

ЛА и АГ (ИУ9), ЗАНЯТИЕ 7

Аффинные пространства и аффинные преобразования

Д. А. Степанов

Аффинным пространством над полем \mathbb{k} называется пара (\mathcal{A}, V) , где \mathcal{A} — некоторое множество, а V — векторное пространство над \mathbb{k} . Элементы множества \mathcal{A} называются точками. Каждой паре точек $P, Q \in \mathcal{A}$ сопоставлен вектор $\mathbf{x} = \overline{PQ} \in V$, причём должны быть выполнены следующие *аксиомы аффинного пространства*.

- A1.** Для любой точки $P \in \mathcal{A}$ и любого вектора $\mathbf{x} \in V$ существует единственная такая точка $Q \in \mathcal{A}$, что $\mathbf{x} = \overline{PQ}$. О точке Q мы будем говорить, что она получена *сдвигом* точки P на вектор \mathbf{x} , и записывать этот факт как $Q = P + \mathbf{x}$.
- A2.** Если вектор $\mathbf{x} \in V$ соответствует паре точек $P, Q \in \mathcal{A}$, а вектор $\mathbf{y} \in V$ — паре $Q, R \in \mathcal{A}$, то паре точек P, R соответствует вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Другими словами, в аффинном пространстве выполнено правило треугольника сложения векторов: $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$.

Размерностью аффинного пространства (\mathcal{A}, V) называется размерность векторного пространства V : $\dim \mathcal{A} = \dim V$. В задачах мы будем работать в основном с аффинными пространствами над полем \mathbb{R} действительных чисел. Главным примером будет аффинного пространства $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, где паре точек

$$P = (x_1, \dots, x_n), \quad Q = (y_1, \dots, y_n)$$

сопоставляется вектор

$$\overline{PQ} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n).$$

Данное аффинное пространство обозначают $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^n$ или просто \mathbb{R}^n , но в последнем случае из контекста должно быть ясно, что имеется в виду именно аффинное (точечное), а не арифметическое линейное (векторное) пространство. $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^n$ служит многомерным обобщением плоскости и пространства обычной аналитической геометрии.

Аффинным подпространством (или *плоскостью*) аффинного пространства (\mathcal{A}, V) называется подмножество $L \subseteq \mathcal{A}$, $L \neq \emptyset$, которое можно представить в виде

$$L = P + U = \{P + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in U\},$$

где U является векторным подпространством в V . При этом точка P называется *начальной точкой* подпространства L (если $\dim L > 0$, то начальная точка определена неоднозначно), а векторное подпространство U называется *направляющим пространством* аффинного подпространства L (направляющее пространство всегда определено однозначно).

Для аффинных подпространств L и M определены понятия (аффинной) суммы и пересечения. Пересечение определяют как обычное пересечение множеств $L \cap M$.

Лемма 1. *Если $L = P + U$, $M = Q + W$ — аффинные подпространства, то $L \cap M \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\overline{PQ} \in U + W$. Если $L \cap M \neq \emptyset$, то пересечение $L \cap M$ является аффинным подпространством с направляющим пространством $U \cap W$.*

Аффинной оболочкой множества точек P_0, P_1, \dots, P_m аффинного пространства (A, V) называется пересечение всех аффинных подпространств, содержащих все точки P_0, P_1, \dots, P_m . По-другому аффинную оболочку можно описать как аффинное подпространство

$$\langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle = P_0 + U,$$

где направляющее пространство

$$U = \langle \overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_0P_m} \rangle$$

порождено векторами $\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_0P_m}$. Это определение обобщается и на случай бесконечного множества точек $\{P_i\}_{i \in I}$, где I — некоторое, не обязательно конечное или даже счётное, множество индексов. Так вот, *аффинной суммой* аффинных подпространств L и M называется аффинная оболочка их объединения:

$$L + M = \langle L \cup M \rangle.$$

Если $L = P + U$, $M = Q + W$, то

$$L + M = P(Q) + \langle \overline{PQ} \rangle + U + W,$$

т. е. в качестве начальной точки можно с равным успехом взять и P , и Q , а направляющим пространством служит сумма векторного подпространства, порождённого вектором \overline{PQ} , пространства U и пространства W .

Для размерностей суммы и пересечения выполнен аффинный вариант формулы Грассмана.

Теорема 1 (аффинная формула Грассмана). *Пусть $L = P + U$, $M = Q + W$. Тогда, если $L \cap M \neq \emptyset$, то*

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(U \cap W) + 1,$$

а если $L \cap M \neq \emptyset$, то

$$\dim(L + M) + \dim(L \cap M) = \dim L + \dim M,$$

как в обычной формуле Грассмана.

Задача 1. Убедитесь, что аффинной суммой двух скрещивающихся прямых в пространстве $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^3$ будет всё пространство.

Аффинные подпространства $L = P + U$ и $M = Q + W$ называются *параллельными*, если они не пересекаются, а их направляющие пространства содержатся одно в другом: $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$.

Аффинной системой координат в аффинном пространстве (\mathcal{A}, V) называется пара (O, \mathbf{e}) , состоящая из точки $O \in \mathcal{A}$ — начала координат, и базиса $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V . Если P — произвольная точка, то вектор $\mathbf{r}_P = \overline{OP}$ называется *радиус-вектором* точки P относительно системы (O, \mathbf{e}) , а координаты (x_1, \dots, x_n) :

$$\mathbf{r}_P = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

вектора \mathbf{r}_P в базисе \mathbf{e} называются *координатами точки P* в системе (O, \mathbf{e}) . С помощью системы координат доказывается, что любое аффинное пространство размерности n над полем \mathbb{k} изоморфно аффинному пространству $\mathbf{A}_{\mathbb{k}}^n$.

Теорема 2. Любое аффинное подпространство аффинного пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{k}}^n$ можно описать как множество решений некоторой (вообще говоря, неоднородной) СЛАУ. Наоборот, множество решений любой СЛАУ с коэффициентами в поле \mathbb{k} , если оно не пусто, представляет собой аффинное подпространство в $\mathbf{A}_{\mathbb{k}}^n$.

Задание аффинного подпространства начальной точкой и базисом направляющего пространства мы будем называть *явным*, или *параметрическим*, а задание системой линейных алгебраических уравнений — *неявным* или заданием *общими уравнениями*. Явное задание удобнее, если, например, нужно найти сумму аффинных подпространств. Неявное задание удобнее для нахождения пересечения подпространств.

Пример 1. Найдём явное и неявное описание аффинной оболочки системы точек $P_0(-1, 1, 0, 1)$, $P_1(0, 0, 2, 0)$, $P_2(-3, -1, 5, 4)$, $P_3(2, 2, -3, -3)$ аффинного пространства \mathbb{R}^4 .

Имеем:

$$\overline{P_0P_1} = (1, -1, 2, -1), \quad \overline{P_0P_2} = (-2, -2, 5, 3), \quad \overline{P_0P_3} = (3, 1, -3, -4).$$

Аффинную оболочку можно сразу описать как аффинное подпространство с начальной точкой P_0 и направляющим пространством U , порождённым векторами $\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \overline{P_0P_3}$. Но эти векторы могут быть линейно зависимы, и более компактное описание получится, если выделить из них базис. Составим матрицу из этих векторов как из строк и найдём её ранг.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) + 2(1) \\ (3) - (1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) + (2) \end{matrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\dim U = \text{Rg } A = 2$, а в качестве базиса можно взять векторы $\overline{P_0P_1}$ и $\overline{P_0P_2}$. Теперь явное задание аффинной оболочки $\langle P_0, \dots, P_3 \rangle$ можно параметрически записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Чтобы получить неявное задание, найдём сначала однородную СЛАУ, задающую векторное пространство U как подпространство в \mathbb{R}^4 .

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 \\ -1 & -2 & x_2 \\ 2 & 5 & x_3 \\ -1 & 3 & x_4 \end{array} \right) &\begin{matrix} (1) \\ (2) + (1) \\ (3) - 2(1) \\ (4) + (1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & -4 & x_1 + x_2 \\ 0 & 9 & -2x_1 + x_3 \\ 0 & 1 & x_1 + x_4 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (4) \\ (2) + 4(4) \\ (3) - 9(4) \end{matrix} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & 5x_1 + x_2 + 4x_4 \\ 0 & 0 & -11x_1 + x_3 - 9x_4 \end{array} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$U: \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0, \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Неоднородная СЛАУ, задающая аффинную оболочку $\langle P_0, \dots, P_3 \rangle$, имеет такую же левую часть, как (1). Чтобы получить правую часть, нужно

подставить в (1) точку $P_0(-1, 1, 0, 1)$. Итак,

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0, \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = -2 \end{cases}$$

— неявное задание аффинного подпространства $\langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$. †

Для самостоятельного решения рекомендуются задачи [П, 1875, 1877].

Пример 2. Найдём размерность, явное и неявное задание суммы и пересечения аффинных подпространств L и M пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^4$, заданных СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$

соответственно.

Проще всего в данном случае дать неявное описание пересечения $L \cap M$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases} \quad (2)$$

Чтобы найти размерность пересечения, и, в частности, понять, не будет ли оно пустым, проверим, являются ли уравнения системы (2) независимыми. Для этого найдём ранги матрицы и расширенной матрицы системы (2).

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 3 & -5 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) - (2) \\ (2) \\ (3) - (2) \\ (4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -5 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) - 2(1) \\ (3) \\ (4) - 5(1) \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ - (3) \\ (2) + 5(3) \\ (4) - (2) - (3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Теперь можно заключить, что, во-первых, подпространства L и M имеют непустое пересечение, а во-вторых, ранг и расширенной и простой матрицы системы равен 3. В то же время число неизвестных равно 4, следовательно, $\dim L \cap M = 4 - 3 = 1$. Вполне очевидно, что $\dim L = \dim M = 2$.

Тогда по аффинной формуле Грассмана для случая непустого пересечения находим размерность аффинной суммы: $\dim(L + M) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Чтобы перейти к явному заданию пересечения $L \cap M$, продолжим решение системы (2).

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) + (2) \\ (2) \\ (3)/7 \end{array} &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6/7 & 15/7 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) + (3) \\ (2) + (3) \\ (3) \end{array} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8/7 & -6/7 \\ 0 & 1 & 0 & 13/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 6/7 & 15/7 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Придавая свободной четвёртой переменной значение 7, найдём ФСР

$$(8, -13, -6, 7)^T.$$

Этот вектор можно назвать направляющим вектором аффинного подпространства $L \cap M$. Начальной точкой можно взять и точку

$$(-6/7, 1/7, 15/7, 0),$$

но удобнее взять точку $(-2, 2, 3, -1)$, которая получается, если свободной переменной придать значение -1 . Общее решение тогда запишется как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Это и есть явное (параметрическое) описание пересечения.

Чтобы получить явное описание суммы $L + M$, найдём сначала явные описания подпространств L и M по отдельности. Для L имеем:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) - (2) \\ (2) \end{array} &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) - 2(1) \end{array} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) + (2)/5 \\ (2)/5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & 11/5 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем такую параметризацию пространства L :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Совершенно аналогично можно найти параметризацию пространства M :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Напомним, что направляющее векторное пространство суммы порождается векторами \overline{PQ} и базисами пространств U и W . В нашем случае мы имеем 5 порождающих векторов

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Однако размерность суммы $L + M$ равна 3, так что 2 из этих пяти векторов лишние. Чтобы определить, какие именно векторы можно удалить, составим из них матрицу и найдём линейно независимые столбцы.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -11 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (1) \\ (2) - (1) \\ (4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Третья строка пропорциональна четвёртой с коэффициентом -3 , так что ранг этой матрицы, как и ожидалось, равен трём, а базисный минор можно выбрать в первых трёх столбцах. Поэтому параметризацией суммы $L + M$ будет

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

Наконец, найдём и неявное задание суммы $L + M$. Так как мы будем задавать 3-мерное подпространство 4-мерного аффинного пространства, нам потребуется одно уравнение. Вообще, $n-1$ -мерное аффинное подпространство n -мерного аффинного пространства всегда может быть задано одним уравнением. Такое подпространство называется *гиперплоскостью*.

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & x_1 \\ 0 & -2 & -11 & x_2 \\ 1 & 5 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 5 & x_4 \end{array} \right) \begin{array}{l} (3) \\ (1) \\ (2) - (1) \\ (4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & x_3 \\ 0 & -2 & 4 & x_1 \\ 0 & 0 & -15 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 5 & x_4 \end{array} \right).$$

На следующем шаге нужно к третьей строке прибавить 3 четвёртых, и получится уравнение $-x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$ направляющего *векторного* пространства суммы $L + M$. Но и сама *аффинная* сумма задаётся уравнением

$$x_1 - x_3 - 3x_4 = 0,$$

так как начальная точка $(0, 1, 0, 0)$ удовлетворяет этому уравнению. Это означает, что сумма $L + M$ проходит через начало координат. †

Задача 2. Пусть аффинное подпространство L пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^5$ задано системой

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$$

а подпространство M — параметризацией

$$\{x_1 = -6 + 4t, x_2 = 2 + 3t, x_3 = 2 + 7t, x_4 = -2 + 5t, x_5 = -3 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Найдите размерности, явные и неявные задания суммы $L + M$ и пересечения $L \cap M$ этих подпространств.

Задача 3 ([П, 1885]). Опишите все случаи взаимного расположения (совпадают, параллельны, пересекаются) гиперплоскостей пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^n$, заданных уравнениями

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c \quad \text{и} \quad b_1x_1 + \dots + b_nx_n = d.$$

Ответ сформулируйте в терминах рангов матриц, которые можно составить из коэффициентов этих уравнений.

Задача 4. Найдите параметрическое задание прямой (т. е. 1-мерного аффинного подпространства), которая проходит через точку $R(8, 9, -11, -15)$ аффинного пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^4$ и пересекает прямые

$$\{x_1 = 1 + t, x_2 = 2t, x_3 = -2 - t, x_4 = 1 - 5t$$

и

$$\{x_1 = 2t, x_2 = 1 + 3t, x_3 = 1 - 2t, x_4 = -1 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

УКАЗАНИЕ: эта задача аналогична задаче [Кл, 1030] из аналитической геометрии.

Аффинное пространство (\mathcal{A}, V) называется *евклидовым*, если евклидовым является ассоциированное векторное пространство V . В евклидовом аффинном пространстве можно ввести понятие *расстояния* между точками, или *метрики*. А именно, для любых двух точек $P, Q \in \mathcal{A}$ положим

$$\rho(P, Q) = \|\overline{PQ}\|,$$

где, напомним, $\|\mathbf{x}\|$ обозначает норму вектора \mathbf{x} евклидова пространства V : $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Метрика ρ как функция пары точек из \mathcal{A} обладает следующими основными свойствами:

- а) $\rho(P, Q) \geq 0$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $P = Q$;
- б) $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$;
- в) (неравенство треугольника) $\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geq \rho(P, R)$ для всех троек $P, Q, R \in \mathcal{A}$.

Стандартная метрика на аффинном пространстве $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^n$ задаётся формулой

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2},$$

где $P = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (y_1, \dots, y_n)$. Именно она будет использоваться в задачах.

Расстояние между подпространствами $L = P+U$ и $M = Q+W$ евклидова аффинного пространства определяется формулой

$$\rho(L, M) = \inf_{\substack{P' \in L \\ Q' \in M}} \rho(P', Q'). \quad (3)$$

Удобную формулу для вычисления расстояния между подпространствами даёт следующая теорема.

Теорема 3. *Точная нижняя грань в формуле (3) достигается, т. е. инфимум является минимумом, и может быть вычислена по формуле*

$$\rho(L, M) = \|\text{pr}_{(U+W)^\perp} \overline{PQ}\|,$$

где $\text{pr}_U \mathbf{x}$ обозначает ортогональную проекцию вектора \mathbf{x} на подпространство U . Другими словами, расстояние между аффинными подпространствами равно длине ортогональной составляющей вектора, соединяющего какие-либо две точки этих подпространств, относительно суммы $U + W$.

Пример 3. Найдём расстояние от точки $P(4, 1, -4, -5)$ евклидова аффинного пространства $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^4$ до подпространства $M = Q + W$, где $Q(3, -2, 1, 5)$, а W порождено векторами

$$\mathbf{b}_1 = (2, 3, -2, -2), \quad \mathbf{b}_2 = (4, 1, 3, 2).$$

Точку P в данном случае нужно рассматривать как 0-мерное аффинное подпространство с нулевым направляющим пространством $U = \{\mathbf{0}\}$.

Вектор $\overline{PQ} = (-1, -3, 5, 10)$. Сумма $U + W$ в этом случае совпадает с W , поэтому начнём с того, что найдём проекцию вектора \overline{PQ} на пространство W . Как это делается разбиралось в теме “Евклидовы пространства”. Матрица Грама

$$G(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 1 & 30 \end{pmatrix},$$

скалярные произведения

$$(\overline{PQ}, \mathbf{b}_1) = -41, \quad (\overline{PQ}, \mathbf{b}_2) = 28.$$

Коэффициенты разложения проекции $\text{pr}_W \overline{PQ}$ находятся из системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 21 & 1 & -41 \\ 1 & 30 & 28 \end{array} \right).$$

Решая её, например, методом Крамера, находим разложение

$$\text{pr}_W \overline{PQ} = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = (0, -5, 7, 6).$$

Тогда ортогональная составляющая

$$\text{pr}_{W^\perp} \overline{PQ} = \overline{PQ} - \text{pr}_W \overline{PQ} = (-1, 2, -2, 4),$$

и

$$\rho(P, M) = \|\text{pr}_{W^\perp} \overline{PQ}\| = 5$$

— расстояние от точки P до подпространства M . †

Задача 5. Найдите расстояние между плоскостями

$$L: \begin{cases} x_1 = 4 + t + 2s, \\ x_2 = 5 + 2t - 2s, \\ x_3 = 3 + 2t + s, \\ x_4 = 2 + 2t + 2s \end{cases} \quad \text{и} \quad M: \begin{cases} x_1 = 1 + 2t + s, \\ x_2 = -3 - 2s, \\ x_3 = 1 + 2t, \\ x_4 = -3 + t - s, \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R},$$

евклидова пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^4$.

Пусть (\mathcal{A}, V) и (\mathcal{B}, W) — два аффинных пространства над одним и тем же полем \mathbb{k} . Аффинным отображением из пространства (\mathcal{A}, V) в пространство (\mathcal{B}, W) называется пара (F, φ) , где $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — отображение множества \mathcal{A} в множество \mathcal{B} , $\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение векторного пространства V в векторное пространство W , и для любых точек $P, Q \in \mathcal{A}$ если $\mathbf{x} = \overline{PQ} \in V$, то $\varphi(\mathbf{x}) = \overline{F(P)F(Q)} \in W$. Аффинным преобразованием аффинного пространства (\mathcal{A}, V) мы будем называть аффинное отображение этого пространства в себя. Линейное отображение (оператор) φ называется *линейной частью* или *дифференциалом* аффинного отображения (преобразования) (F, φ) .

Любое аффинное отображение однозначно определяется своей линейной частью и образом одной точки пространства \mathcal{A} . А именно, если O — некоторая фиксированная, P — произвольная точка пространства \mathcal{A} , то образ точки P под действием аффинного отображения F может быть найден по формуле

$$F(P) = F(O) + \varphi(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = \overline{OP}$.

Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением аффинных преобразований. Если (O, \mathbf{e}) — аффинная система координат в аффинном пространстве (\mathcal{A}, V) , то возникает вопрос о координатном описании аффинного преобразования (F, φ) . Пусть известен вектор-столбец

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{k}^n$$

координат точки $F(O)$ в системе (O, \mathbf{e}) и матрица $A \in M_n(\mathbb{k})$ ЛО φ в базисе \mathbf{e} . Тогда координаты образа точки $P \in \mathcal{A}$ под действием преобразования F могут быть найдены по формуле

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — координаты точки P , $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты точки $F(P)$ в системе координат (O, \mathbf{e}) .

Пример 4. Пусть аффинное преобразование (F, φ) евклидова аффинного пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^3$ действует как композиция симметрии относительно плоскости

$$\alpha: 2x + 2y + z = 5$$

и гомотетии с центром в точке $(-1, -1, -1)$ и коэффициентом 2, относительно некоторой прямоугольной системы координат $(O, \mathbf{e} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ (система координат (O, \mathbf{e}) евклидова аффинного пространства называется *прямоугольной*, если базис \mathbf{e} ортонормированный). Найдём координатную запись преобразования F в той же системе (O, \mathbf{e}) .

Эта задача полностью аналогична задачам построения формул аффинных преобразований плоскости, которые решались в курсе аналитической геометрии в первом семестре. Можно либо сразу найти образ начала координат (что даст вектор сдвига b) под действием F и образы векторов базиса i, j, k (что даст матрицу A) под действием φ , либо сначала найти запись преобразования симметрии, затем гомотетии, и подставить первое во второе. Мы пойдём по второму пути.

Задачу описания отражения относительно гиперплоскости мы рассмотрим в более общей постановке. Пусть $S_\alpha: \mathbf{A}_\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{A}_\mathbb{R}^n$ — преобразование симметрии евклидова аффинного пространства $\mathbf{A}_\mathbb{R}^n$ относительно гиперплоскости α , которая в канонической прямоугольной системе координат этого пространства задаётся уравнением

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c.$$

Обозначим через $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$ вектор нормали этой гиперплоскости и выберем на ней произвольную начальную точку $P_0 = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$. Обозначим ещё через \mathbf{r}_0 радиус-вектор точки P_0 .

Пусть теперь P — произвольная точка пространства, $Q = S_\alpha(P)$ — симметричная ей точка относительно гиперплоскости α , $\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_Q$ — радиус-векторы точек P и Q соответственно. Взгляда на рис. 1 достаточно, чтобы понять формулу

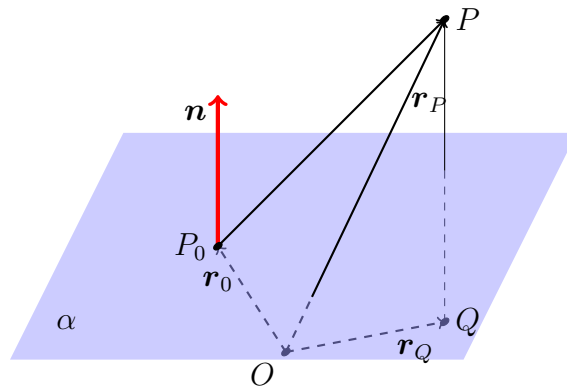


Рис. 1: Отражение относительно плоскости

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P - 2\text{pr}_\mathbf{n}(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_P - 2\frac{(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}.$$

Заметим, что выражение в числителе можно расписать как

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) &= (\mathbf{r}_P, \mathbf{n}) - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n) - (a_1x_1^\circ + \dots + a_nx_n^\circ) = \\ &= a_1x_1 + \dots + a_nx_n - c, \end{aligned}$$

где предполагается, что $P = (x_1, \dots, x_n)$ и используется тот факт, что точка P_0 лежит на α .

Возвращаясь к условию исходной задачи, положим $P = (x, y, z)$, $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$. Точка Q будет иметь координаты

$$\begin{aligned} x_Q &= x - 2 \frac{2x+2y+z-5}{9} \cdot 2 = \frac{1}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z + \frac{20}{9}, \\ y_Q &= y - 2 \frac{2x+2y+z-5}{9} \cdot 2 = -\frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{4}{9}z + \frac{20}{9}, \\ z_Q &= z - 2 \frac{2x+2y+z-5}{9} \cdot 1 = -\frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z + \frac{10}{9}. \end{aligned} \quad (4)$$

Это и есть формулы, задающие отражение S_α .

Рассмотрим теперь отдельно второе преобразование — гомотетию θ с центром в точке $(-1, -1, -1)$ и коэффициентом 2. Линейная часть гомотетии с коэффициентом 2 имеет матрицу $2E$. Начало координат под действием θ переходит в точку $(2, 2, 2)$. Таким образом, гомотетия θ переводит точку $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ в точку R с координатами

$$\begin{aligned} x_R &= 2x_Q + 2, \\ y_R &= 2y_Q + 2, \\ z_R &= 2z_Q + 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя формулы (4) в формулы (5), получим

$$\begin{aligned} x_R &= \frac{2}{9}x - \frac{16}{9}y - \frac{8}{9}z + \frac{58}{9}, \\ y_R &= -\frac{16}{9}x + \frac{2}{9}y - \frac{8}{9}z + \frac{58}{9}, \\ z_R &= -\frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{14}{9}z + \frac{38}{9} \end{aligned}$$

— координатную запись композиции $F = \theta \circ S_\alpha$. †

Задача 6. Составьте формулы, задающие *скользящий поворот* на 45° вокруг оси $x = y = 1$ с вектором сдвига $(0, 0, -2)$, т. е. аффинное преобразование пространства $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^3$, получаемое как композиция данного вращения и сдвига на данный вектор. В случае скользящего поворота не важно, какое из преобразований — сдвиг или вращение — делается первым.

Аффинное преобразование (F, φ) евклидова аффинного пространства (\mathcal{A}, V) называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояния между точками: для всех $P, Q \in \mathcal{A}$

$$\rho(F(P), F(Q)) = \rho(P, Q).$$

Лемма 2. *Аффинное преобразование (F, φ) тогда и только тогда является движением, когда его линейная часть $\varphi: V \rightarrow V$ будет ортогональным ЛО на евклидовом векторном пространстве V .*

Основными примерами движений евклидовой плоскости являются следующие.

Сдвиг или *параллельный перенос* всех точек плоскости на один и тот же вектор.

Поворот плоскости на определённый угол вокруг некоторой точки.

Симметрия плоскости относительно некоторой прямой.

Скольльзящая симметрия, т. е. композиция симметрии относительно прямой и сдвига на вектор, параллельный данной прямой. Порядок применения сдвига и симметрии в этом случае не важен.

Оказывается, что этими примерами все движения плоскости исчерпываются.

Теорема 4 (Классификация движений плоскости). *Любое движение евклидовой плоскости является либо сдвигом, либо поворотом, либо симметрией, либо скольльзящей симметрией.*

Заметим, что сдвиг и поворот сохраняют, а симметрия и скольльзящая симметрия меняют ориентацию плоскости. Поэтому сдвиг и поворот называют *собственными*, а симметрию и скольльзящую симметрию *несобственными* движениями плоскости. Тожественное преобразование можно считать сдвигом на нулевой вектор или поворотом на нулевой угол. Имеется аналогичная, но более сложная теорема о классификации движений 3-мерного евклидова пространства, но мы не будем пользоваться ей в задачах.

Пример 5. Выясним геометрический смысл движения евклидовой плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5} + 3, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} + 1 \end{cases}$$

в некоторой прямоугольной системе координат.

Сразу можно отбросить возможность параллельного переноса, так как линейная часть параллельного переноса имеет единичную матрицу в любой системе координат. Посмотрим, имеет ли данное движение неподвижную точку. Для этого нужно проверить, совместна ли система

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 3 = x, \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 = y. \end{cases}$$

В матричном виде эту систему можно переписать следующим образом:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -8/5 & 4/5 & -3 \\ 4/5 & -2/5 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} (2) \\ (1) + 2(2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4/5 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right).$$

Ясно, что система несовместна, а значит данное движение неподвижных точек не имеет. Так как и у поворота, и у симметрии есть неподвижные точки, можно утверждать, что данное движение является скользящей симметрией. Найдём прямую (“зеркало”), относительно которой делается симметрия, и вектор сдвига.

Действие скользящей симметрии наглядно представлено на рис. 2. Синим выделено зеркало, а красным — вектор сдвига \mathbf{u} . Ясно, что ес-

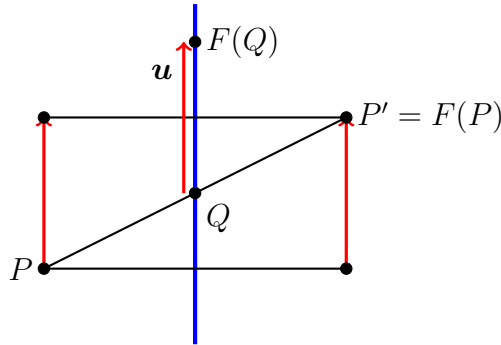


Рис. 2: Скользящая симметрия

ли взять произвольную точку P на плоскости, то середина Q отрезка PP' будет лежать на зеркале. Если применить скользящую симметрию F к точке Q , то она сдвинется в точности на вектор \mathbf{u} . Для нашего преобразования возьмём в качестве точки P начало координат O . Тогда $F(O) = O' = (3, 1)$. Середина отрезка OO' — точка $Q(3/2, 1/2)$. $F(Q) = (5/2, 5/2)$, значит, вектор сдвига $\mathbf{u} = \overline{QF(Q)} = (1, 2)$. Начальная точка Q и направляющий вектор \mathbf{u} определяют прямую-зеркало

$$\frac{x - 3/2}{1} = \frac{y - 1/2}{2} \Leftrightarrow 2x - y = 5/2.$$

Итак, наша скользящая симметрия представляет собой композицию симметрии относительно прямой $2x - y = 5/2$ и сдвига на вектор $(1, 2)$. †

Задача 7. Выясните геометрический смысл движения плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{3}{\sqrt{2}} - 1, \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

в некоторой прямоугольной системе координат.

Список литературы

- [Кл] Д. В. Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии: уч. пособие для втузов, 17-е изд., СПб.: Профессия, 2002.
- [П] И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд., М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.