $\begin{pmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, $m \leqslant n/2$, размера 2×2 на диагонали.*

Теорема 5. *Если $\varphi\colon V \to V$ — унитарный ЛО на n-мерном унитарном пространстве V, то в пространстве V существует такой ортонормированный базис, что матрица ЛО φ в этом базисе диагональна вида*

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix},$$

где $i^2 = -1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$.

Отметим, в частности, что унитарный ЛО полупрост. Благодаря этому, хотя теория унитарных ЛО в целом аналогична теории ортогональных ЛО, первая оказывается в конечном счёте проще.

Иногда при решении задач о самосопряжённых, ортогональных и унитарных ЛО может быть полезно следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — самосопряжённый, ортогональный или унитарный ЛО. Если $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство ЛО φ, то и его ортогональное дополнение $U^{\perp}$ будет инвариантным относительно φ.*

Также для ортогональных и унитарных ЛО выполнено утверждение, аналогичное лемме 1.

Пример 1 ([ЕД, 4.183]). Найдём канонический вид и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряжённого ЛО, который в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для начала вычислим характеристический многочлен матрицы A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$\begin{aligned} = (11-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 10 \\ 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -8 & 10 \end{vmatrix} = \\ = (11-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 90) - 2(-2\lambda + 90) - 8(-8\lambda + 36) = \\ = -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458. \end{aligned}$$

Заметим, что $1458 = 2 \cdot 3^5$. Перебирая делители числа 1458, из характеристического уравнения

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = 0$$

находим собственные числа $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 18$. Найдём какой-нибудь собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = -9$. Для этого нужно решить однородную СЛАУ с матрицей $A - \lambda_1 E$. Имеем:

$$A + 9E = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)/2 \\ (2) \\ (3)/2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 1 & -4 \\ 2 & 11 & 10 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (1) - 5(2) \\ (3) + 2(2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & -54 & -54 \\ 0 & 27 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)/(-54) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) - 11(2) \\ (2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У последней системы легко подбирается решение $f_1 = (1, -2, 2)^T$ (это ФСР исходной однородной СЛАУ).

Совершенно аналогично находим собственный вектор $f_2 = (2, 2, 1)^T$, отвечающий собственному числу $\lambda_2 = 9$, и собственный вектор $f_3 = (-2, 1, 2)^T$, отвечающий $\lambda_3 = 18$. Заметим, что

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = 0,\ (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_3) = 0,\ (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = 0.$$

Эти равенства рекомендуется использовать для самопроверки: согласно лемме 1 собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, должны быть ортогональны! Напомним, что жирным шрифтом мы обычно обозначаем векторы линейного пространства, а обычным

— матрицы-столбцы координат соответствующих векторов в некотором базисе. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима, значит, эти три вектора образуют ортогональный базис в данном 3-мерном пространстве. Остаётся только нормировать эти векторы, т. е. поделить каждый на его длину:

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1/3 = (1/3, -2/3, 2/3)^T, \\ g_2 &= f_2/3 = (2/3, 2/3, 1/3)^T, \\ g_3 &= f_3/3 = (-2/3, 1/3, 2/3)^T. \end{aligned}$$

Это и есть искомый ортонормированный базис из собственный векторов матрицы (ЛО) A.

Матрица ЛО в базисе из собственных векторов всегда диагональна с собственными числами на диагонали. Таким образом, ЛО $\boldsymbol{A}$, заданный матрицей A в исходном базисе $\boldsymbol{e}$, в базисе $\boldsymbol{g}$ будет иметь матрицу

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Это и есть канонический вид нашего ЛО.

Заметим, что матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{g}$ будет матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что это ортогональная матрица. Согласно формуле преобразования матриц линейных операторов, матрицы A, D и S связаны соотношением

$$D = S^{-1}AS. \tag{1}$$

Но так как матрица S ортогональна, обратная к ней вычисляется просто:

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Перемножьте матрицы и убедитесь, что соотношение (1) действительно выполняется. †

Для самостоятельного решения рекомендуется задача [ЕД, 4.190] (в данном издании опечатка: вторая строка матрицы $(+2, 4, -2)$).

Пример 2 ([ЕД, 4.184]). Решим аналогичную задачу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления характеристического многочлена и собственных чисел нужно раскрыть определитель

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix}.$$

Это можно сделать аналогично примеру 1. Но иногда бывает проще сначала упростить определитель, пользуясь свойствами определителей:

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)+(2) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 9-\lambda & 0 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix}.$$

Заметим, что мы уже знаем одно собственное число $\lambda = 9$, но продолжим упрощение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)+8(1) \\ (3)-4(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 25-\lambda & -4 \\ 0 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)+2(3) \\ (3) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 0 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3)+8(2) \end{matrix} =$$

$$= (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 27-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(27-\lambda).$$

Итак, собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = 9$ и $\lambda_2 = 27$. Найдём собственный векторы, отвечающие $\lambda_1 = 9$:

$$A - 9E = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве свободных переменных этой СЛАУ возьмём x_1 и x_2. Из таблицы

x_1	x_2	x_3
1	0	-2
0	1	2

найдём ФСР $f_1 = (1, 0, -2)^T$, $f_2 = (0, 1, 2)^T$. Это два ЛНЗ собственных вектора, отвечающих λ_1. Действуя аналогично для собственного числа $\lambda_2 = 27$, найдём ещё один собственный вектор $f_3 = (2, -2, 1)^T$. Легко проверить, что $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_3) = 0$ и $(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = 0$, но $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) \neq 0$. Противоречия с леммой 1 нет, ибо $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ соответствуют не разным, а одному и тому же собственному числу λ_1. Чтобы получить ортогональный, а затем ортонормированный базис из собственных векторов, придётся сделать дополнительный шаг — применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта к паре векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$.

Итак, будем искать такое $c \in \mathbb{R}$, чтобы вектор $\boldsymbol{f}_2' = \boldsymbol{f}_2 - c\boldsymbol{f}_1$ был ортогонален вектору $\boldsymbol{f}_1$. В соответствии с формулами процесса ортогонализации

$$c = \frac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} = \frac{-4}{5},$$
$$f_2' = f_2 + \frac{4}{5} f_1 = (4/5, 1, 2/5)^T.$$

Заметим, что новый вектор f_2' как линейная комбинация векторов f_1 и f_2 тоже будет решением однородной СЛАУ с матрицей $A - \lambda_1 E$, а значит он тоже является собственным и отвечает числу λ_1. Кроме этого, он ортогонален вектору f_3. Таким образом, мы получили ортогональный базис из собственных векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2'$, $\boldsymbol{f}_3$. Нормируя, получим искомый ортонормированный базис

$$g_1 = f_1/\sqrt{5} = (1/\sqrt{5}, 0, -2/\sqrt{5})^T,$$
$$g_2 = f_2'/(3/\sqrt{5}) = (4/3\sqrt{5}, 5/3\sqrt{5}, 2/3\sqrt{5})^T,$$
$$g_3 = f_3/3 = (2/3, -2/3, 1/3)^T.$$

Ортогональная матрица перехода S от исходного базиса к базису $\boldsymbol{g}$ и канонический вид D самосопряжённого ЛО $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{g}$ будут следующими:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

†

Для самостоятельного решения рекомендуются задачи [ЕД, 4.186,189].

Пример 3 ([П, 1575]). Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что матрица A ортогональна. Но любая ортогональная матрица является одновременно и унитарной, так что мы можем рассматривать ЛО, соответствующий матрице A, и как а) унитарный ЛО $\varphi_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, и как б) ортогональный ЛО $\varphi_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. В обоих случаях будем считать, что A — это матрица нашего ЛО в каноническом базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ унитарного пространства $\mathbb{C}^3$ или евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Напомним, что стандартное эрмитово скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^3$ задаётся формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \bar{x}_3 y_3,$$

где $\bar{\cdot}$ обозначает комплексное сопряжение. Итак, и для случая а), и для случая б) найдём канонический вид ЛО и соответствующий ортонормированный базис.

Для начала найдём характеристический многочлен и (комплексные) собственные числа матрицы A.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\frac{3}{4} - \lambda\Big) \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\frac{3}{4} - \lambda\Big)\Big(\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{3}{4}\Big) - \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\Big) - \frac{1}{4}\sqrt{6}\Big(\frac{1}{4}\sqrt{6}\lambda - \frac{\sqrt{6}}{4}\Big) =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Одно собственное число $\lambda_1 = 1$ угадывается сразу. Выделяя из многочлена χ_A множитель $\lambda - 1$, для остальных собственных чисел получаем уравнение

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два комплексно сопряжённых корня

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ и } \lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Перейдём к собственным векторам. Собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = 1$, можно найти из однородной СЛАУ с матрицей

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Опустим стандартное вычисление и сразу приведём соответствующий нормированный собственный вектор: $\boldsymbol{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$.

Опишем подробнее вычисление собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 4\cdot(2) \\ (1) - (1 - 2i\sqrt{3})\cdot(2) \\ (3) - \sqrt{6}\cdot(2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2i\sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 0 & 3 + i\sqrt{3} & \frac{\sqrt{6}}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}(-1 + i\sqrt{3}) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)/(3 + i\sqrt{3}) \\ (3) - \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot(2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2i\sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) - (1 - 2i\sqrt{3})\cdot(2) \\ (2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

откуда нормированный собственный вектор $\boldsymbol{f}_2 = (i/2, -i/2, 1/\sqrt{2})^T$.

Так как матрица A вещественная, согласно общей теории, изложенной в занятии 3, сопряжённому собственному числу λ_3 отвечает сопряжённый собственный вектор $\boldsymbol{f}_3 = (-i/2, i/2, 1/\sqrt{2})^T$. Векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$

попарно ортогональны (что должно быть выполнено автоматически согласно общей теории, поскольку они отвечают различным собственным числам). Таким образом, в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

унитарного пространства $\mathbb{C}^3$ унитарный ЛО $\varphi_{\mathbb{C}}$ имеет канонический вид

$$D_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

Чтобы перейти к каноническому виду ортогонального ЛО $\varphi_{\mathbb{R}}$, снова можно воспользоваться теорией из занятия 3. А именно, паре комплексно сопряжённых собственных чисел λ_2 и λ_3 соответствует 2-мерное инвариантное подпространство ЛО $\varphi_{\mathbb{R}}$, порождённое действительной и мнимой частями собственного вектора $\boldsymbol{f}_2$:

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{Re}\boldsymbol{f}_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2})^T,\ \boldsymbol{v} = \mathrm{Im}\boldsymbol{f}_2 = (1/2, -1/2, 0)^T.$$

Заметим, что векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ ортогональны. Чтобы получить ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, остаётся нормировать их. Положим

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме 3 занятия 3 матрицей ограничения ЛО $\varphi_{\mathbb{R}}$ на инвариантное подпространство U, порождённое векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, будет матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

При переходе к векторам $\boldsymbol{g}_2$ и $\boldsymbol{g}_3$ мы поделили $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ на одно и то же число $1/\sqrt{2}$, поэтому в базисе $\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ ограничение $(\varphi_{\mathbb{R}})_{|U}$ имеет ту же матрицу. Матрицей же всего ЛО $\varphi_{\mathbb{R}}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{g}$ будет

$$D_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ 0 & \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{pmatrix}.$$

Это и есть канонический вид ортогонального ЛО $\varphi_{\mathbb{R}}$. Из него видно, что геометрический смысл ЛО $\varphi_{\mathbb{R}}$ — вращение по часовой стрелке на 60° вокруг оси, определённой вектором $\boldsymbol{g}_1$.

В качестве дополнительного задания найдите матрицу перехода S от исходного базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{g}$ и убедитесь, что $D_{\mathbb{R}} = S^{-1}AS$. †

Для самостоятельного решения предлагается задача [П, 1577].

Будем называть самосопряжённый ЛО *неотрицательно определённым*, если все его собственные числа неотрицательны; *положительно определённым*, если все его собственные числа положительны.

Теорема 6 (Теорема о полярном разложении ЛО)**.** *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — произвольный ЛО на конечномерном евклидовом пространстве V. Тогда существует такой ортогональный ЛО $\psi\colon V \to V$ и такой самосопряжённый неотрицательно определённый ЛО $\theta\colon V \to V$, что*

$$\varphi = \psi \circ \theta.$$

Если ЛО φ невырожденный, то такое разложение единственно и ЛО θ является положительно определённым.

На языке матриц теорема 6 может быть переформулирована следующим образом: любую квадратную матрицу A можно разложить в произведение

$$A = QS$$

ортогональной матрицы Q и симметричной матрицы S с неотрицательными собственными числами; если матрица A невырождена, то такое разложение единственно, причём все собственные числа матрицы S положительны. Благодаря этой матричной формулировке теорему 6 также называют теоремой о QS-разложении.

Пример 4. Найдём QS-разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

При решении этой задачи будем следовать доказательству теоремы о полярном разложении, см. [К, Теорема 10.7], учитывая, что, в отличие от конспекта, мы ищем именно QS-, а не SQ-разложение.

Сначала нужно вычислить симметричную матрицу

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 4 \\ 4 & 65 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 80-\lambda & 4 \\ 4 & 65-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 145\lambda + 4384.$$

Дискриминант $D = 145^2 - 4 \cdot 4384 = 289$, поэтому собственные числа

$$\lambda_1 = 64 \text{ и } \lambda_2 = 81.$$

Нормированные собственные векторы

$$\lambda_1 = 64\colon B - 64E = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda_2 = 81\colon B - 81E = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, в ортонормированном базисе $\boldsymbol{f}$ (евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением) самосопряжённый ЛО, заданный матрицей B, имеет канонический вид $\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$.

В доказательстве теоремы 6 показывается, что векторы $A\boldsymbol{f}_1$ и $A\boldsymbol{f}_2$ являются ортогональными. В нашем случае

$$A\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -8 \\ -32 \end{pmatrix}, \ A\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 36 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{A\boldsymbol{f}_1}{\|A\boldsymbol{f}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{g}_2 = \frac{A\boldsymbol{f}_2}{\|A\boldsymbol{f}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

соответствующие нормированные векторы.

Матрица Q является матрицей перехода от ортонормированного базиса $\boldsymbol{f}$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{g}$:

$$Q = T_{\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{g}}.$$

В нашем случае, как легко вычислить,

$$Q = T_{\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{g}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{17} & 4/\sqrt{17} \\ -4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{17} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{17} & 4/\sqrt{17} \\ -4/\sqrt{17} & -1/\sqrt{17} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{17} & -4/\sqrt{17} \\ 4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{17} & 4/\sqrt{17} \\ -4/\sqrt{17} & -1/\sqrt{17} \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ -8 & 15 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{e}$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^2$.

После этого матрицу S можно найти просто как произведение $S = Q^{-1}A = Q^TA$, или

$$S = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 152 & 4 \\ 4 & 137 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\frac{16}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{4}{17} & 8\frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

в нашем случае. Итак,

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} & \frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & \frac{15}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8\frac{16}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{4}{17} & 8\frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

— искомое QS-разложение. †

Задача 1. Найдите QS-разложения матриц а) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ и б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Теперь покажем некоторые приложения теории самосопряжённых ЛО к квадратичным формам.

Теорема 7. *Пусть $q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма на конечномерном евклидовом пространстве V. Тогда в пространстве V существует* ортонормированный *базис, в котором форма q имеет диагональную матрицу ($\sim$ канонический вид, является суммой квадратов с коэффициентами).*

Мы уже знаем, что к сумме квадратов можно привести любую квадратичную форму (например, методом Лагранжа). Существенное дополнение, которое вносит теорема 7, заключается в том, что это можно сделать именно в ортонормированном базисе. Соответствующий метод приведения квадратичных форм к сумме квадратов носит название *метода ортогональных преобразований.* Мы продемонстрируем его в примере 5.

Пример 5. Приведём квадратичную форму

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$$

к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Будем рассматривать q как квадратичную форму на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу данной формы. Так как матрица A симметрична, она определяет на пространстве $\mathbb{R}^3$ самосопряжённый ЛО и, в силу теоремы 2, в $\mathbb{R}^3$

существует ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A. Другими словами, матрица A подобна диагональной матрице D: $D = Q^{-1}AQ$, причём подобие осуществляется ортогональной матрицей Q, а матрица

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

составлена из собственных чисел матрицы A. Но поскольку Q ортогональна, $Q^{-1} = Q^T$ и формула $Q^{-1}AQ$ в этом случае совпадает с формулой Q^TAQ преобразования матрицы квадратичной формы. Следовательно, в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A и форма q будет иметь диагональную матрицу D.

Характеристический многочлен матрицы A

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda + \frac{1}{2}$$

имеет двукратный корень $\lambda_1 = 1/2$ и простой корень $\lambda_2 = 2$ (стандартные вычисления опускаем). Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 1/2$ находятся из однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве ФСР можно взять, например, $\boldsymbol{v_1} = (-1, 0, 1)^T$ и $\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 1)^T$.

Собственный вектор $\boldsymbol{v}_3$, отвечающий $\lambda_2 = 2$, находится из СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ не ортогональны между собой. Поэтому к ним нужно применить процесс ортогонализации:

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 = (1/2, -1, 1/2)^T.$$

Нормируем векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3$ и получим ортонормированный базис

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

из собственный векторов матрицы A.

Матрицей перехода от канонического базиса $\boldsymbol{e}$ пространства $\mathbb{R}^3$ к базису $\boldsymbol{f}$ служит ортогональная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что если в квадратичной форме q сделать *ортогональную* замену переменных в соответствии с матрицей Q, т. е. подставить

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \\ y = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \end{cases}$$

то форма q преобразуется к каноническому виду

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + 2z_1^2. \tag{2}$$

Заметим, что коэффициентами при квадратах переменных в каноническом виде (2) служат собственные числа матрицы A. Поэтому, если бы нас интересовал только канонический вид квадратичной формы, но не ортогональная замена, которая к нему приводит, то его можно было бы записать сразу, как только были найдены собственные числа. †

Для самостоятельного решения рекомендуется задача [ЕД, 4.214].

Теорема 8 (Теорема об одновременном приведении двух квадратичных форм к сумме квадратов)**.** *Пусть q_1 и q_2 — две квадратичные формы на вещественном векторном пространстве V, причём форма q_1 положительно определена. Тогда в V существует базис, в котором обе формы q_1 и q_2 записываются как суммы квадратов.*

Пример 6. Приведём одновременно к сумме квадратов квадратичные формы

$$q_1(x, y) = x^2 + 10y^2 + 6xy \text{ и } q_2(x, y) = 7x^2 + 101y^2 + 54xy,$$

которые мы будем рассматривать как формы на пространстве $\mathbb{R}^2$.

Матрицы форм q_1 и q_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 27 \\ 27 & 101 \end{pmatrix}$$

соответственно. Главные миноры $\Delta_1 = 1$ и $\Delta_2 = |A| = 1$ матрицы A положительны, следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма q_1 положительно определена.

Задача решается в два этапа: сначала форма q_1 методом Лагранжа приводится к нормальному виду, к форме q_2 применяется та же замена переменных, а затем преобразованная форма q_2 приводится к сумме квадратов ортогональным преобразованием.

Имеем:

$$q_1 = x^2 + 6xy + 9y^2 + y^2 = (x + 3y)^2 + y^2.$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 = x + 3y, \\ y_1 = y \end{cases}$$

и сразу придём к нормальному виду $q_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2$. Переменные x и y выражаются через x_1 и y_1 следующим образом:

$$\begin{cases} x = x_1 - 3y_1, \\ y = y_1. \end{cases} \tag{3}$$

Сделаем теперь подстановку (3) в форме q_2:

$$q_2(x_1, y_1) = 7(x_1 - 3y_1)^2 + 101y_1^2 + 54(x_1 - 3y_1)y_1 = 7x_1^2 + 2y_1^2 + 12x_1y_1.$$

Матрицей формы $q_2(x_1, y_1)$ будет

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_C(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda - 22$, собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 11$, соответствующие нормированные собственные векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично примеру 5, ортогональная замена

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{13}} x_2 + \frac{3}{\sqrt{13}} y_2, \\ y_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}} x_2 + \frac{2}{\sqrt{13}} y_2 \end{cases} \tag{4}$$

приводит форму q_2 к сумме квадратов $q_2(x_2, y_2) = -2x_2^2 + 11y_2^2$. Здесь следует заметить, что приведение формы q_1 к нормальному виду можно осуществить разными способами, соответственно будет меняться и матрица C. Это никак не влияет на ситуацию принципиально, но при "неудачном" выборе способа приведения формы q_1 у матрицы C может не оказаться простых (например, целых) собственных чисел и векторов и это затруднит вычисления.

Если выполнить эту же замену (4) в форме $q_1(x_1, y_1)$, то она по существу не изменится, ведь её матрицей служит единичная матрица E, а для любой ортогональной матрицы Q выполнено $Q^T EQ = Q^T Q = E$! Таким образом, и после замены (4) форма q_1 останется суммой квадратов. Итак, к сумме квадратов приведены обе квадратичные формы. Чтобы написать замену переменных, которая сводит к каноническому виду сразу обе квадратичные формы q_1 и q_2, нужно скомбинировать замены (3) и (4). Для этого удобнее всего перемножить их матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, замена

$$\begin{cases} x = \frac{11}{\sqrt{13}} x_2 - \frac{3}{\sqrt{13}} y_2, \\ y = -\frac{3}{\sqrt{13}} x_2 + \frac{2}{\sqrt{13}} y_2 \end{cases}$$

одновременно приводит к сумме квадратов и форму q_1, и форму q_2. †

Задача 2. Убедитесь, что квадратичная форма $q_1(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy$ положительно определена и осуществите одновременное приведение к сумме квадратов форм q_1 и $q_2(x, y) = x^2 - 6y^2$.

Список литературы

[ЕД] А. В. Ефимов, Б. П. Демидович (ред.), Сборник задач по математике для втузов, в четырёх частях, часть 1, Линейная алгебра и основы математического анализа, 3-е изд., М.: Наука, 1993.

[К] О. В. Куликова, Конспект лекций по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии, 2-й семестр.

[П] И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд., М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.