ЛА и ФНП, занятие 2
Линейные операторы в евклидовом пространстве

Д. А. Степанов

Пусть V — *евклидово пространство*, т. е. векторное пространство со скалярным произведением. Линейный оператор (ЛО) $\varphi\colon V \to V$ называется *самосопряжённым*, если

$$\forall x, y \in V \quad (\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{y})).$$

Теорема 1. *Если $\varphi\colon V \to V$ — самосопряжённый ЛО, то его матрица в любом ортонормированном базисе пространства V симметрична. Наоборот, если известно, что матрица ЛО φ в некотором ортонормированном базисе симметрична, то ЛО φ самосопряжённый.*

Теорема 2. *Если $\varphi\colon V \to V$ — самосопряжённый ЛО, то в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов ЛО φ.*

Теорема 2 проясняет геометрический смысл самосопряжённого ЛО. Это оператор, который действует как комбинация сжатий/растяжений по взаимно перпендикулярным направлениям.

Теорема 3. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — самосопряжённый ЛО, а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — собственные векторы этого ЛО, отвечающие* различным *собственным числам. Тогда $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны, т. е. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.*

ЛО $\varphi\colon V \to V$ на евклидовом пространстве V называется *ортогональным*, если

$$\forall x, y \in V \quad (\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Эта формула означает, что ортогональный ЛО сохраняет скалярное произведение любых двух векторов и, следовательно, сохраняет также длины всех векторов и углы между всеми парами векторов. Таким образом, ортогональный ЛО имеет простой геометрический смысл: это *движение* пространства V.

Квадратная матрица $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если

$$S^T S = E,$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$. Другими словами, ортогональная матрица — это матрица, для которой обратная матрица совпадает с транспонированной.

Теорема 4. *Если $\varphi\colon V \to V$ — ортогональный ЛО, то его матрица в любом ортонормированном базисе пространства V ортогональна. Наоборот, если известно, что матрица ЛО φ в некотором ортонормированном базисе ортогональна, то ЛО φ ортогональный.*

Полезно помнить следующие свойства ортогональных матриц.

1. Определитель ортогональной матрице может быть равен только 1 или -1.

2. Если S и U — ортогональные матрицы, то и матрицы S^{-1}, SU тоже ортогональны.

3. Строки (а равно и столбцы) ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (если явно не указано иное, то предполагается, что пространство $\mathbb{R}^n$ наделено *стандартным скалярным произведением*: если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, то
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.)$$

4. Ортогональные матрицы являются матрицами перехода между ортонормированными базисами. Более подробно: если $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ — два ортонормированных базиса евклидова пространства V, то матрица перехода $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ ортогональна. Наоборот, если $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ — какие либо два базиса и известно, что один из них ортонормированный и матрица перехода $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ ортогональна, то и второй базис ортонормированный.

Пример 1 ([ЕД, 4.183]). Найдём ортонормированный базис из собственных векторов самосопряжённого ЛО, который в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу
$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для начала вычислим характеристический многочлен матрицы A:
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} \ominus$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$\text{⊜}(11-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 10 \\ 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -8 & 10 \end{vmatrix} =$$
$$= (11-\lambda)(\lambda^2-7\lambda-90) - 2(-2\lambda+90) - 8(-8\lambda+36) =$$
$$= -\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-1458.$$

Заметим, что $1458 = 2\cdot 3^5$. Перебирая делители числа 1458, из характеристического уравнения

$$\lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+1458=0$$

находим собственные числа $\lambda_1=-9$, $\lambda_2=9$, $\lambda_3=18$. Найдём какой-нибудь собственный вектор, отвечающий $\lambda_1=-9$. Для этого нужно решить однородную СЛАУ с матрицей $A-\lambda_1 E$. Имеем:

$$A+9E = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1)/2 \\ (2) \\ (3)/2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 10 & 1 & -4 \\ 2 & 11 & 10 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (2) \\ (1)-5(2) \\ (3)+2(2) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & -54 & -54 \\ 0 & 27 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (2)/(-54) \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1)-11(2) \\ (2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У последней системы легко подбирается решение $\boldsymbol{f}_1=(1,-2,2)^T$ (это ФСР исходной однородной СЛАУ).

Совершенно аналогично находим собственный вектор $\boldsymbol{f}_2=(2,2,1)^T$, отвечающий собственному числу $\lambda_2=9$, и собственный вектор $\boldsymbol{f}_3=(-2,1,2)^T$, отвечающий $\lambda_3=18$. Заметим, что $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2)=0$, $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_3)=0$, $(\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3)=0$. Эти равенства рекомендуется использовать для самопроверки: согласно теореме 3 собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, должны быть ортогональны! Но ортогональная система ненулевых векторов линейно независима, значит, эти три вектора образуют ортогональный базис в данном 3-мерном пространстве. Остаётся только нормировать эти векторы, т. е. поделить каждый на его длину:

$$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{f}_1/3=(1/3,-2/3,2/3)^T,$$
$$\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{f}_2/3=(2/3,2/3,1/3)^T,$$
$$\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{f}_3/3=(-2/3,1/3,2/3)^T.$$

Это и есть искомый ортонормированный базис из собственный векторов матрицы (ЛО) A.

Матрица ЛО в базисе из собственных векторов всегда диагональна с собственными числами на диагонали. Таким образом, ЛО $\boldsymbol{A}$, заданный матрицей A в исходном базисе $\boldsymbol{e}$, в базисе $\boldsymbol{g}$ будет иметь матрицу

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{g}$ будет матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что это ортогональная матрица. Согласно формуле преобразования матриц линейных операторов, матрицы A, D и S связаны соотношением

$$D = S^{-1}AS. \tag{1}$$

Но так как матрица S ортогональна, обратная к ней вычисляется просто:

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Перемножьте матрицы и убедитесь, что соотношение (1) действительно выполняется.

Для самостоятельного решения рекомендуется задача [ЕД, 4.190] (в данном издании опечатка: вторая строка матрицы $(+2, 4, -2)$).

Пример 2 ([ЕД, 4.184]). Решим аналогичную задачу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления характеристического многочлена и собственных чисел нужно раскрыть определитель

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix}.$$

Это можно сделать аналогично примеру 1. Но иногда бывает проще сначала упростить определитель, пользуясь свойствами определителей:

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)+(2) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 9-\lambda & 0 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix}.$$

Заметим, что мы уже знаем одно собственное число $\lambda = 9$, но продолжим упрощение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)+8(1) \\ (3)-4(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 25-\lambda & -4 \\ 0 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)+2(3) \\ (3) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 0 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3)+8(2) \end{matrix} =$$

$$= (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 27-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(27-\lambda).$$

Итак, собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = 9$ и $\lambda_2 = 27$. Найдём собственный векторы, отвечающие $\lambda_1 = 9$:

$$A - 9E = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве свободных переменных этой СЛАУ возьмём x_1 и x_2. Из таблицы

x_1	x_2	x_3
1	0	-2
0	1	2

найдём ФСР $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, -2)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1, 2)^T$. Это два ЛНЗ собственных вектора, отвечающих λ_1. Действуя аналогично для собственного числа $\lambda_2 = 27$, найдём ещё один собственный вектор $\boldsymbol{f}_3 = (2, -2, 1)^T$. Легко проверить, что $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_3) = 0$ и $(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = 0$, но $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) \neq 0$. Противоречия с теоремой 3 нет, ибо $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ соответствуют не разным, а одному и тому же собственному числу λ_1. Чтобы получить ортогональный, а затем ортонормированный базис из собственных векторов, придётся сделать дополнительный шаг — применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта к паре векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$.

Итак, будем искать такое $c \in \mathbb{R}$, чтобы вектор $\boldsymbol{f}_2' = \boldsymbol{f}_2 - c\boldsymbol{f}_1$ был ортогонален вектору $\boldsymbol{f}_1$. В соответствии с формулами процесса ортогонализации

$$c = \frac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} = \frac{-4}{5},$$
$$\boldsymbol{f}_2' = \boldsymbol{f}_2 + \frac{4}{5}\boldsymbol{f}_1 = (4/5, 1, 2/5)^T.$$

Заметим, что новый вектор $\boldsymbol{f}_2'$ как линейная комбинация векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ тоже будет решением однородной СЛАУ с матрицей $A - \lambda_1 E$, а значит он тоже является собственным и отвечает числу λ_1. Кроме этого, он ортогонален вектору $\boldsymbol{f}_3$. Таким образом, мы получили ортогональный базис из собственных векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2'$, $\boldsymbol{f}_3$. Нормируя, получим искомый ортонормированный базис

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1/\sqrt{5} = (1/\sqrt{5}, 0, -2/\sqrt{5})^T,$$
$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2'/(3/\sqrt{5}) = (4/3\sqrt{5}, 5/3\sqrt{5}, 2/3\sqrt{5})^T,$$
$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3/3 = (2/3, -2/3, 1/3)^T.$$

Ортогональная матрица перехода S от исходного базиса к базису $\boldsymbol{g}$ и диагональная матрица D самосопряжённого ЛО $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{g}$ будут следующими:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

Для самостоятельного решения рекомендуются задачи [ЕД, 4.186] и [ЕД, 4.191].

Список литературы

[ЕД] А. В. Ефимов, Б. П. Демидович (ред.), Сборник задач по математике для втузов, в четырёх частях, часть 1, Линейная алгебра и основы математического анализа, 3-е изд., М.: Наука, 1993.