ЛА и ФНП, занятие 3

Квадратичные формы: кривые и поверхности 2-го порядка

Д. А. Степанов

Квадратичной формой от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется однородный многочлен степени 2 от переменных $x_1, \dots, x_n$, т. е. многочлен вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ — действительные числа. Коэффициент 2 перед второй суммой выделяется для удобства. Заметим, что квадратичная форма может, но не обязана содержать квадраты переменных. Скажем, $q(x_1, x_2) = x_1 x_2$ — квадратичная форма.

Матрицей квадратичной формы (1) называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где для всех i, j, $i < j$, полагают $a_{ji} = a_{ij}$. Таким образом, матрица квадратичной формы по определению симметрична.

Пример 1. Матрицей квадратичной формы

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 3x_2 x_3$$

служит

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть известно, что квадратичная форма $q(y_1, y_2, y_3)$ имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -4 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда координатным выражением этой квадратичной формы будет

$$q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 + 4y_1 y_2 - 10y_1 y_3 - 8y_2 y_3.$$

С помощью матричных операций квадратичную форму (1) можно короче записать как

$$q(x) = x^T A x,$$

где x обозначает *вектор-столбец переменных*, т. е. матрицу-столбец

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T.$$

Такое выражение называется *матричной записью* квадратичной формы.

Если V — n-мерное векторное пространство, $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в V и $x_1, \ldots, x_n$ трактуются как координаты вектора $\boldsymbol{x} \in V$ в базисе $\boldsymbol{e}$, то квадратичная форма (1) определяет функцию на векторном пространстве V, которую мы будем обозначать $q\colon V \to \mathbb{R}$ и называть *квадратичной формой на пространстве* V. Таким образом, чтобы задать квадратичную форму на векторном пространстве V, нужно фиксировать выражение вида (1) и базис, к которому относится это выражение. По умолчанию любую форму вида (1) можно считать функцией на пространстве $\mathbb{R}^n$ и заданной в каноническом базисе

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0),\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Если в квадратичной форме (1) сделать замену переменных в соответствии с *матрицей замены* $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, т. е. подставить

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \cdots + s_{1n}y_n, \\ x_2 = s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + \cdots + s_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = s_{n1}y_1 + s_{n2}y_2 + \cdots + s_{nn}y_n \end{cases}$$

или, в матричной записи,

$$x = Sy, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^T,$$

то квадратичная форма (1) преобразуется в квадратичную форму

$$p(y) = y^T B y,$$

где матрица

$$B = S^T A S. \tag{2}$$

Выражение (2) называется *формулой преобразования матрицы квадратичной формы* при замене $x = Sy$. Не путайте эту формулу с формулой $B = S^{-1}AS$ преобразования матрицы линейного оператора!

Квадратичная форма (1), у которой все $a_{ij} = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, т. е. в форме присутствуют только квадраты переменных с некоторыми коэффициентами, называется квадратичной формой *канонического вида*. По-другому можно сказать, что форма канонического вида — это форма, матрица которой диагональна. Две квадратичные формы

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x^T A x \text{ и } p(y_1, \ldots, y_n) = y^T B y$$

называются *эквивалентными*, если существует такая замена переменных $x = Sy$ с невырожденной матрицей S, что форма q переходит после этой замены в форму p, т. е. матрицы A, B и S связаны соотношением (2). Если матрица S невырождена, ортогональна и т. п., то и соответствующую замену $x = Sy$ будем называть невырожденной, ортогональной и т. п.

Теорема 1. *Любая квадратичная форма эквивалентна посредством ортогональной замены переменных квадратичной форме канонического вида.*

На теореме 1 основаны задачи на приведение уравнений кривых и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду.

Пример 3 ([ЕД, 4.226]). Приведём к каноническому виду и построим кривую с уравнением

$$\underbrace{9x^2 - 4xy + 6y^2}_{\text{кв. форма}} + 16x - 8y - 2 = 0. \tag{3}$$

Квадратичной формой в этом уравнении является

$$q(x, y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что симметричная матрица определяет самосопряжённый линейный оператор, а для самосопряжённого ЛО всегда существует ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица перехода S к этому базису будет ортогональной, следовательно

$$S^{-1}AS = S^TAS,$$

т. е. матрица квадратичной формы в данном случае преобразуется так же. как и матрица ЛО, и если мы сделаем матрицу ЛО диагональной, то диагональной станет и матрица квадратичной формы. Таким образом, для того, чтобы найти ортогональную замену переменных, приводящую квадратичную форму к каноническому виду, достаточно построить ортонормированный базис из собственных векторов соответствующего самосопряжённого ЛО. Как это делается, было разобрано в занятии 2. Заметим попутно, что после приведения к каноническому виду таким методом коэффициентами при квадратах будут собственные числа матрицы A.

Итак, в первую очередь найдём собственные числа матрицы A. Характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50.$$

Из характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

находим собственные числа $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$.

Теперь найдём собственные векторы. Собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = 5$, находится из однородной СЛАУ с матрицей

$$A - 5E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае без труда подбирается решение

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для $\lambda_2 = 10$ получаем:

$$A - 10E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ как собственные векторы самосопряжённого ЛО, отвечающие различным собственным числам, автоматически ортогональны. Чтобы получить из них ортонормированный базис на плоскости, необходимо их нормировать. Положим

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица замены S — это матрица перехода от исходного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ (по умолчанию предполагается, что кривая задана в прямоугольной декартовой системе координат) к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$. Итак,

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Чтобы старая и новая системы координат были одинаково ориентированы, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы S был больше нуля. В нашем случае это условие выполнено. В общем случае этого всегда можно добиться, заменив один из векторов $\boldsymbol{f}_i$ на $-\boldsymbol{f}_i$.

Обозначим новые переменные x_1 и y_1 и выполним в уравнении (3) подстановку

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1. \end{cases} \tag{4}$$

В соответствии с нашими предварительными замечаниями без вычислений ясно, что квадратичная форма преобразуется к каноническому виду

$$5x_1^2 + 10y_1^2.$$

Найдём новую линейную часть:

$$16\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) - 8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right) = -\frac{40}{\sqrt{5}}y_1.$$

Итак, в новых координатах уравнение кривой запишется как

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}y_1 - 2 = 0.$$

Дальнейшее преобразование сводится к параллельному переносу системы координат и изучалось в курсе аналитической геометрии. А именно, выделим полный квадрат по y_1:

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - \tfrac{40}{\sqrt{5}}y_1 - 2 = 5x_1^2 + 10\left(y_1^2 - 2\cdot\tfrac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\right) - 2 =$$
$$= 5x_1^2 + 10\left(y_1 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 10.$$

Затем сделаем вторую замену

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} = y_2. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение кривой преобразуется к виду

$$5x_2^2 + 10y_2^2 = 10, \text{ или}$$
$$\frac{x_2^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{1^2} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{2}$ и 1. Найдём также связь канонических координат x_2, y_2 с исходными x, y. Для этого скомбинируем замены (4) и (5). Получим

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{4}{5}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{5}. \end{cases} \tag{6}$$

Наконец, перейдём к построению кривой. Для начала выясним, как каноническая система координат расположена по отношению к исходной. Во-первых, начало канонической системы координат O_2 имеет координаты $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ в системе x_2, y_2. Из (6) находим его координаты в исходной системе: $x = -4/5$, $y = 2/5$. Во-вторых, так как в процессе преобразований мы делали всего один поворот в соответствии с матрицей S, *оси канонической системы координат будут направлены по собственным векторам* $\boldsymbol{f}_1$ *и* $\boldsymbol{f}_2$. Изобразим положение систем координат на чертеже (рис. 1).

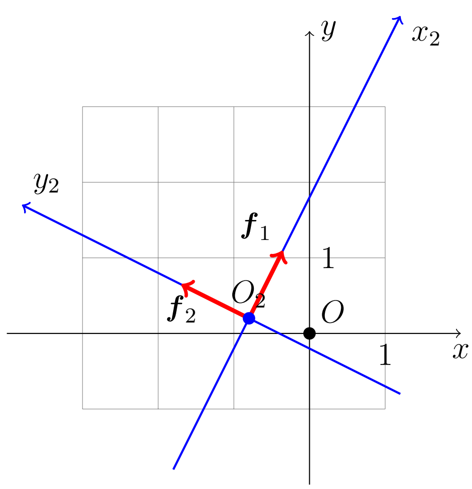

Рис. 1: Положение канонической с. к. относительно исходной

Теперь остаётся только нарисовать эллипс с полуосями $\sqrt{2}$ и 1 *в канонической системе координат* (O_2, x_2, y_2) (рис. 2).

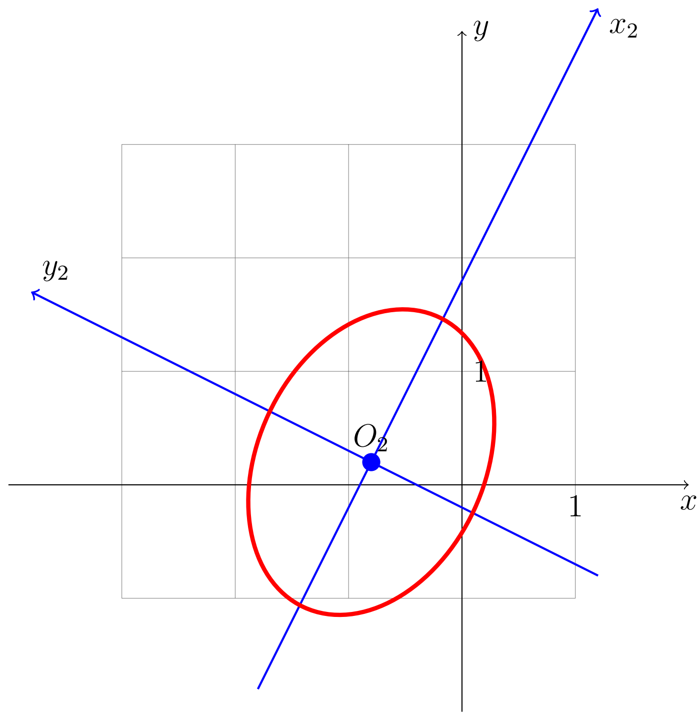

Рис. 2: Эллипс из [ЕД, 4.226]

Пример 4 ([ЕД, 4.227]). Приведём к каноническому виду и построим кривую

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0. \tag{7}$$

Матрицей квадратичной части $x^2 - 2xy + y^2$ уравнения (7) служит

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные числа и собственные векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2;$$

$$\lambda_1 = 0\colon \quad A - \lambda_1 E = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2\colon \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь строим нормированные собственные векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

и матрицу замены

$$S = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $|S| = 1 > 0$.

Выполняя в уравнении (7) подстановку

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1,\\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \end{cases} \tag{8}$$

приходим к уравнению

$$2y_1^2 - 10\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 6\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) + 25 = 0,$$
$$2y_1^2 - \tfrac{16}{\sqrt{2}}x_1 + \tfrac{4}{\sqrt{2}}y_1 + 25 = 0.$$

Выделим полный квадрат по переменной y_1 и вынесем за скобки коэффициент при x_1:

$$2\left(y_1^2 + 2\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{16}{\sqrt{2}} + 25 = 0,$$
$$2\left(y_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \tfrac{16}{\sqrt{2}}\left(x_1 - \tfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Теперь сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} = x_2,\\ y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = y_2 \end{cases} \tag{9}$$

и получим каноническое уравнение параболы

$$y_2^2 = 2\cdot 2\sqrt{2}x_2$$

с фокальным параметром $p = 2\sqrt{2}$.

Чтобы связать исходные координаты x, y с каноническими x_2, y_2, скомбинируем замены (8) и (9). Получим:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 2,\\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 1. \end{cases}$$

Отсюда находим положение начала канонической системы координат относительно исходной $O_2(2,1)$. Оси канонической системы координат, как и в примере 3, направлены по собственным векторам: ось x_2 по $\boldsymbol{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$, ось y_2 — по $\boldsymbol{f}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$. Кривую строим согласно процедуре, изложенной в примере 3: сначала показываем положение канонической системы координат относительно исходной, а затем изображаем параболу в канонической системе (рис. 3).

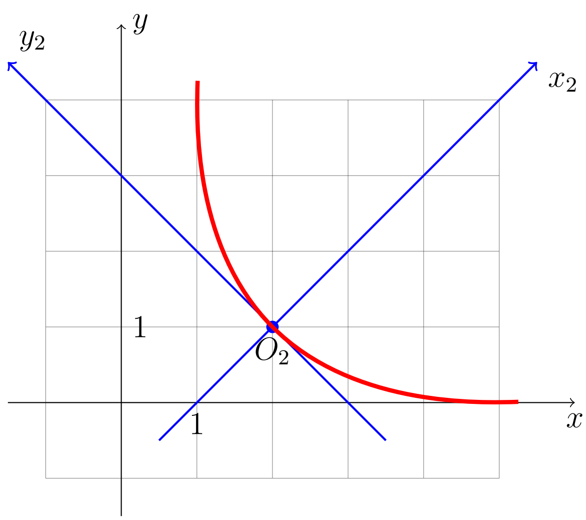

Рис. 3: Парабола из [ЕД, 4.227]

Для самостоятельного решения предлагаются задачи [ЕД, 4.228], [ЕД, 4.230].

Следует помнить, что кривая второго порядка может принадлежать к одному из вырожденных типов. Тем не менее, схема, изложенная в примере 3, позволяет исследовать и такие случаи.

Пример 5. Выясним тип и построим кривую с уравнением

$$6x^2 - 5xy - 6y^2 - 17x - 7y + 5 = 0. \tag{10}$$

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5/2 \\ -5/2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -5/2 \\ -5/2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{169}{4} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{13}{2},\ \lambda_2 = \frac{13}{2};$$

$$\lambda_1 = -\frac{13}{2}: \quad A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 25/2 & -5/2 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = \frac{13}{2}: \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ -5/2 & -25/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормированные собственные векторы и матрица замены:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix},\ |S| > 0.$$

Первая замена переменных:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{26}}x_1 - \frac{5}{\sqrt{26}}y_1, \\ y = \frac{5}{\sqrt{26}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}y_1. \end{cases} \tag{11}$$

Чтобы вычислить, как преобразуется линейная часть уравнения (10), вместо прямой подстановки можно пользоваться следующим методом. Обозначим через b матрицу-строку коэффициентов линейной части (10):

$$b = (-17, -7).$$

Тогда строкой коэффициентов линейной части уравнения после выполнения подстановки (11) будет $b' = bS$. В нашем случае имеем:

$$b' = (-17, -7) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (-52/\sqrt{26}, 78/\sqrt{26}).$$

Следовательно, уравнение (10) после подстановки (11) преобразуется в уравнение

$$-\frac{13}{2}x_1^2 + \frac{13}{2}y_1^2 - \frac{52}{\sqrt{26}}x_1 + \frac{78}{\sqrt{13}}y_1 + 5 = 0.$$

Выделим полные квадраты по x_1 и y_1:

$$-\tfrac{13}{2}\left(x_1^2 + 2\cdot\tfrac{4}{\sqrt{26}}x_1 + \tfrac{8}{13} - \tfrac{8}{13}\right) + \tfrac{13}{2}\left(y_1^2 + 2\cdot\tfrac{6}{\sqrt{26}}y_1 + \tfrac{18}{13} - \tfrac{18}{13}\right) + 5 = 0,$$

$$-\tfrac{13}{2}\left(x_1 + \tfrac{4}{\sqrt{26}}\right)^2 + \tfrac{13}{2}\left(y_1 + \tfrac{6}{\sqrt{26}}\right)^2 = 0.$$

После замены
$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{\sqrt{26}} = x_2, \\ y_1 + \frac{6}{\sqrt{26}} = y_2 \end{cases} \tag{12}$$
и деления на $-13/2$ приходим к уравнению
$$x_2^2 - y_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 - y_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{array} \right.$$
пары пересекающихся прямых. Комбинируя замены (11) и (12), найдём связь канонической и исходной системы координат:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{26}} x_2 - \frac{5}{\sqrt{26}} y_2 + 1, \\ y = \frac{5}{\sqrt{26}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{26}} y_2 - 1. \end{cases}$$
Отсюда находим координаты начала канонической системы координат $O_2(1, -1)$ в исходной системе. Остаётся изобразить каноническую систему координат и провести в ней наши прямые (рис. 4).

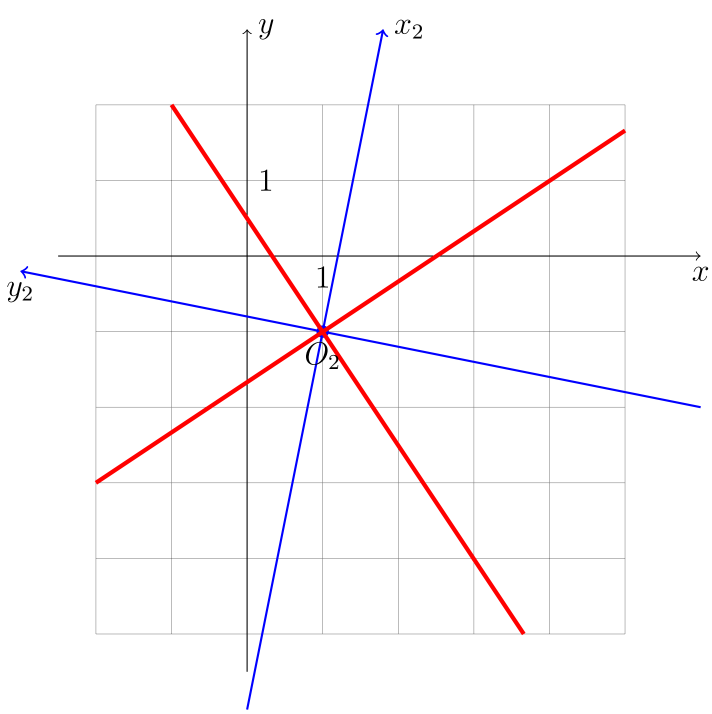

Рис. 4: Пара пересекающихся прямых из примера 5

Для самостоятельного решения предлагается задача [ЕД, 4.229].

Приведение к каноническому виду уравнений поверхностей 2-го порядка осуществляется, в целом, по той же схеме, но требует больше места и времени.

Пример 6 ([ЕД, 4.234]). Приведём к каноническому виду и построим *в канонической системе координат* поверхность

$$\underbrace{2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx}_{\text{кв. форма}}+60x-12y+12z-90=0. \tag{13}$$

Матрица квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -8\\ 2 & -7 & 10\\ -8 & 10 & -4\end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -8\\ 2 & -7-\lambda & 10\\ -8 & 10 & -4-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)+2(1)+2(2)\end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -8\\ 2 & -7-\lambda & 10\\ -2\lambda & -2\lambda & -\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}(3)/(-\lambda)\\(2)\\(1)\end{matrix}=\lambda\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -7-\lambda & 10\\ 2-\lambda & 2 & -8\end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)-10(1)\\(3)+8(1)\end{matrix}=$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ -18 & -27-\lambda & 0\\ 18-\lambda & 18 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)+2(3)\\(3)\end{matrix}=\lambda\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 18-2\lambda & 9-\lambda & 0\\ 18-\lambda & 18 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda(9-\lambda)\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 18-\lambda & 18 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)-18(2)\end{matrix}=\lambda(9-\lambda)\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -18-\lambda & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda(9-\lambda)(\lambda+18)\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\lambda(9-\lambda)(\lambda+18).$$

Собственные числа: $\lambda_1=-18$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=9$.

Найдём собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = -18$. Для этого решим однородную СЛАУ с матрицей $A + 18E$:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (2) \\ (1)/2 \\ (3)/2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 10 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (2) - 5(1) \\ (3) + 2(1) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & -54 & -54 \\ 0 & 27 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (2)/(-54) \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1) - 11(2) \\ (2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда легко подбирается решение

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для λ_2 и λ_3 аналогично можно найти

$$\lambda_2 = 0\colon \quad A - \lambda_2 E = A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 9\colon \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что найденные собственные векторы ортогональны, что подтверждает, что мы нашли их правильно. Нормируя собственные векторы, составим матрицу матрицу первой замены

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и запишем формулы соответствующей подстановки:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}z_1, \\ y = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}z_1, \\ z = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1. \end{cases} \tag{14}$$

После подстановки квадратичная форма, согласно общей теории, преобразуется в форму

$$-18x_1^2 + 9z_1^2,$$

а коэффициенты новой линейной части легче вычислить матричным способом:

$$bS = (60, -12, 12) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (36, 36, -36).$$

Следовательно, уравнение (13) преобразуется в уравнение

$$-18x_1^2 + 9z_1^2 + 36x_1 + 36y_1 - 36z_1 - 90 = 0.$$

Выделим полные квадраты по переменным x_1 и z_1, а также вынесем коэффициент при переменной y_1:

$$-18(x_1^2 - 2x_1 + 1 - 1) + 9(z_1^2 - 4z_1 + 4 - 4) + 36y_1 - 90 = 0,$$

$$-18(x_1 - 1)^2 + 9(z_1 - 2)^2 + 36y_1 - 108 = 0,$$

$$2(x_1 - 1)^2 - (z_1 - 2)^2 = 4(y_1 - 3).$$

Сделаем вторую замену

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x_2, \\ y_1 - 2 = y_2, \\ z_1 - 3 = z_3, \end{cases} \tag{15}$$

и окончательно преобразуем уравнение в каноническое (с точностью до перестановки переменных) уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x_2^2}{1^2} - \frac{z_2^2}{(\sqrt{2})^2} = 2y_2.$$

Связь между канонической и исходной системами координат может быть найдена из комбинации подстановок (14) и (15):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}z_2 - \frac{1}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{5}{3}, \\ z = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}z_2 + \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Мы, однако, не будем её использовать, а только схематически изобразим гиперболический параболоид в канонической системе координат, уделив внимание только его расположению относительно координатных осей, см. рис. 5.

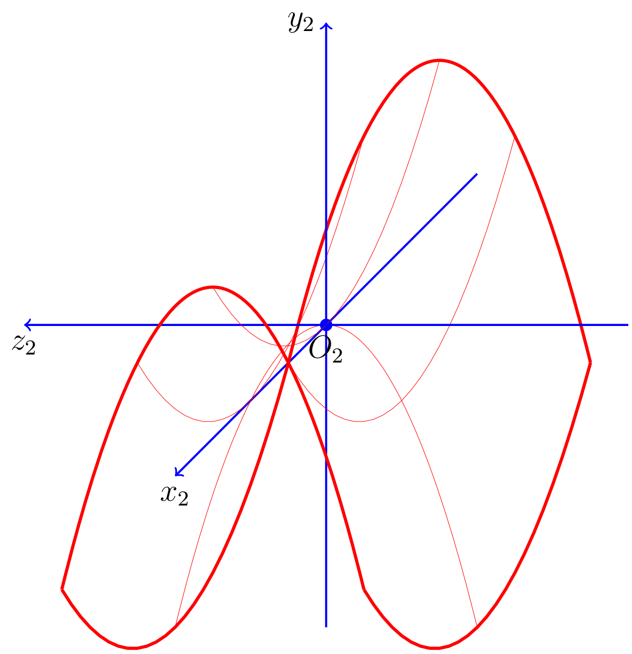

Рис. 5: Гиперболический параболоид

Для самостоятельного решения рекомендуются задачи [ЕД, 4.233], [ЕД, 4.235].

Список литературы

[ЕД] А. В. Ефимов, Б. П. Демидович (ред.), Сборник задач по математике для втузов, в четырёх частях, часть 1, Линейная алгебра и основы математического анализа, 3-е изд., М.: Наука, 1993.