ЛА и ФНП, занятие 4

Квадратичные формы: метод Лагранжа, критерий Сильвестра

Д. А. Степанов

Напомним, что *квадратичной формой* от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется однородный многочлен степени 2 от переменных $x_1, \dots, x_n$, т. е. многочлен вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ — действительные числа.

Матрицей квадратичной формы (1) называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где для всех i, j, $i < j$, полагают $a_{ji} = a_{ij}$.

Выражение (1) называется *координатной*, а

$$q(x) = x^T A x,$$

где x обозначает вектор-столбец переменных $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, — *матричной записью* квадратичной формы.

Если в квадратичной форме (1) сделать замену переменных в соответствии с *матрицей замены* $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, т. е. подставить

$$\begin{cases} x_1 = s_{11} y_1 + s_{12} y_2 + \dots + s_{1n} y_n, \\ x_2 = s_{21} y_1 + s_{22} y_2 + \dots + s_{2n} y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = s_{n1} y_1 + s_{n2} y_2 + \dots + s_{nn} y_n \end{cases}$$

или, в матричной записи,

$$x = Sy, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad y = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

то квадратичная форма (1) преобразуется в квадратичную форму

$$p(y) = y^T By,$$

где матрица B находится согласно *формуле преобразования матрицы квадратичной формы*

$$B = S^T AS. \tag{2}$$

Напомним ещё, что если переменные $x_1, \dots, x_n$ понимать как координаты вектора $\boldsymbol{x}$ векторного пространства V в некотором базисе $\boldsymbol{e}$, то квадратичная форма (1) определяет функцию $q\colon V \to \mathbb{R}$ на V. При выборе нового базиса $\boldsymbol{f}$ в пространстве V, связанного со старым матрицей перехода $S = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$, матричное выражение *той же* функции $q\colon V \to \mathbb{R}$ в новом базисе вычисляется по формуле (2).

Пример 1. Пусть квадратичная форма $Q(x_1, x_2)$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ некоторого 2-мерного векторного пространства V имеет координатную запись

$$Q(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2.$$

Найдём координатную запись $Q(y_1, y_2)$ этой формы в базисе $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ пространства V.

Во-первых, запишем матрицу данной квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Запишем, во-вторых, матрицу перехода $S = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(не забывайте, что координаты векторов $\boldsymbol{f}_j$ в базисе $\boldsymbol{e}$ записываются в *столбцы* матрицы перехода $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$). Теперь остаётся воспользоваться формулой (2)

$$B = S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и записать квадратичную форму от переменных y_1, y_2 с матрицей B:

$$Q(y_1, y_2) = -y_1^2 - y_2^2.$$

Случайным образом оказалось, что мы заодно привели форму Q к каноническому виду.

Для самостоятельного решения предлагается следующая задача.

Задача 1. Пусть квадратичная форма $Q(x_1, x_2)$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ некоторого 2-мерного векторного пространства V имеет координатную запись

$$Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Найдите выражение $Q(y_1, y_2)$ этой формы в базисе $\boldsymbol{f}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = -5\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$ пространства V.

Метод Лагранжа — это метод приведения квадратичной формы к каноническому виду (сумме квадратов) без использования собственных чисел и собственных векторов матрицы квадратичной формы. Основная идея метода Лагранжа — выделение полных квадратов. Подробно и в общем виде метод Лагранже разбирается в [КК, п. 8.3], здесь мы рассмотрим лишь пару примеров. Следует заметить, что метод Лагранжа как правило приводит к преобразованию квадратичной формы, которое не является ортогональным. Поэтому его нельзя использовать в задачах *метрической* классификации кривых и поверхностей второго порядка, например, для нахождения полуосей эллипса, заданного в неканонической системе координат.

Квадратичная форма, в координатной записи которой присутствуют только квадраты переменных с коэффициентами ± 1, называется квадратичной формой *нормального вида.*

Пример 2 ([ЕД, 4.210]). Найдём нормальный вид и невырожденную линейную замену переменных, приводящую к этому виду, для квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Сначала выделим полный квадрат по переменной x_1:

$$\begin{gathered} x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = \bigl(x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) \pm (x_2 - 2x_3)^2\bigr) + \\ +5x_2^2 - 4x_3^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3 \ominus \end{gathered}$$

Сделаем невырожденную замену

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \tag{3}$$

Получим:

$$⊜\, y_1^2 + 4y_2^2 - 8y_3^2 + 4y_2y_3 \,⊜$$

Заметим, что пременная y_1 “отщепилась” от квадратичной формы. Выделим теперь полный квадрат по переменной y_2:

$$⊜\, y_1^2 + 4\left(y_2^2 + 2y_2 \cdot \frac{1}{2}y_3 \pm \frac{1}{4}y_3^2\right) - 8y_3^2 = y_1^2 + 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - 9y_3^2 \,⊜$$

Снова заменим выражение в скобках:

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ z_3 = y_3. \end{cases} \tag{4}$$

Получим:

$$⊜\, z_1^2 + 4z_2^2 - 9z_3^2 \,⊜$$

Это уже квадратичная форма канонического вида. Чтобы получить нормальный вид, нужно “загнать” коэффициенты в квадраты переменных. Сделать это можно с помощью замены

$$\begin{cases} u_1 = z_1, \\ u_2 = 2z_2, \\ u_3 = 3z_3. \end{cases} \tag{5}$$

Окончательно получим

$$⊜\, u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

Чтобы получить невырожденную замену, преобразующую исходную форму Q сразу в нормальный вид, можно скомбинировать замены, *обратные* к заменам (3), (4) и (5). Другой способ состоит в перемножении матриц замен (3), (4), (5) *в обратном порядке* и последующем обращении матрицы. Матрицы замен суть следующие:

$$(3)\colon \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица легко находится методом элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (1) \\ (2)/2 \\ (3)/3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \begin{matrix} (1)+2(3) \\ (2)-\frac{1}{2}(3) \\ (3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \begin{matrix} (1)-(2) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right).$$

Таким образом, итоговая замена

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{5}{6}u_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{6}u_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}u_3. \end{cases}$$

Пример 3 ([ЕД, 4.211]). Найдём нормальный вид и невырожденную линейную замену переменных, приводящую к этому виду, для квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Квадратичная форма Q не содержит ни одного квадрата переменной, поэтому выделение полных квадратов сразу невозможно. Заметим, что такая ситуация может возникнуть и в ходе вычислений по методу Лагранжа. В этом случае необходимо произвести дополнительную замену переменных, которая приведёт к появлению в квадратичной форме квадратов. А именно, сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases} \tag{6}$$

Получим:

$$(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 + y_2)y_3 + y_3(y_1 - y_2) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 =$$

Далее можно действовать тем же методом, что и в примере 2.

$$\circleddash\ (y_1^2 + 2y_1y_3 \pm y_3^2) - y_2^2 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2\ \circleddash$$

Замена

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3. \end{cases}$$

Для удобства запишем сразу и обратное преобразование:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3. \end{cases} \tag{7}$$

После замены получим

$$\circleddash\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Это уже нормальный вид квадратичной формы.

Чтобы найти замену переменных, которая сразу приводит форму $Q(x_1, x_2, x_3)$ к нормальному виду, скомбинируем замены (6) и (7). Имеем

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

Для самостоятельного решения рекомендуется задача [ЕД, 2.212].

Квадратичная форма (1) называется

- *положительно определённой*, если при любых значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю, квадратичная форма принимает положительное значение; будем коротко писать в этом случае $q > 0$;

- *неотрицательно определённой*, если при любых значениях переменных квадратичная форма принимает неотрицательное значение; будем обозначать это $q \geqslant 0$;

- *отрицательно определённой*, если при любых значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю, квадратичная форма принимает отрицательное значение; обозначение $q < 0$;

- *неположительно определённой*, если при любых значениях переменных квадратичная форма принимает неотрицательное значение; обозначение $q \leqslant 0$;

- *строго неопределённой*, если существуют такие наборы

$$x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)^T \in \mathbb{R}^n \text{ и } y^\circ = (y_1^\circ, \dots, y_n^\circ)^T \in \mathbb{R}^n$$

  значений переменных $x_1, \dots, x_n$, что $q(x^\circ) > 0$ и $q(y^\circ) < 0$; обозначение $q <> 0$.

Кроме этого, допускается называть *неопределённой* или формой *общего вида* любую форму, которая не является ни положительно, ни отрицательно определённой.

Проще всего выяснить тип определённости квадратичной формы, если она приведена к каноническому виду. А именно, пусть

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Тогда

- $q > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$;

- $q \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_n \geqslant 0$;

- $q < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$;

- $q \leqslant 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \leqslant 0, \dots, \lambda_n \leqslant 0$;

- $q <> 0 \Leftrightarrow$ существуют такие $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что $\lambda_i < 0$ и $\lambda_j > 0$.

Например, квадратичная форма из примера 1 отрицательно определена, в то время как формы из примеров 2 и 3 (строго) неопределённые.

Без приведения к каноническому виду тип квадратичной формы можно узнать с помощью критерия Сильвестра. Для его формулировки необходимо следующее понятие. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — квадратная матрица. *i-м главным минором* матрицы A называется минор

$$\Delta_i = M_{12\cdots i}^{12\cdots i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 1. *Пусть квадратичная форма q имеет матрицу A. Тогда а) $q > 0$ тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A положительны:*

$$\Delta_i > 0,\ i = 1, \ldots, n;$$

б) $q < 0$ тогда и только тогда, когда знаки главных миноров матрицы A чередуются, начиная с минуса:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0;$$

в) если все главные миноры матрицы A отличны от нуля, но не выполняются требования ни п. а), ни п. б), то $q <> 0$.

Пример 4 ([ЕД, 4.218]). Выясним тип определённости квадратичной формы

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2.$$

Матрица этой формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = |A| = 26 - 15 = 1 > 0.$$

Следовательно, по критерию Сильвестра 1 форма q положительно определена: $q > 0$.

Пример 5 ([ЕД, 4.221]). Та же задача для формы

$$q(x_1, x_2, x_3) = 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2.$$

Матрица этой формы

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры

$$\Delta_1 = -11 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 30 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -297 + 108 + 108 = -83 < 0.$$

По теореме 1 заключаем, что форма q отрицательно определена.

Пример 6 ([ЕД, 4.223]). Та же задача для формы

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4.$$

Матрица этой формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Уже первый главный минор $\Delta_1 = 0$, поэтому эта форма не может быть ни положительно, ни отрицательно определённой. Значит, это форма общего вида.

Для самостоятельного решения рекомендуются задачи [ЕД, 4.219, 4.220, 4.224]

Список литературы

[ЕД] А. В. Ефимов, Б. П. Демидович (ред.), Сборник задач по математике для втузов, в четырёх частях, часть 1, Линейная алгебра и основы математического анализа, 3-е изд., М.: Наука, 1993.

[КК] А. Н. Канатников, А. П. Крищенко, Линейная алгебра, 3-е изд., М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.