ФНП, обзорное занятие 1

Дифференцируемые функции нескольких переменных

(подготовка к контрольной работе)

Д. А. Степанов

Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ — функция двух переменных, а $c \in \mathbb{R}$ — действительное число. *Линией уровня* функции f, соответствующей значению c, называется множество

$$C_{f,c} = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = c\}$$

точек области определения Ω, в которых функция f принимает значение c. Обычно линия уровня является кривой на плоскости, но может вырождаться в точку или в пустое множество.

Пусть теперь $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ — функция трёх переменных. *Поверхностью уровня* функции f, соответствующей значению c, называется множество

$$S_{f,c} = \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = c\}.$$

Обычно поверхность уровня является поверхностью в пространстве.

Пример 1. Найдём и изобразим линию уровня функции

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2},$$

проходящую через точку $M(\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$.

Сначала найдём область определения Ω данной функции. Чтобы функция f была определена, нужно, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным. Значит,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 - x^2 - 4y^2 \geqslant 0\}.$$

последнее неравенство можно переписать как

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} \leqslant 1, \tag{1}$$

что задаёт внутреннюю часть эллипса с полуосями 4 и 2 (см. рис. 1). Заметим, что неравенство (1) нестрогое. Это означает, что граница об-

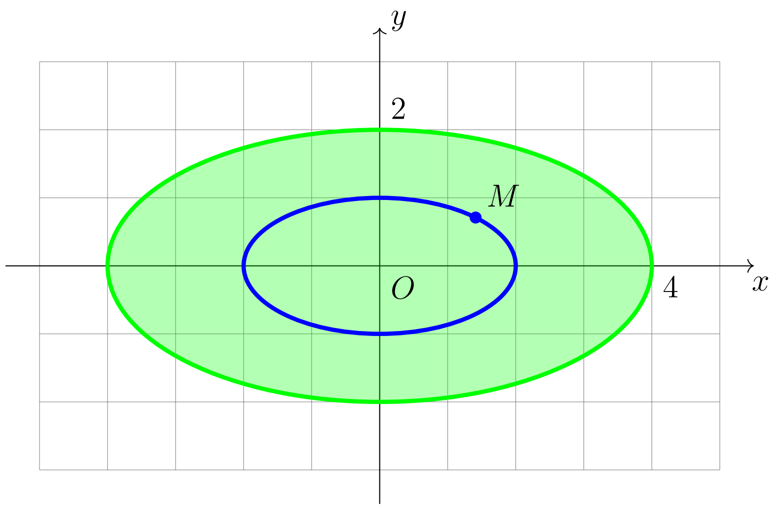

Рис. 1: Область определения и линия уровня функции $\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$

ласти определения Ω принадлежит ей. Этот факт мы отражаем, проводя граничный эллипс сплошной линией.

Чтобы найти уравнение линии уровня, сначала подставим точку M в функцию f:

$$f(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{16 - 2 - 2} = 2\sqrt{3}.$$

Итак, линия уровня, проходящая через M,

$$C_{f,2\sqrt{3}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{16 - x^2 - 4y^2} = 2\sqrt{3}\}.$$

Уравнение линии уровня можно переписать как

$$16 - x^2 - 4y^2 = 12,$$

или

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1.$$

Это эллипс с полуосями 2 и 1. Он также изображён на рис. 1. †

Пример 2. Построим поверхность уровня функции

$$f(x, y, z) = e^{2x^2 + y^2 - 2z},$$

проходящую через точку $M(0; 2; 1)$.

В данном случае областью определения функции f является всё пространство $\mathbb{R}^3$. В точке M функция f принимает значение $e^{4-2} = e^2$. Значит, уравнение поверхности уровня

$$e^{2x^2+y^2-2z} = e^2,$$

или

$$2x^2 + y^2 - 2z = 2,$$

$$z + 1 = \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}^2}.$$

Поверхность уровня S_{f,e^2} изображена на рис. 2 и представляет собой эллиптический параболоид. †

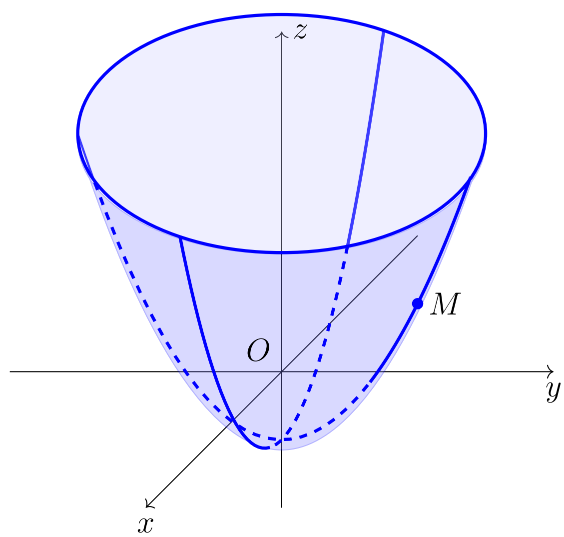

Рис. 2: Поверхность уровня функции $e^{2x^2+y^2-2z}$

Напомним из теории, что число A называется *пределом* функции нескольких переменных (ФНП) $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, в предельной точке x° области Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ из проколотой δ-окрестности точки x° выполнено

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Данное определение предела называется *определением по Коши*. Ему эквивалентно т. н. *определение по Гейне*: $A = \lim\limits_{x \to x^\circ} f(x)$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x^{(m)}\}_{m\geqslant 0}$ точек из множества Ω, сходящейся к токе x°, существует предел числовой последовательности $f(x^m)$ при $m\to\infty$ и этот предел равен A. Определение по Гейне обычно используют, чтобы доказать, что некоторый предел не существует.

ФНП $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ называется *непрерывной* в предельной точке x° области Ω, $x^\circ\in\Omega$, если существует предел $\lim\limits_{x\to x^\circ} f(x)$ и этот предел равен $f(x^\circ)$. Со свойствами пределов ФНП и свойствами непрерывных ФНП можно ознакомиться в [ККЧ, пп. 1.3, 1.4]. Отметим следующий факт, который часто используется при доказательстве непрерывности ФНП. Рассмотрим ФНП $p_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$p_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i,$$

$i=1,\ldots,n$. Функция p_i называется *проекцией на i-ю координату*. Несложно доказать прямо по определению по Коши, что функция p_i непрерывна в любой точке пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sin y+e^{xy})$?

Речь идёт о пределе функции двух переменных $f(x,y)=\sin y+e^{xy}$ в точке $(0;0)$. Заметим, во-первых, что функция f определена на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ и, в частности, в точке $(0;0)$. Далее, функция f является суммой двух функций $f_1(x,y)=\sin y$ и $f_2(x,y)=e^{xy}$. Первая, *как функция двух переменных* представляет собой суперпозицию двух функций — проекции $p_y(x,y)=p_2(x,y)=y$ на вторую координату и функции sin:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "p_y"] \arrow[rr, bend right, "\sin\circ p_y"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\sin"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Непрерывность функции sin известна из математического анализа, о непрерывности проекции p_y мы только что говорили, поэтому f_1 непрерывна на всей плоскости как суперпозиция непрерывных функций (непрерывность сложной функции). Аналогично, функция f_2 является суперпозицией непрерывной функции одной переменной — экспоненты $t\mapsto e^t$ и функции $f_3(x,y)=xy$. В свою очередь, функция f_3 непрерывна как произведение двух непрерывных функций — проекций $p_x(x,y)=p_1(x,y)=x$ и p_y. Значит, функция f_2 тоже непрерывна. Наконец, исходная функция f непрерывна как сумма непрерывных функций. Отсюда следует, что искомый предел существует и равен

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sin y+e^{xy})=f(0;0)=0+e^0=1,$$

т. е. значению функции f в точке $(0;0)$. †

Пример 4. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+2y}{x+y}$?

Областью определения функции двух переменных $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x+y}$ служит плоскость $\mathbb{R}^2$ без прямой $y=-x$, поэтому начало координат $(0;0)$ хотя и не принадлежит области определения, но является её предельной точкой. На этот раз мы покажем, что данного предела не существует.

Воспользуемся с этой целью определением предела по Гейне. Рассмотрим две последовательности точек на плоскости, стремящиеся к началу координат. Пусть первая последовательность $P_n = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$ стремится к O по прямой $y=x$, а вторая $Q_n = (\frac{1}{n}; \frac{2}{n})$ стремится к O по прямой $y=2x$. Посмотрим, каковы пределы последовательностей значений, которые принимает ФНП f на данных последовательностях точек. Имеем

$$f(P_n) = \frac{1/n+2/n}{1/n+1/n} = \frac{3}{2}, \quad f(Q_n) = \frac{1/n+4/n}{1/n+2/n} = \frac{5}{3}.$$

Таким образом, функция принимает постоянное значение $3/2$ на первой последовательности и постоянное значение $5/3$ на второй. Значит, пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(Q_n)$ существуют и равны $3/2$ и $5/3$ соответственно. Но если бы существовал предел функции f в точке O, он был бы единственным, однако $3/2 \neq 5/3$. Это противоречие показывает, что предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+2y}{x+y}$$

не существует. Чтобы поведение функции f вблизи точки O было яснее, на рис. 3 показан фрагмент её графика. †

Иногда для вычисления пределов ФНП можно применить иные соображения.

Пример 5. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^4}{x^2+y^4}$?

Можно представить функцию $\dfrac{xy^4}{x^2+y^4}$ как произведение функций $f_1(x,y) = x$ и $f_2(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^4}$. Так как всегда $y^4 \leqslant x^2+y^4$, функция f_2 ограничена при $x, y \to 0$. Функция f_1 является бесконечно малой

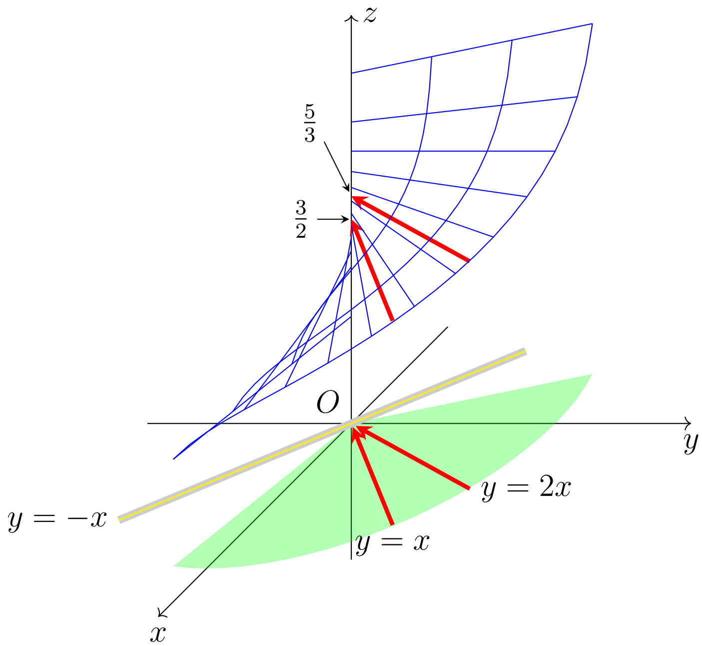

Рис. 3: График функции $z = \frac{x+2y}{x+y}$ вблизи начала координат

при $x, y \to 0$. Но произведение бесконечно малой на ограниченную функцию - это бесконечно малая. Следовательно, данный предел существует и равен нулю. †

С понятием дифференцируемости и правилами дифференцирования ФНП можно ознакомиться по [ККЧ, гл. 2, 3, 5]. Перечислим здесь несколько формул и определений, которые часто используются при решении задач.

Пусть сложная функция h получена подстановкой трёх функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ одной переменной t в функцию $f(x, y, z)$ трёх переменных:

$$h(t) = f(x(t), y(t), z(t)).$$

Тогда функция h зависит от одной переменной t и её производная может быть вычислена по формуле

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Если сложная функция h получена подстановкой в функцию двух переменных $f(x, y)$ двух функций $x(u, v), y(u, v)$ от переменных u и v, то и сама h

является функцией двух переменных u и v и её частные производные вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\\ \frac{\partial h}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned} \tag{2}$$

Общую теорему о дифференцировании сложной функции см. в [ККЧ, п. 2.6].

Градиентом дифференцируемой ФНП $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x^\circ \in \Omega$ называется вектор $\mathbf{grad}\, f(x^\circ)$, составленный из частных производных функции f в точке x°:

$$\mathbf{grad}\, f(x^\circ) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^\circ), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^\circ), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^\circ)\right).$$

Пусть теперь $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор. *Производной по направлению* $\boldsymbol{l}$ в точке x° от ФНП f называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x^\circ) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^\circ + t\boldsymbol{l})}{t}.$$

В задачах мы всегда будем предполагать, что вектор $\boldsymbol{l}$ *нормирован*, т. е. $\|\boldsymbol{l}\| = 1$. Если ФНП f дифференцируема в точке x°, то она имеет производную по любому направлению в точке x° и эта производная может быть вычислена по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x^\circ) = \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^\circ) = (\boldsymbol{l}, \mathbf{grad}\, f(x^\circ)), \tag{3}$$

т. е. производная по направлению равна скалярному произведению вектора направления и градиента.

Пример 6. Найдём градиент функции $u = x^2y - y^2z + z^3$ в точке $M(1;1;1)$ и производную функции u в точке M в направлении вектора $\vec{MN}$, где $N(2;3;4)$.

Сначала вычислим первые частные производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -y^2 + 3z^2.$$

В точке M

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2,$$

т. е.

$$\mathbf{grad}\, u(M) = (2; -1; 2).$$

Вектор $\vec{MN} = (1;2;3)$, соответствующий нормированный вектор (орт) $\boldsymbol{l} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1;2;3)$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}(M) = (\boldsymbol{l}, \mathbf{grad}\, u(M)) = \frac{1}{\sqrt{14}}(2-2+6) = \frac{6}{\sqrt{14}},$$

в соответствии с формулой (3). †

Пример 7. Найдём первые частные производные функции

$$z = f(x(u,v), y(u,v)),$$

где $f(x,y) = \ln x + y^3$, $x(u,v) = ue^v$, $y(u,v) = \operatorname{tg}(u/v)$.

Воспользуемся формулами (2). Имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{x}\cdot e^v + 3y^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(u/v)}\cdot\frac{1}{v} = \frac{e^v}{x} + \frac{3y^2}{v\cos^2(u/v)},\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{x}\cdot(ue^v) + 3y^2\cdot\frac{1}{\cos^2(u/v)}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) = \\
&\qquad = \frac{ue^v}{x} - \frac{3y^2u}{v^2\cos^2(u/v)}.
\end{aligned}$$

Выражать производные z'_u и z'_v только через переменные u и v не обязательно. †

Пусть ФНП $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $x^\circ \in \Omega$. *Дифференциалом* ФНП f в точке x° называется линейная функция

$$df_{|x^\circ}(\Delta\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^\circ)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^\circ)\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^\circ)\Delta x_n$$

вектора $\Delta\boldsymbol{x}$ приращения аргумента. Дифференциал можно использовать для приближённых вычислений, ибо он представляет собой главную часть приращения функции. Основная приближённая формула

$$f(x^\circ + \Delta\boldsymbol{x}) \approx f(x^\circ) + df_{|x^\circ}(\Delta\boldsymbol{x}).$$

Для функции двух переменных $z = z(x,y)$, точки (x_0, y_0) и приращения $(\Delta x, \Delta y)$ эта формула принимает вид

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y. \tag{4}$$

Напомним также формулировку теоремы о неявной функции для случая одного уравнения

$$F(x,y,z) = 0 \tag{5}$$

с тремя переменными.

Теорема 1. *Пусть функция F определена в некоторой окрестности U точки $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ и выполнены следующие три условия:*

а) $F(M) = 0$*;*

б) *функция F имеет непрерывные первые частные производные в окрестности U;*

в) $F'_z(M) \neq 0$.

Тогда существует такая окрестность W точки (x_0, y_0) в пространстве $\mathbb{R}^2$ и такая функция $z = g(x, y)$, определённая в окрестности W, что

(i) *для всех точек $(x, y) \in W$ точка $(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ содержится в множестве U;*

(ii) $g(x_0, y_0) = z_0$*;*

(iii) *для всех $(x, y) \in W$ выполнено уравнение $F(x, y, g(x, y)) \equiv 0$;*

(iv) *функция g дифференцируема в точке (x_0, y_0) и её частные производные вычисляются по формулам*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(M)}{F'_z(M)}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(M)}{F'_z(M)}. \tag{6}$$

Благодаря условию (iii) функция g и называется неявной функцией*, определённой уравнением* (5)*.*

Общую формулировку теоремы о неявной функции см. в [ККЧ, Теорема 4.3].

Пример 8. Найдём частные производные и дифференциал в точке $(0; 2)$ неявной функции $z(x, y)$, определённой в окрестности точки $(0; 2; -2)$ уравнением

$$x^5 + y^5 + z^5 = 5xyz.$$

Затем найдём приближённое значение функции z в точке $(1{,}1; 1{,}8)$.

Положим $F(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$ и найдём частные производные функции F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 5x^4 - 5yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 - 5xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 5z^4 - 5xy.$$

В точке M

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M) = 20, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M) = 80, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(M) = 80.$$

Легко видеть, что все условия теоремы 1 о неявной функции выполнены, в частности, $F'_z(M) = 80 \neq 0$. По формулам (6) находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0;2) = -\frac{20}{80} = -0{,}25, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0;2) = -\frac{80}{80} - 1.$$

Теперь можно записать дифференциал функции z в точке $(0;2)$.

$$dz_{|(0;2)}(\Delta x, \Delta y) = -0{,}25\Delta x - \Delta y.$$

Приращения при переходе от точки $(0;2)$ к точке $(1{,}1;1{,}8)$ равны $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$, $\Delta y = 1{,}8 - 2 = -0{,}2$. Теперь по формуле (4) приближённое значение функции z в точке $(1{,}1;1{,}8)$

$$z(1{,}1;1{,}8) \approx z(1;2) + dz_{|(0;2)}(0{,}1, -0{,}2) = -2 - 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 = -1{,}825.$$

Обратите внимание, что значение $z(1;2) = -2$ должно быть дано по условию задачи, чтобы неявная функция была однозначно определена, см. п. (ii) теоремы 1. †

Список литературы

[ККЧ] А. Н. Канатников, А. П. Крищенко, В. Н. Четвериков, Дифференциальное исчисление функций многих переменных, М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.