ФНП, обзорное занятие 2

Касательная плоскость и нормаль к поверхности, экстремум ФНП (подготовка к рубежному контролю)

Д. А. Степанов

Рассмотрим поверхность S в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

Пусть точка $P(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности S, функция F дифференцируема в окрестности точки P и $\mathbf{grad}\, F(P) \neq \mathbf{0}$, т. е. хотя бы одна из частных производных функции F в точке P отлична от нуля. Такая точка P поверхности S называется *неособой.* Согласно теореме о достаточных условиях существования касательной плоскости, поверхность S имеет касательную плоскость $T_P S$ в своей неособой точке P и уравнение этой плоскости

$$F'_x(P)(x - x_0) + F'_y(P)(y - y_0) + F'_z(P)(z - z_0) = 0. \tag{1}$$

Нормаль — т. е. прямая, проходящая через точку P перпендикулярно касательной плоскости $T_P S$ — имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P)}, \tag{2}$$

в котором, как в каноническом уравнении прямой, допускается писать 0 в знаменателе.

Случай задания поверхности S как графика функции

$$z = f(x, y)$$

двух переменных x, y можно свести к предыдущему, если положить $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Уравнение (1) тогда примет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{3}$$

а уравнение (2) — вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{4}$$

Задачи на касательную и нормаль части А рубежного контроля сводятся к прямолинейному применению формул (1)–(4).

Пример 1. Составим уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением

$$x^3 - y^2 z - e^z = 0,$$

в точке $P(1, -1, 0)$.

Найдём частные производные функции $F(x, y, z) = x^3 - y^2 z - e^z$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -y^2 - e^z.$$

В точке P

$$F'_x(P) = 3,\ F'_y(P) = 0,\ F'_z(P) = -2.$$

Не все частные производные обращаются в нуль в точке P, значит, эта точка неособа и в ней поверхность S действительно имеет касательную и нормаль. В соответствии с уравнениями (1) и (2) касательная плоскость

$$T_P S\colon\ 3(x-1) - 2z = 0,$$

или $3x - 2z = 3$. Уравнения нормали $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-2}$. †

Пример 2. Составим уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной как график функции

$$z = \operatorname{arctg}(2x - y),$$

в точке $P(2, 3, \pi/4)$.

Заметим, что если поверхность задана как график функции, то частная производная её уравнения по переменной z всегда отлична от нуля, так что касательная плоскость и нормаль существуют в любой точке (лишь бы функция была дифференцируемой). В данном случае удобнее воспользоваться уравнениями (3) и (4). Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{1 + (2x - y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{1 + (2x - y)^2},$$

где $f(x, y) = \operatorname{arctg}(2x - y)$. В точке $(2, 3)$

$$f'_x(2, 3) = 1,\ f'_y(2, 3) = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$T_P S\colon\ z - \frac{\pi}{4} = (x - 2) - \frac{1}{2}(y - 3),$$

или $2x - y - 2z = 1 - \pi/2$. Нормаль $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1/2} = \frac{z-\pi/4}{-1}$. †

Разберём ещё несколько более сложную задачу 2 из части Б программы подготовки к рубежному контролю.

Пример 3. Найдём такие $a, b, c \in \mathbb{R}$, чтобы однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

касался плоскости $\alpha\colon 4x + y + 2z = 1$ в точке $P(4, 5, -10)$.

Одно условие на a, b, c ясно сразу: гиперболоид должен проходить через точку P, т. е. должно выполняться уравнение

$$\frac{4^2}{a^2} + \frac{5^2}{b^2} - \frac{(-10)^2}{c^2} = 1.$$

Во-вторых, касательная плоскость к гиперболоиду в точке P (в предположении, что гиперболоид через неё проходит), должна совпадать с плоскостью α. Координатами вектора нормали касательной плоскости будут частные производные уравнения гиперболоида в точке P. Без труда находим

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \left(\frac{2x}{a^2}\right)_P = \frac{8}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = \left(\frac{2y}{b^2}\right)_P = \frac{10}{b^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P) = \left(-\frac{2z}{c^2}\right)_P = \frac{20}{c^2}.$$

Чтобы плоскость с вектором нормали $(8/a^2, 10/b^2, 20/c^2)$ совпадала с плоскостью α, данный вектор должен быть пропорционален вектору нормали $(4, 1, 2)$ плоскости α, т. е. должно существовать такое $k \in \mathbb{R}$, что

$$\frac{8}{a^2} = 4k, \ \frac{10}{b^2} = k, \ \frac{20}{c^2} = 2k.$$

Собирём наши условия в систему

$$\begin{cases} \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{25}{b^2} - \dfrac{100}{c^2} = 1, \\ \dfrac{8}{a^2} = 4k, \\ \dfrac{10}{b^2} = k, \\ \dfrac{20}{c^2} = 2k, \end{cases}$$

и решим её. Выразим a^2, b^2, c^2 через k и подставим в первое уравнение. Получим

$$a^2 = 1/2k, \quad b^2 = 10/k, \quad c^2 = 10/k,$$

$$8k + \frac{5}{2}k - 10k = 1,$$

откуда $k = 2$, $a^2 = 1$, $b^2 = 5$, $c^2 = 5$. Константы a, b, c как полуоси гиперболоида должны быть положительными, следовательно, $a = 1$, $b = c = \sqrt{5}$. †

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). *Пусть ФНП $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, имеет локальный экстремум (минимум или максимум) в точке $x^\circ \in \Omega$, а также все первые частные производные в точке x°. Тогда все эти частные производные обращаются в нуль в точке x°: $f'_{x_i}(x^\circ) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Если ФНП f дифференцируема в точке x°, то эти условия можно записать короче как $df_{|x^\circ} = 0$, т. е. обращение в нуль дифференциала функции f в точке x°.*

Точка x°, в которой все первые частные производные функции ФНП f обращаются в нуль, называется *стационарной точкой* ФНП f.

Напомним, что если ФНП $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $x^\circ \in \Omega$, то её второй дифференциал в точке x°

$$d^2 f_{|x^\circ} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^\circ)\, dx_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^\circ)\, dx_i dx_j$$

можно рассматривать как квадратичную форму от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$.

Теорема 2 (достаточные условия локального экстремума). *Пусть для ФНП $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, и точки $x^\circ \in \Omega$ выполнены необходимые условия локального экстремума: $df_{|x^\circ} = 0$. Предположим также, что ФНП f дважды непрерывно дифференцируема в точке x°. Тогда*

а) *если второй дифференциал $d^2 f_{|x^\circ}$ положительно определён как квадратичная форма ($d^2 f_{|x^\circ} > 0$), то ФНП f имеет строгий локальный минимум в точке x°;*

б) *если второй дифференциал отрицательно определён ($d^2 f_{|x^\circ} < 0$), то ФНП f имеет в точке x° строгий локальный максимум;*

в) *если второй дифференциал $d^2 f_{|x^\circ}$ строго неопределён (т. е. как квадратичная форма принимает и положительные, и отрицательные значения), то ФНП f не имеет экстремума в точке x°.*

Если ФНП f зависит лишь от двух переменных x и y, то её второй дифференциал в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$d^2 f_{|(x_0,y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\, dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\, dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\, dxdy.$$

Обозначим $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$. Заметим, что матрицей второго дифференциала как квадратичной формы будет

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$$

(также эта матрица называется *матрицей Гессе* функции f). Обозначим ещё $\Delta = AB - C^2$ определитель этой матрицы. С помощью критерия Сильвестра достаточные условия теоремы 2 можно переписать так:

а) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке (x_0, y_0) нет;

б) если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в точке (x_0, y_0) строгий локальный минимум;

в) если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке (x_0, y_0) строгий локальный максимум.

Если $\Delta = 0$, то достаточные условия теоремы 2 неприменимы и требуется дополнительное исследование.

Пример 4. (Это задача 2 в) части А программы подготовки) Исследуем на экстремум функцию

$$z = y^3 - x^2 + 2xy - y^2 - 3y$$

переменных x и y.

Сначала найдём стационарные точки. Частные производные

$$z'_x = -2x + 2y, \quad z'_y = 3y^2 + 2x - 2y - 3.$$

Стационарные точки находятся из системы

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ 3y^2 + 2x - 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Подставляя $y = x$ во второе уравнение, получаем

$$3x^2 - 3 = 0,$$

откуда находим $x = \pm 1$. Следовательно, функция z имеет две стационарные точки $P(-1,-1)$ и $Q(1,1)$.

Найдём теперь вторые частные производные функции z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y - 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2.$$

Исследуем теперь точки P и Q поочерёдно с помощью достаточных условий.

В точке P имеем $A = -2$, $B = -8$, $C = 2$, следовательно, $\Delta = 12 > 0$ и в точке P максимум.

В точке Q имеем $A = -2$, $B = 4$, $C = 2$, следовательно, $\Delta = -12 < 0$ и в точке Q экстремума нет. †

Задачу на *условный экстремум* ФНП мы будем записывать следующим образом:

$$\begin{gathered} f(x_1,\ldots,x_n) \to \mathrm{extr} \\ \varphi(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

что означает, что необходимо исследовать на условный экстремум функцию f при условии $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Условие $\varphi = 0$ называется также *уравнением связи*. В общем случае в задаче на условный экстремум уравнений связи может быть несколько, но мы ограничимся случаем одного уравнения, так как только такие задачи встречаются в рубежном контроле.

Функция

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

$n+1$ переменных $x_1,\ldots,x_n,\lambda$ называется *функцией Лагранжа* задачи (5).

Теорема 3 (необходимые условия условного экстремума)**.** *Пусть ФНП f и φ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^\circ \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x^\circ) = 0$ и $d\varphi_{|x^\circ} \neq 0$. Если точка x° является условным экстремумом в задаче* (5)*, то найдётся такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что точка $(x^\circ, \lambda_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ является стационарной точкой функции Лагранжа L, т. е. выполнена система*

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^\circ, \lambda_0) = 0, \ i = 1,\ldots,n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^\circ, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что последнее уравнение системы эквивалентно уравнению связи $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = 0$.

Для того, чтобы сформулировать достаточные условия условного экстремума, введём ещё некоторые обозначения. Рассмотрим первый дифференциал

$$d\varphi_{|x^\circ} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x^\circ)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x^\circ)\,dx_n \tag{6}$$

уравнения связи как линейную функцию на пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $dx_1, \dots, dx_n$ (это т. н. *касательное пространство* к $\mathbb{R}^n$ в точке x°). Обозначим через H подпространство этого пространства, заданное уравнением $d\varphi_{|x^\circ} = 0$. Через d^2L обозначим второй дифференциал функции Лагранжа в точке (x°, λ_0), при вычислении которого *переменная λ считается постоянной и равной* λ_0, т. е.

$$d^2L = d^2L_{|(x^\circ,\lambda_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2}(x^\circ, \lambda_0)\,dx_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x^\circ, \lambda_0)\,dx_i dx_j.$$

Теорема 4 (достаточные условия условного экстремума)**.** *Пусть ФНП f и φ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ и для точки $(x^\circ, \lambda_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполнены необходимые условия условного экстремума. Тогда*

а) *если ограничение $d^2L_{|H}$ второго дифференциала d^2L на подпространство H является положительно определённой квадратичной формой ($d^2L_{|H} > 0$), то в точке x° ФНП f имеет строгий условный локальный минимум;*

б) *если $d^2L_{|H} < 0$, то в точке x° ФНП f имеет строгий условный локальный максимум;*

в) *если квадратичная форма $d^2L_{|H}$ в строгом смысле неопределена на H, то ФНП f не имеет условного экстремума в точке x°.*

Для задачи на условный экстремум

$$\begin{gathered} f(x,y) \to \mathrm{extr} \\ \varphi(x,y) = 0 \end{gathered}$$

функций двух переменных сложное условие теоремы 4 можно записать несколько короче. Для $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ введём обозначение

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0,y_0) & \varphi'_y(x_0,y_0) \\ \varphi'_x(x_0,y_0) & L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0,y_0) & L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix},$$

где $L = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ — функция Лагранжа.

Следствие 1. *Пусть функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и для $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ выполнены необходимые условия условного экстремума в точке (x_0, y_0). Тогда если $\Delta > 0$, то в точке (x_0, y_0) строгий условный локальный минимум, если $\Delta < 0$ — то максимум.*

Пример 5. (Задача 3 в) из части А программы подготовки) Исследуем на условный экстремум функцию $z = xy$ при условии $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$, т. е. на эллипсе.

Ясно, что в данном случае $\varphi = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} - 1$. Составим функцию Лагранжа и найдём её частные производные.

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} - 1),$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \frac{2}{3}\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y.$$

Система из теоремы 3 принимает вид

$$\begin{cases} y + \frac{2}{3}\lambda x = 0, \\ x + 2\lambda y = 0, \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1. \end{cases}$$

Подставим сначала $y = -\frac{2}{3}\lambda x$ во второе уравнение, получим

$$x - \frac{4}{3}\lambda^2 x = 0 \Leftrightarrow x(1 - \frac{4}{3}\lambda^2) = 0.$$

Из первого уравнения системы видно, что если бы было $x = 0$, то и y был бы равен нулю, но это противоречило бы уравнению связи. Значит, $x \neq 0$ и $1 - \frac{4}{3}\lambda^2 = 0$, или $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда и из второго уравнения системы

$$x = \mp\sqrt{3}y,$$

и, подставляя это в уравнение связи, получаем уравнение

$$2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно, получаем следующие четыре стационарные точки функции Лагранжа:

$$P_1(\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), \lambda = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}; \qquad P_2(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), \lambda = \tfrac{\sqrt{3}}{2};$$
$$P_3(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}), \lambda = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}; \quad P_4(\sqrt{\tfrac{3}{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}), \lambda = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Обратите внимание, что для дальнейшего исследования важно вместе с каждой точкой на эллипсе указать и соответствующее значение λ.

Найдём теперь второй дифференциал функции Лагранжа, пока в произвольной точке:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{3}\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$d^2 L = \frac{2}{3}\lambda\, dx^2 + 2\lambda\, dy^2 + 2\, dxdy.$$

Первый дифференциал функции φ:

$$d\varphi = \frac{2}{3}x\, dx + 2y\, dy.$$

Теперь исследуем наши точки P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, по одной.

В точке $P_1(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$d^2 L = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, dx^2 - \sqrt{3}\, dy^2 + 2\, dxdy,$$

$$H\colon\ \sqrt{\frac{2}{3}}\, dx + \sqrt{2}\, dy = 0.$$

Из второго уравнения $dy = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, dx$, поэтому ограничение

$$d^2 L_{|H} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\, dx^2$$

(оно получается подстановкой $dy = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, dx$ в $d^2 L$). Эта форма, очевидно, отрицательно определена, следовательно P_1 — условный максимум.

В точке $P_2(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$d^2 L = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dx^2 + \sqrt{3}\, dy^2 + 2\, dxdy,$$

$$H\colon\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\, dx + \sqrt{2}\, dy = 0.$$

Из второго уравнения $dy = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dx$, поэтому ограничение

$$d^2 L_{|H} = \frac{4}{\sqrt{3}}\, dx^2.$$

Эта форма положительно определена, следовательно P_1 — условный минимум.

Совершенно аналогично проверяется, что P_3 является условным максимумом, а P_4 — минимумом. В качестве упражнения рекомендуется проверить это либо с использованием теоремы 4, как было сделано выше, либо с использованием следствия 1. †

Пример 6. (Задача 4 из части Б программы подготовки) Среди касательных плоскостей к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{48} + \frac{z^2}{12} = 1$$

найдём ту, которая отсекает от положительного координатного октанта $x > 0, y > 0, z > 0$ тетраэдр наименьшего объёма.

В качестве основных параметров введём координаты (x_0, y_0, z_0) точки касания. Примем как очевидный тот факт, что данная точка сама должна лежать в положительном октанте: $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$ (иначе касательная плоскость будет отсекать от положительного октанта неограниченную фигуру). Убедитесь самостоятельно, что уравнение касательной плоскости к данному эллипсоиду в точке (x_0, y_0, z_0) можно записать в виде

$$\frac{x_0}{75}x + \frac{y_0}{48}y + \frac{z_0}{12}z = 1,$$

или

$$\frac{x}{75/x_0} + \frac{y}{48/y_0} + \frac{z}{12/z_0} = 1.$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение плоскости, отсекающей от координатных осей отрезки длины $75/x_0$, $48/y_0$, $12/z_0$. Следовательно, объём отсекаемого тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{75 \cdot 48 \cdot 12}{x_0 y_0 z_0}.$$

Итак, исходную задачу мы можем свести к следующей задаче на условный экстремум:

$$\begin{gathered} V = \frac{1}{6} \cdot \frac{75 \cdot 48 \cdot 12}{x_0 y_0 z_0} \to \min, \\ \frac{x_0^2}{75} + \frac{y_0^2}{48} + \frac{z_0^2}{12} = 1 \end{gathered} \qquad (7)$$

с дополнительным условием $x_0, y_0, z_0 > 0$. Уравнение связи — это условие того, что точка (x_0, y_0, z_0) лежит на эллипсоиде.

Здесь следует сделать одну оговорку по поводу задач на наибольшие и наименьшие значения. Теоремы 3 и 4 позволяют находить *локальные* условные экстремумы. В данном же случае нас по смыслу задачи интересует *глобальный* минимум функции на части эллипсоида. Локальный экстремум, как известно, может не быть глобальным. Поэтому нужны некоторые дополнительные соображения, которые показали бы, что искомое решение существует. Основную роль, как правило, играет теорема Вейерштрасса о том, что непрерывная функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения на замкнутом ограниченном множестве в пространстве $\mathbb{R}^n$. Применение этой теоремы в конкретной ситуации (как, например, в данной задаче), может быть нетривиальным. Здесь мы опустим это рассуждение. Так же можно поступать и в рубежном контроле, но о необходимости такого рассуждения всё же следует помнить.

Вернёмся к задаче (7). Ясно, во-первых, что постоянные коэффициенты в функции V никак не влияют на точку и характер экстремума, поэтому их можно отбросить. Во-вторых, функция $1/f(x, y, z)$ достигает локального минимума в некоторой точке тогда и только тогда, когда функция $f(x, y, z)$ достигает в этой точке локального максимума. Вводя обозначение $x_0 = u$, $y_0 = v$, $z_0 = w$, сведём задачу (7) к эквивалентной задаче

$$\begin{gathered} uvw \to \max, \\ \frac{u^2}{75} + \frac{v^2}{48} + \frac{w^2}{12} = 1. \end{gathered}$$

Можно пойти в упрощении ещё дальше и заметить, что неотрицательная функция $f(x, y, z)$ достигает локального максимума тогда и только тогда, когда достигает максимума функция $f^2(x, y, z)$. Поэтому можно сделать замену $u^2/75 = a$, $v^2/48 = b$, $w^2/12 = c$ и свести задачу к такой

$$\begin{gathered} abc \to \max, \\ a + b + c = 1, \\ a, b, c > 0 \end{gathered}$$

где снова отброшены ненужные постоянные коэффициенты.

Функция Лагранжа

$$L(a, b, c, \lambda) = abc + \lambda(a + b + c - 1),$$

её частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial a} = bc + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial b} = ac + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial c} = ab + \lambda.$$

Стационарные точки найдём из системы

$$\begin{cases} bc + \lambda = 0, \\ ac + \lambda = 0, \\ ab + \lambda = 0, \\ a + b + c = 1. \end{cases}$$

Вычитая, например, второе уравнение из первого, получаем $c(b-a) = 0$. Легко видеть, что равенство нулю одной из неизвестных a, b, c сразу влечёт равенство нулю и остальных, но это противоречит уравнению связи. Следовательно, $a = b$. Аналогично доказывается, что $b = c$. Отсюда легко получить единственное решение системы $a = b = c = 1/3$, $\lambda = -1/9$.

Второй дифференциал функции Лагранжа в произвольной точке

$$d^L = 2a\,dbdc + 2b\,dadc + 2c\,dadb,$$

в нашей стационарной точке

$$d^2L = \frac{2}{3}(dbdc + dadc + dadb). \tag{8}$$

Уравнение подпространства H:

$$da + db + dc = 0,$$

откуда $dc = -da - db$. Подставляя это в (8), получим выражение ограничения

$$d^2L_{|H} = -da^2 - db^2 - dadb.$$

По критерию Сильвестра легко проверяется, что эта квадратичная форма отрицательно определена. Следовательно, наша точка $a = b = c = 1/3$ является точкой условного максимума, что нам и было нужно. Остаётся вернуться к исходным переменным x_0, y_0, z_0. Имеем

$$x_0 = u = \sqrt{25} = 5, \quad y_0 = v = \sqrt{16} = 4, \quad z_0 = w = \sqrt{4} = 2,$$

и

$$\frac{1}{15}(x-5) + \frac{1}{12}(y-4) + \frac{1}{6}(z-2) = 1 \Leftrightarrow 4x + 5y + 10z = 120$$

— искомая касательная плоскость. †