# МЛ и ТА (ИУ7), занятие 1
## Минимизация булевых функций

Д. А. Степанов

*Булева алгебра* $\mathbb{B}$ как множество представляет собой двухэлементное множество $\{0, 1\}$. *Булев куб* $\mathbb{B}^n$ размерности $n$ является $n$-ой декартовой степенью множества $\mathbb{B}$, т. е. множеством всех наборов длины $n$ из нулей и единиц:

$$\mathbb{B}^n = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \,|\, \alpha_i = 0, 1,\ i = 1, \dots, n\}.$$

*Булева функция* от $n$ переменных — это отображение $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ из булева куба $\mathbb{B}^n$ в множество $\mathbb{B}$. *Элементарной конъюнкцией* называется формула вида

$$K = \tilde{x}_{i_1}\tilde{x}_{i_2}\cdots\tilde{x}_{i_k},$$

где $\tilde{x}_i = x_i$ или $\bar{x}_i$, под $x_i x_j$ понимается конъюнкция (логическое "и") $x_i$ и $x_j$, а под $\bar{x}_i$ — отрицание $x_i$, $i, j = 1, \dots, n$, $1 \leqslant i_1, i_2, \dots, i_k \leqslant n$. Аналогично, *элементарной дизъюнкцией* называется формула вида

$$D = \tilde{x}_{i_1} \vee \tilde{x}_{i_2} \vee \cdots \vee \tilde{x}_{i_k},$$

где $\vee$ обозначает дизъюнкцию (логическое "или"). *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций; *конъюнктивной нормально формой* (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций. ДНФ, представляющая булеву функцию от $n$ переменных $x_1, \dots, x_n$, называется *совершенной* (СДНФ), если все её элементарные включают все переменные $x_1, \dots, x_n$ и ровно по одному разу. Например, ДНФ

$$x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \text{ и } \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_1$$

от трёх переменных не совершенны, а ДНФ

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \tag{1}$$

совершенна.

**Теорема 1** ([БТ, Гл. 6, Теорема 6.2])**.** *Любая булева функция, отличная от константы* $0$*, представима в виде СДНФ.*

ДНФ, представляющая данную булеву функцию $f$ и которую даёт теорема 1, обычно весьма громоздка. В связи с этим возникает задача поиска среди всех ДНФ, представляющих данную булеву функцию $f$, в некотором смысле простейшей — *задача минимизации ДНФ*. ДНФ называется *минимальной*, если среди всех ДНФ, представляющих данную булеву функцию, она имеет наименьшее число *литералов* — букв $x_i$ или $\bar{x}_i$, причём каждый литерал считается столько раз, сколько он входит в ДНФ. Например, СДНФ (1) имеет 9 литералов. ДНФ называется *кратчайшей*, если среди всех ДНФ, представляющих данную булеву функцию, она имеет наименьшее число элементарных конъюнкций. Например, СДНФ (1) содержит 3 элементарные конъюнкции. Заметим, что минимальная или кратчайшая ДНФ, представляющая данную булеву функцию, не обязательно единственна.

Алгоритм построения минимальных и кратчайших ДНФ, использующий т. н. карты Карно, подробно изложен в [БТ, п. 6.6]. Ниже мы разберём примеры, которые можно использовать как образец решения задачи на минимизацию ДНФ из второго стендового домашнего задания.

*Пример* 1. Найдём минимальные и кратчайшие ДНФ, которые представляют булеву функцию четырёх переменных, заданную вектором значений

$$f = (1110\ 0101\ 1010\ 0111).$$

Подобное задание булевой функции эквивалентно заданию следующей таблицей значений.

| $N$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f$ | $N$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Карта Карно представляет собой не что иное как особую форму таблицы значений булевой функции. Подробнее о способе построения карты Карно, её “закрученности” и т. д. см. в [БТ]. Главное — помнить о том, что имеется взаимно однозначное соответствие между, во-первых, прямоугольниками карты Карно площади $2^k$, $k \geqslant 0$, и гранями размерности

| $x_1x_2 \backslash x_3x_4$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

Рис. 1: Карта Карно функции из примера 1

$k$ булева куба $\mathbb{B}^n$ и, во-вторых, между гранями размерности $k$ булева куба и элементарными конъюнкциями вида $\tilde{x}_{i_1}\tilde{x}_{i_2}\cdots\tilde{x}_{i_{n-k}}$; второе соответствие сопоставляет элементарной конъюнкции её область истинности. Карта Карно нашей булевой функции $f$ изображена на рис. 1.

Заметим, что на карте Карно обводятся не все прямоугольники площади $2^k$, заполненные единицами, а только максимальные. Каждому такому прямоугольнику соответствует элементарная конъюнкция, называемая *простой импликантой* функции $f$. Выпишем отдельно все простые импликанты, указывая также их символическое обозначение.

1. $\times 1 \times 1$: $K_1 = x_2x_4$

| | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

2. $\times 0 \times 0$: $K_2 = \bar{x}_2\bar{x}_4$

| | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

3. 000×: $K_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

| | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

4. 0×01: $K_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3x_4$

| | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

5. 111×: $K_5 = x_1x_2x_3$

| | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

6. 1×10: $K_6 = x_1x_3\bar{x}_4$

| | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

В домашнем задании не обязательно изображать каждую простую импликанту на отдельном рисунке. Можно подписать их, как показано в [БТ].

Тот факт, что простые импликанты покрывают всё множество истинности функции $f$, имеет следствием такое представление:

$$f = \bigvee_{i=1}^{6} K_i = x_2x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4.$$

Это т. н. *сокращённая ДНФ*, представляющая функцию $f$. Можно заметить, что для того, чтобы покрыть все единицы карты Карно 1, не обязательно использовать все простые импликанты. Например, единицу в клетке 0001 можно покрыть любой из импликант $K_3$ или $K_4$. Это означает, что возможно дальнейшее упрощение ДНФ, представляющей булеву функцию $f$.

Заметим, что единицы 0111, 1100, 0010, 1010 покрываются только одной простой импликантой каждая: первые две импликантой $K_1$, вторые две — импликантой $K_2$. Поэтому $K_1$ и $K_2$ никаким образом нельзя удалить из сокращённой ДНФ. Говорят, что $K_1$ и $K_2$ образуют *ядро* булевой функции $f$. Остаётся две единицы 0001 и 1110, не покрытые ядром. Чтобы получить ДНФ, представляющую функцию $f$, нужно взять ядро и каким-либо способом покрыть две оставшиеся единицы. В данном случае очевидно, что это можно сделать четырьмя способами: импликантами $K_3$ и $K_5$, импликантами $K_3$ и $K_6$, импликантами $K_4$ и $K_5$, или импликантами $K_4$ И $K_6$. Это даёт 4 ДНФ

$$\underbrace{K_1 \vee K_2}_{\text{ядро}} \vee \begin{cases} K_3 \vee K_5 \\ K_3 \vee K_6 \\ K_4 \vee K_5 \\ k_4 \vee K_6 \end{cases} = x_2x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \begin{cases} \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3, \\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4, \\ \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3, \\ \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4, \end{cases}$$

называемых *тупиковыми* для данной булевой функции. Более систематический способ перечисления тупиковых ДНФ даёт *функция Патрика*. Это КНФ, соответствующая следующему словесному описанию способов покрытия единиц, не покрытых ядром: “единицу 0001 можно покрыть $K_3$ или $K_4$, а единицу 1110 — $K_5$ или $K_6$”. Имеем:

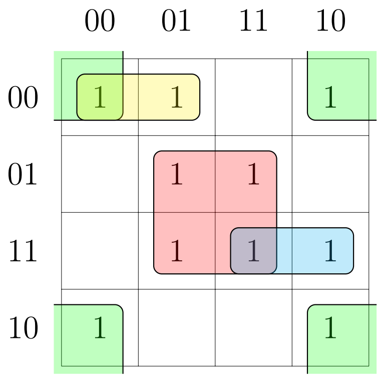
$$(K_3 \vee K_4)(K_5 \vee K_6). \tag{2}$$

Раскроем скобки в выражении (2), пользуясь тождествами булевой алгебры:

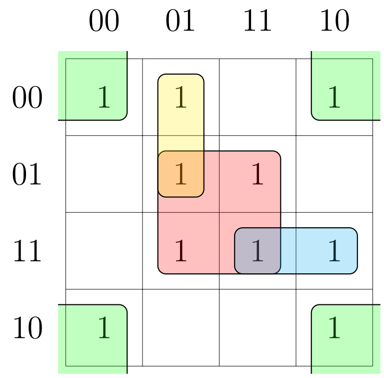
$$(K_3 \vee K_4)(K_5 \vee K_6) = K_3K_5 \vee K_3K_6 \vee K_4K_5 \vee K_4K_6.$$

Каждая элементарная конъюнкция полученной ДНФ соответствует одной из тупиковых ДНФ функции $f$. Минимальные и кратчайшие ДНФ выбираются из тупиковых простым перебором. В нашем случае все четыре тупиковые ДНФ будут одновременно и минимальными и кратчайшими. Изобразим на картах Карно покрытия области истинности булевой функции $f$, соответствующие минимальным ДНФ.

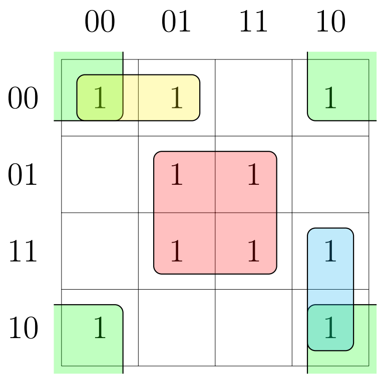
1.



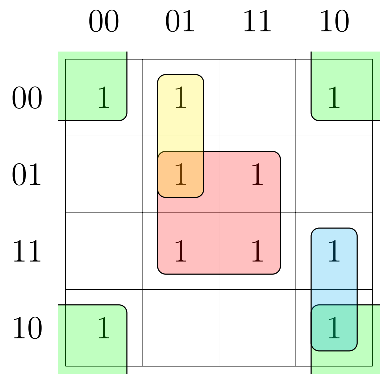

2.




3.




4.




*Пример* 2. Найдём минимальные и кратчайшие ДНФ, которые представляют булеву функцию четырёх переменных, заданную списком *конституент единицы*

$$f = \{1, 2, 5, 7, 9, 10, 14, 15\}. \tag{3}$$

Конституента единицы — это вершина булева куба, на которой данная функция принимает значение 1. Список (3) соответствует таблице значений

| $N$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f$ | $N$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

На рисунке 2 изображена карта Карно булевой функции $f$ с обведёнными простыми импликантами.

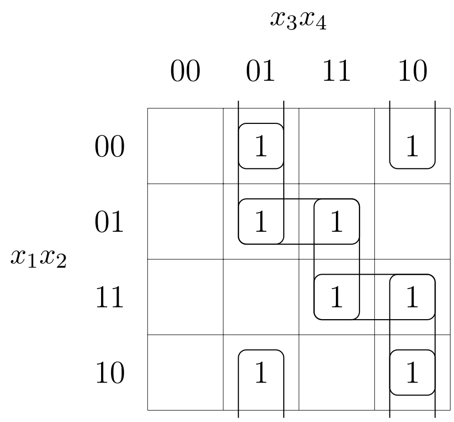
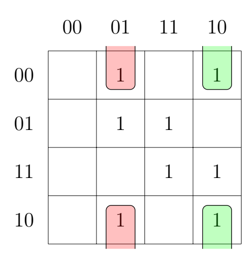



Рис. 2: Карта Карно функции из примера 2

Простые импликанты:

$$\begin{gathered}\times001\colon K_1 = \bar{x}_2\bar{x}_3x_4, \quad 0\times01\colon K_2 = \bar{x}_1\bar{x}_3x_4, \quad 01\times1\colon K_3 = \bar{x}_1x_2x_4, \\ \times111\colon K_4 = x_2x_3x_4, \quad 111\times\colon K_5 = x_1x_2x_3, \quad 1\times10\colon K_6 = x_1x_3\bar{x}_4, \\ \times010\colon K_7 = \bar{x}_2x_3\bar{x}_4.\end{gathered}$$

Ядро образуют импликанты $K_1$ и $K_7$:



Не покрыты ядром 4 единицы: 0101, 0111, 1111, 1110. Получаем следующую функцию Патрика:

$$(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6).$$

После раскрытия скобок функция Патрика упрощается с помощью двух тождеств

$$K^2 = K, \quad K \vee KL = K,$$

второе из которых называется *тождеством поглощения*. Имеем:

$$\begin{gathered}(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6) = \\ = (K_2K_3 \vee K_2K_4 \vee K_3K_3 \vee K_3K_4)(K_4K_5 \vee K_4K_6 \vee K_5K_5 \vee K_5K_6) = \\ = (K_3 \vee K_3K_2 \vee K_3K_4 \vee K_2K_4)(K_5 \vee K_5K_4 \vee K_5K_6 \vee K_4K_6) = \\ = (K_3 \vee K_2K_4)(K_5 \vee K_4K_6) = K_3K_5 \vee K_2K_4K_5 \vee K_2K_4K_6 \vee K_3K_4K_6.\end{gathered}$$

Отсюда получаем 4 тупиковые ДНФ:

$$\underbrace{K_1 \vee K_7}_{\text{ядро}} \vee \begin{cases} K_3 \vee K_5 \\ K_2 \vee K_4 \vee K_5 \\ K_2 \vee K_4 \vee K_6 \\ K_3 \vee K_4 \vee K_6 \end{cases} =$$

$$= \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \begin{cases} \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3, \\ \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3, \\ \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4, \\ \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4, \end{cases}$$

минимальной и кратчайшей из которых является только первая. Ей соответствует покрытие

| | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | | 1 | 1 |
| 10 | | 1 | | 1 |

.

Задача для самостоятельного решения [БТ, стр. 457, 6.11].

# Список литературы

[БТ] А. И. Белоусов, С. Б. Ткачёв, Дискретная математика, 3-е изд., М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.