ЛА и АГ (ИУ9), занятие 8
Кривые и поверхности 2-го порядка

Д. А. Степанов

Пусть $(\mathcal{A}, V)$ — аффинное пространство над полем $\Bbbk$ (напомним, что V обозначает векторное пространство над $\Bbbk$). *Аффинно-квадратичная функция* на $\mathcal{A}$ — это отображение $Q\colon \mathcal{A} \to \Bbbk$, которое можно представить следующим образом. Существуют такая точка $O \in \mathcal{A}$, линейная форма $l\colon V \to \Bbbk$ и квадратичная форма $q\colon V \to \Bbbk$, что для любой точки $P \in \mathcal{A}$

$$Q(P) = q(\boldsymbol{x}) + l(\boldsymbol{x}) + c,$$

где $\boldsymbol{x} = \overline{OP}$ и $c = Q(O) \in \Bbbk$. Можно показать, что квадратичная форма q однозначно определяется аффинно-квадратичной функцией Q, в то время как линейная форма l и константа c зависят от выбора точки O. Как и в теории квадратичных форм, мы ограничимся случаем полей $\Bbbk$ характеристики, отличной от 2, а в данном занятии в задачах будет использоваться исключительно поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Если в аффинном пространстве $(\mathcal{A}, V)$ введена система координат $(O, \boldsymbol{e})$, то аффинно-квадратичная функция $Q\colon \mathcal{A} \to \Bbbk$ может быть записана как

$$Q(x) = x^T A x + 2bx + c, \tag{1}$$

где $A \in M_n(\Bbbk)$ — симметричная матрица (матрица квадратичной формы q), $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — вектор-строка длины $n \dim \mathcal{A}$, $c \in \Bbbk$ — свободный член, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор-столбец координат. Коэффициент 2 перед b выделяется для удобства. В развёрнутом (“координатном”) виде выражение (1) записывается как

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c,$$

где $a_{ij}, b_k, c \in \Bbbk$.

Иногда удобно добавить к n координатам $(x_1, \ldots, x_n)$ “виртуальную” нулевую координату, считая её равной единице для всех точек точек аффинного пространства: $x_0 = 1$. Тогда каждой точке мы будем сопоставлять вектор-столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \Bbbk^{n+1}$. Аффинно-квадратичной функции Q с записью (1) в системе координат $(O, \boldsymbol{e})$ можно сопоставить её *расширенную матрицу*

$$\begin{pmatrix} c & b \\ b^T & A \end{pmatrix}.$$

Тогда выражение (1) запишется ещё короче:

$$Q(x) = (1, x^T) \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Также в этих обозначениях удобно записывать закон преобразования аффинно-квадратичной функции к новой системе координат. Пусть $(O', \boldsymbol{e}')$ — новая аффинная система координат. Обозначим через S матрицу перехода $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{e}'}$ и через d вектор-столбец координат нового начала O' в старой системе $(O, \boldsymbol{e})$. Тогда та же аффинно-квадратичная функция Q в новой системе будет иметь расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & S \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c & b \\ b^T & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & S \end{pmatrix}, \tag{2}$$

в полной аналогии с законом преобразования матриц квадратичных форм.

Аффинная квадрика в аффинном пространстве $(\mathcal{A}, V)$ — это подмножество пространства $\mathcal{A}$, определённое как множество нулей некоторой аффинно-квадратичной функции $Q\colon \mathcal{A} \to \Bbbk$, т. е. заданное уравнением

$$Q(P) = 0.$$

Например, аффинная квадрика на плоскости $\mathbf{A}^2_{\mathbb{R}}$ — это кривая второго порядка (коника), а аффинная квадрика в пространстве $\mathbf{A}^3_{\mathbb{R}}$ — это поверхность второго порядка.

Можно показать, что в евклидовом аффинном пространстве можно выбрать прямоугольную систему координат, в которой данная аффинная квадрика будет задавать уравнением некоторого стандартного (канонического) простого вида. В случае плоскости $\mathbf{A}^2_{\mathbb{R}}$ или 3-мерного пространства $\mathbf{A}^3_{\mathbb{R}}$ это утверждение приводит к метрической классификации кривых и, соответственно, поверхностей второго порядка. С этой классификацией можно ознакомиться, например, по [КК, пп. 9.5, 9.6]. Мы в этом занятии сосредоточимся лишь на демонстрации практических приёмов исследования и построения кривых и поверхностей второго порядка.

Пример 1 ([ЕД, 4.226]). Приведём к каноническому виду и построим кривую с уравнением

$$\underbrace{9x^2 - 4xy + 6y^2}_{\text{кв. форма}} + 16x - 8y - 2 = 0. \tag{3}$$

Квадратичной формой в этом уравнении является

$$q(x, y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что симметричная матрица определяет самосопряжённый линейный оператор, а для самосопряжённого ЛО всегда существует ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица перехода S к этому базису будет ортогональной, следовательно

$$S^{-1}AS = S^T AS,$$

т. е. матрица квадратичной формы в данном случае преобразуется так же, как и матрица ЛО, и если мы сделаем матрицу ЛО диагональной, то диагональной станет и матрица квадратичной формы. Таким образом, для того, чтобы найти ортогональную замену переменных, приводящую квадратичную форму к каноническому виду, достаточно построить ортонормированный базис из собственных векторов соответствующего самосопряжённого ЛО. Как это делается, было разобрано в занятии 6. Заметим попутно, что после приведения к каноническому виду таким методом коэффициентами при квадратах будут собственные числа матрицы A.

Итак, в первую очередь найдём собственные числа матрицы A. Характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50.$$

Из характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

находим собственные числа $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$.

Теперь найдём собственные векторы. Собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = 5$, находится из однородной СЛАУ с матрицей

$$A - 5E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае без труда подбирается решение

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для $\lambda_2 = 10$ получаем:

$$A - 10E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ как собственные векторы самосопряжённого ЛО, отвечающие различным собственным числам, автоматически ортогональны. Чтобы получить из них ортонормированный базис на плоскости, необходимо их нормировать. Положим

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица замены S — это матрица перехода от исходного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ (по умолчанию предполагается, что кривая задана в прямоугольной декартовой системе координат) к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$. Итак,

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Чтобы старая и новая системы координат были одинаково ориентированы, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы S был больше нуля. В нашем случае это условие выполнено. В общем случае этого всегда можно добиться, заменив один из векторов $\boldsymbol{f}_i$ на $-\boldsymbol{f}_i$.

Обозначим новые переменные x_1 и y_1 и выполним в уравнении (3) подстановку

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_1, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_1. \end{cases} \tag{4}$$

В соответствии с нашими предварительными замечаниями без вычислений ясно, что квадратичная форма преобразуется к каноническому виду

$$5x_1^2 + 10y_1^2.$$

Найдём новую линейную часть:

$$16 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 \right) - 8 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 \right) = -\frac{40}{\sqrt{5}} y_1.$$

Итак, в новых координатах уравнение кривой запишется как

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - \frac{40}{\sqrt{5}} y_1 - 2 = 0.$$

Дальнейшее преобразование сводится к параллельному переносу системы координат и изучалось в курсе аналитической геометрии. А именно, выделим полный квадрат по y_1:

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - \tfrac{40}{\sqrt{5}}y_1 - 2 = 5x_1^2 + 10\left(y_1^2 - 2\cdot\tfrac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\right) - 2 =$$
$$= 5x_1^2 + 10\left(y_1 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 10.$$

Затем сделаем вторую замену

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} = y_2. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение кривой преобразуется к виду

$$5x_2^2 + 10y_2^2 = 10, \text{ или}$$
$$\frac{x_2^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{1^2} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{2}$ и 1. Найдём также связь канонических координат x_2, y_2 с исходными x, y. Для этого скомбинируем замены (4) и (5). Получим

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{4}{5}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{5}. \end{cases} \tag{6}$$

Наконец, перейдём к построению кривой. Для начала выясним, как каноническая система координат расположена по отношению к исходной. Во-первых, начало канонической системы координат O_2 имеет координаты $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ в системе x_2, y_2. Из (6) находим его координаты в исходной системе: $x = -4/5$, $y = 2/5$. Во-вторых, так как в процессе преобразований мы делали всего один поворот в соответствии с матрицей S, *оси канонической системы координат будут направлены по собственным векторам* $\boldsymbol{f}_1$ *и* $\boldsymbol{f}_2$. Изобразим положение систем координат на чертеже (рис. 1).

Теперь остаётся только нарисовать эллипс с полуосями $\sqrt{2}$ и 1 *в канонической системе координат* (O_2, x_2, y_2) (рис. 2).

†

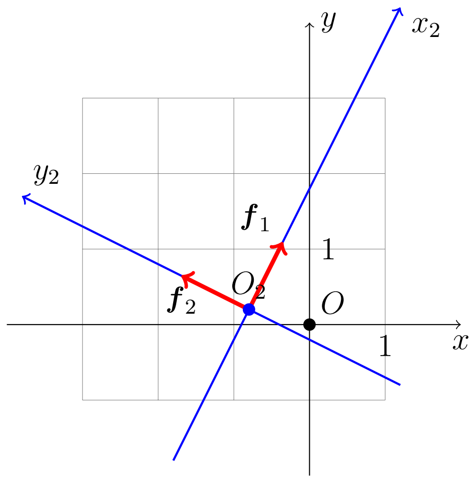

Рис. 1: Положение канонической с. к. относительно исходной

Пример 2 ([ЕД, 4.227]). Приведём к каноническому виду и построим кривую

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0. \tag{7}$$

Матрицей квадратичной части $x^2 - 2xy + y^2$ уравнения (7) служит

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные числа и собственные векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2;$$

$$\lambda_1 = 0\colon \quad A - \lambda_1 E = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2\colon \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь строим нормированные собственные векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и матрицу замены

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

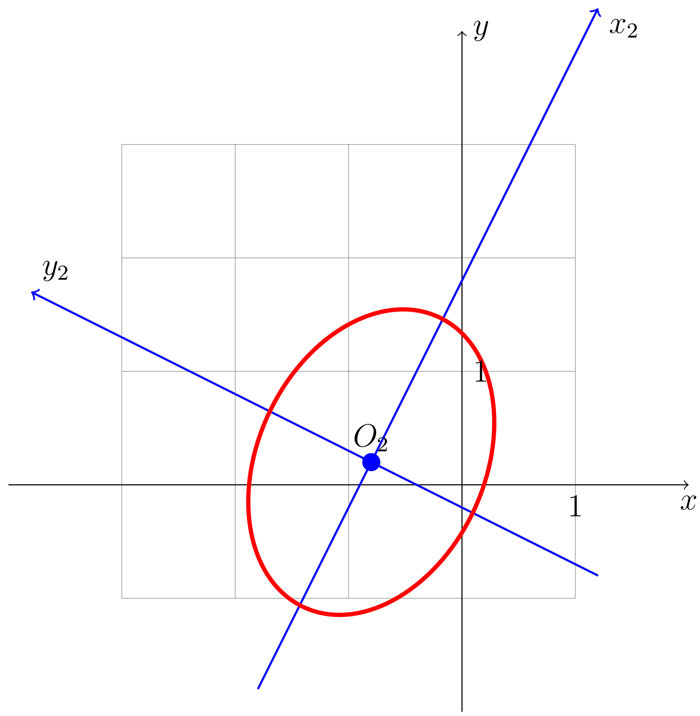

Рис. 2: Эллипс из [ЕД, 4.226]

Заметим, что $|S| = 1 > 0$.

Выполняя в уравнении (7) подстановку

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \end{cases} \tag{8}$$

приходим к уравнению

$$2y_1^2 - 10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) + 25 = 0,$$
$$2y_1^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}y_1 + 25 = 0.$$

Выделим полный квадрат по переменной y_1 и вынесем за скобки коэффициент при x_1:

$$2\left(y_1^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{16}{\sqrt{2}} + 25 = 0,$$
$$2\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Теперь сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} = x_2, \\ y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = y_2 \end{cases} \tag{9}$$

и получим каноническое уравнение параболы

$$y_2^2 = 2 \cdot 2\sqrt{2} x_2$$

с фокальным параметром $p = 2\sqrt{2}$.

Чтобы связать исходные координаты x, y с каноническими x_2, y_2, скомбинируем замены (8) и (9). Получим:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + 2, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + 1. \end{cases}$$

Отсюда находим положение начала канонической системы координат относительно исходной $O_2(2, 1)$. Оси канонической системы координат, как и в примере 1, направлены по собственным векторам: ось x_2 по $\boldsymbol{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$, ось y_2 — по $\boldsymbol{f}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$. Кривую строим согласно процедуре, изложенной в примере 1: сначала показываем положение канонической системы координат относительно исходной, а затем изображаем параболу в канонической системе (рис. 3).

†

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [ЕД, 4.228], [ЕД, 4.230].

Следует помнить, что кривая второго порядка может принадлежать к одному из вырожденных типов. Тем не менее, схема, изложенная в примере 1, позволяет исследовать и такие случаи.

Пример 3. Выясним тип и построим кривую с уравнением

$$6x^2 - 5xy - 6y^2 - 17x - 7y + 5 = 0. \tag{10}$$

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5/2 \\ -5/2 & -6 \end{pmatrix}.$$

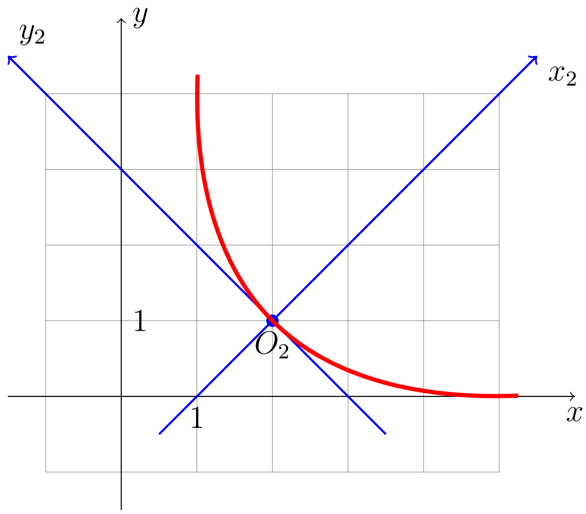

Рис. 3: Парабола из [ЕД, 4.227]

Собственные числа и векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -5/2 \\ -5/2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{169}{4} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{13}{2},\ \lambda_2 = \frac{13}{2};$$

$$\lambda_1 = -\frac{13}{2}:\quad A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 25/2 & -5/2 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = \frac{13}{2}:\quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ -5/2 & -25/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормированные собственные векторы и матрица замены:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix},\quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix},\ |S| > 0.$$

Первая замена переменных:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{26}}x_1 - \frac{5}{\sqrt{26}}y_1, \\ y = \frac{5}{\sqrt{26}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}y_1. \end{cases} \tag{11}$$

Чтобы вычислить, как преобразуется линейная часть уравнения (10), вместо прямой подстановки можно пользоваться следующим методом. Обозначим через b матрицу-строку коэффициентов линейной части (10):

$$b = (-17, -7).$$

Тогда строкой коэффициентов линейной части уравнения после выполнения подстановки (11) будет $b' = bS$ (в качестве дополнительного упражнения попробуйте вывести это из формулы (2)). В нашем случае имеем:

$$b' = (-17, -7) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (-52/\sqrt{26}, 78/\sqrt{26}).$$

Следовательно, уравнение (10) после подстановки (11) преобразуется в уравнение

$$-\frac{13}{2}x_1^2 + \frac{13}{2}y_1^2 - \frac{52}{\sqrt{26}}x_1 + \frac{78}{\sqrt{13}}y_1 + 5 = 0.$$

Выделим полные квадраты по x_1 и y_1:

$$-\tfrac{13}{2}\left(x_1^2 + 2 \cdot \tfrac{4}{\sqrt{26}}x_1 + \tfrac{8}{13} - \tfrac{8}{13}\right) + \tfrac{13}{2}\left(y_1^2 + 2 \cdot \tfrac{6}{\sqrt{26}}y_1 + \tfrac{18}{13} - \tfrac{18}{13}\right) + 5 = 0,$$
$$-\tfrac{13}{2}\left(x_1 + \tfrac{4}{\sqrt{26}}\right)^2 + \tfrac{13}{2}\left(y_1 + \tfrac{6}{\sqrt{26}}\right)^2 = 0.$$

После замены

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{\sqrt{26}} = x_2, \\ y_1 + \frac{6}{\sqrt{26}} = y_2 \end{cases} \tag{12}$$

и деления на $-13/2$ приходим к уравнению

$$x_2^2 - y_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 - y_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{array} \right.$$

пары пересекающихся прямых. Комбинируя замены (11) и (12), найдём связь канонической и исходной системы координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{26}}x_2 - \frac{5}{\sqrt{26}}y_2 + 1, \\ y = \frac{5}{\sqrt{26}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{26}}y_2 - 1. \end{cases}$$

Отсюда находим координаты начала канонической системы координат $O_2(1, -1)$ в исходной системе. Остаётся изобразить каноническую систему координат и провести в ней наши прямые (рис. 4).

†

Для самостоятельного решения предлагается задача [ЕД, 4.229].

Приведение к каноническому виду уравнений поверхностей 2-го порядка осуществляется, в целом, по той же схеме, но требует больше места и времени.

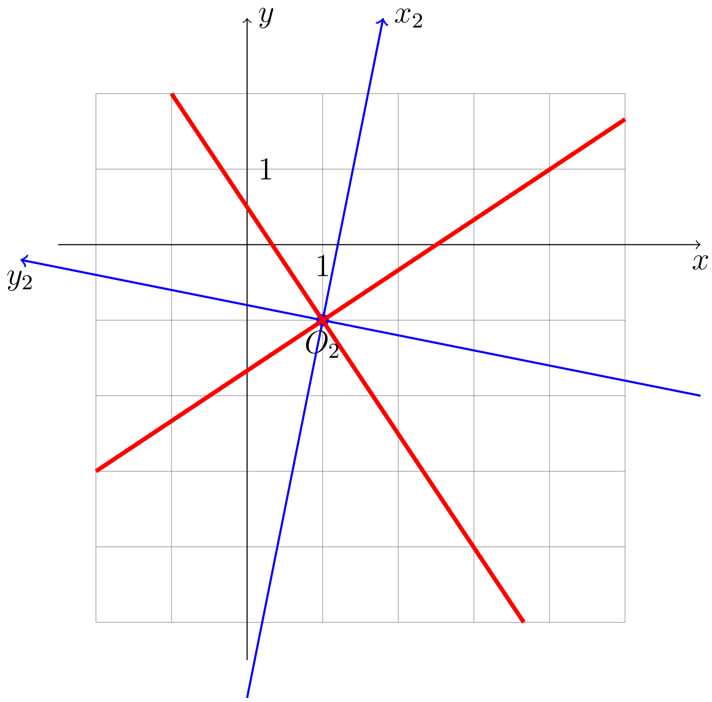

Рис. 4: Пара пересекающихся прямых из примера 3

Пример 4 ([ЕД, 4.234]). Приведём к каноническому виду и построим *в канонической системе координат* поверхность

$$\underbrace{2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx}_{\text{кв. форма}} + 60x - 12y + 12z - 90 = 0. \qquad (13)$$

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & -7-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & -4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3)+2(1)+2(2) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & -7-\lambda & 10 \\ -2\lambda & -2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (3)/(-\lambda) \\ (2) \\ (1) \end{matrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -7-\lambda & 10 \\ 2-\lambda & 2 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)-10(1) \\ (3)+8(1) \end{matrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -18 & -27-\lambda & 0 \\ 18-\lambda & 18 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)+2(3) \\ (3) \end{matrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 18-2\lambda & 9-\lambda & 0 \\ 18-\lambda & 18 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(9-\lambda) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 18-\lambda & 18 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3)-18(2) \end{matrix} = \lambda(9-\lambda) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -18-\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(9-\lambda)(\lambda+18) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(9-\lambda)(\lambda+18).$$

Собственные числа: $\lambda_1 = -18$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 9$.

Найдём собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = -18$. Для этого решим однородную СЛАУ с матрицей $A + 18E$:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (1)/2 \\ (3)/2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 10 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)-5(1) \\ (3)+2(1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & -54 & -54 \\ 0 & 27 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)/(-54) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)-11(2) \\ (2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда легко подбирается решение

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для λ_2 и λ_3 аналогично можно найти

$$\lambda_2 = 0\colon \quad A - \lambda_2 E = A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 9\colon \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что найденные собственные векторы ортогональны, что подтверждает, что мы нашли их правильно. Нормируя собственные векторы, составим матрицу матрицу первой замены

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и запишем формулы соответствующей подстановки:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}z_1, \\ y = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}z_1, \\ z = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1. \end{cases} \tag{14}$$

После подстановки квадратичная форма, согласно общей теории, преобразуется в форму

$$-18x_1^2 + 9z_1^2,$$

а коэффициенты новой линейной части легче вычислить матричным способом:

$$bS = (60, -12, 12) \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (36, 36, -36).$$

Следовательно, уравнение (13) преобразуется в уравнение

$$-18x_1^2 + 9z_1^2 + 36x_1 + 36y_1 - 36z_1 - 90 = 0.$$

Выделим полные квадраты по переменным x_1 и z_1, а также вынесем коэффициент при переменной y_1:

$$-18(x_1^2 - 2x_1 + 1 - 1) + 9(z_1^2 - 4z_1 + 4 - 4) + 36y_1 - 90 = 0,$$

$$-18(x_1 - 1)^2 + 9(z_1 - 2)^2 + 36y_1 - 108 = 0,$$

$$2(x_1 - 1)^2 - (z_1 - 2)^2 = 4(y_1 - 3).$$

Сделаем вторую замену

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x_2, \\ y_1 - 2 = y_2, \\ z_1 - 3 = z_3, \end{cases} \tag{15}$$

и окончательно преобразуем уравнение в каноническое (с точностью до перестановки переменных) уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x_2^2}{1^2} - \frac{z_2^2}{(\sqrt{2})^2} = 2y_2.$$

Связь между канонической и исходной системами координат может быть найдена из комбинации подстановок (14) и (15):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}z_2 - \frac{1}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{5}{3}, \\ z = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}z_2 + \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Мы, однако, не будем её использовать, а только схематически изобразим гиперболический параболоид в канонической системе координат, уделив внимание только его расположению относительно координатных осей, см. рис. 5.

†

Для самостоятельного решения рекомендуются задачи [ЕД, 4.233], [ЕД, 4.235].

Список литературы

[ЕД] А. В. Ефимов, Б. П. Демидович (ред.), Сборник задач по математике для втузов, в четырёх частях, часть 1, Линейная алгебра и основы математического анализа, 3-е изд., М.: Наука, 1993.

[КК] А. Н. Канатников, А. П. Крищенко, Линейная алгебра, 3-е изд., Математика в техническом университете, вып. IV, М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

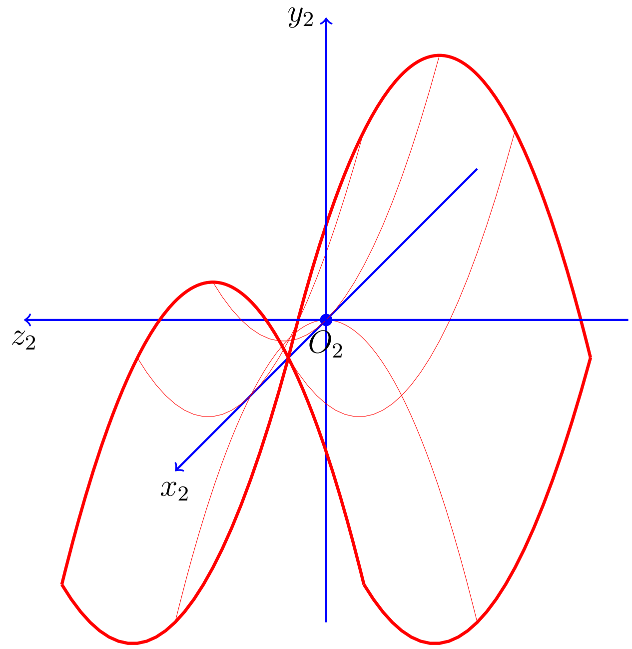

Рис. 5: Гиперболический параболоид