МЛ и ТА (ИУ7), занятие 3
Формальный вывод в исчислении высказываний

Д. А. Степанов

При построении исчисления высказываний как формальной теории возможен различный выбор системы аксиом. Мы, в соответствии с [Б, Лекция 2], примем следующие аксиомы.

А1. $A \to (B \to A)$;

А2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

А3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$.

Единственным правилом вывода в этой формальной теории служит т. н. правило modus ponens:

MP. $A, A \to B \vdash B$,

т. е. если каким либо образом выведены формулы A и $A \to B$, то можно вывести и B. Заметим, что во всех выражениях выше (как и в теоремах и метатеоремах, которые мы приведём далее), A, B и другие переменные обозначают произвольную формулу. Таким образом, A1, A2, A3 и MP являются *схемами*, кодирующими на самом деле сразу бесконечное множество аксиом и правил вывода.

Пример 1. Выведем непосредственно из аксиом формулу $A \to A$. Формальный вывод запишем в виде цепочки формул, каждая из которых является либо аксиомой, либо следует по правилу modus ponens из предшествующих формул. Имеем:

(1) $A \to ((B \to A) \to A)$ — A1, в которой вместо B подставили $A \to B$;

(2) $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ — A2, где $B = A \to B$, $C = A$;

(3) $((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ — MP к (1) и (2);

(4) $A \to (B \to A)$ — A1;

(5) $A \to A$ — MP к (4) и (3).

Итак, формальный вывод формулы $A \to A$ построен. Значит, она является теоремой исчисления высказываний. †

Как и в любой другой теории, в формальном исчислении высказываний при выводе новых теорем удобно опираться не только на аксиомы, но и на ранее доказанные теоремы. Также, наряду с логическими связками $\to$ и $\neg$, принятыми в формальном исчислении высказываний за основные, удобно использовать и другие стандартные связки $\&$, $\vee$ и др. Наконец, кроме правила modus ponens существуют и другие стандартные приёмы рассуждения (например, снятие двойного отрицания), которые можно бы было использовать в качестве дополнительных правил вывода. Подобный “расширенный” вариант теории представляет собой *исчисление секвенций*. Подробнее об этом см. [Б], здесь мы ограничимся лишь перечислением основных метатеорем исчисления секвенций и примерами. В списке ниже Γ обозначает произвольное множество формул. Запись $\Gamma \vdash A$ означает, что из множества посылок Γ и аксиом с использованием (возможно, многократным) правила MP можно вывести формулу A.

MT1. Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$ (теорема дедукции);

MT2. Если $\Gamma \vdash A \to B$, то $\Gamma, A \vdash B$ (обратная теорема дедукции);

MT3. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ (силлогизм);

MT4. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$;

MT5. $\neg\neg A \vdash A$ (снятие двойного отрицания);

MT6. $A \vdash \neg\neg A$ (навешивание двойного отрицания);

MT7. $\vdash \neg A \to (A \to B)$;

MT8. $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$ (контрапозиция);

MT9. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ (обратная конрапозиция);

MT10. $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$;

MT11. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$;

MT12. $A \vdash A$ (из любой формулы можно вывести её саму);

MT13. Если $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma, A \vdash B$ (к множеству посылок, из которого выводима формула B, можно добавить любую формулу);

MT14. Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$ (исключение несущественной посылки);

MT15. $A, \neg A \vdash B$ (из противоречия можно вывести что угодно);

МТ16. Если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \ \& \ B$ (введение конъюнкции);

МТ17. $A \ \& \ B \vdash A$ и $A \ \& \ B \vdash B$ (исключение конъюнкции);

МТ18. Если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \vee B$ (введение дизъюнкции).

Вообще, по определению, $A \ \& \ B = \neg(A \to \neg B)$, $A \vee B = \neg A \to B$, поэтому в любой формуле разрешается заменять конъюнкцию и дизъюнкцию на соответствующее выражение. Приведённым списком можно пользоваться при построении формальных выводов наравне с аксиомами и правилом MP. Само правило modus ponens в исчислении секвенций записывается так:

$$\text{Если } \Gamma \vdash A \text{ и } \Gamma \vdash A \to B, \text{ то } \Gamma \vdash B.$$

Наш список и система нумерации несколько отличается от [Б]. При выполнении домашнего задания можно пользоваться любым источником, главное лишь чётко указать его. Ещё лучше выписать перед выводом все метатеоремы, которые предполагается в нём использовать.

Если есть сомнения, что некоторая секвенция вообще выводима, то проверить это можно так. Рассматривая все буквы, входящие в формулы секвенции, как логические переменные, нужно составить таблицы истинности этих формул. Если при всех значениях переменных, при которых *истинны все* формулы в левой части секвенции, истинна и её правая часть, то, по теореме о полноте исчисления высказываний, данная секвенция выводима.

Пример 2. Выведем секвенцию

$$(B \vee (A \vee C)) \vee A \vdash B \vee (A \vee C).$$

Во-первых, перепишем данную секвенцию через импликацию и отрицание:

$$\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A \vdash \neg B \to (\neg A \to C).$$

Во-вторых, заметим, что по теореме дедукции достаточно вывести секвенцию

$$\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A, \neg B, \neg A \vdash C.$$

Имея это в виду, можно предложить следующий формальный вывод.

(1) $\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A \vdash \neg A \to \neg\neg(\neg B \to (\neg A \to C))$ по МТ9, где вместо A подставлено $\neg(\neg B \to (\neg A \to C))$, а вместо B — A; в дальнейшем указание требуемой подстановки будем опускать:

(2) $\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A, \neg A \vdash \neg\neg(\neg B \to (\neg A \to C))$ по МТ2, применённой к (1);

(3) $\neg\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \vdash \neg B \to (\neg A \to C)$, MT5 к (2);

(4) $\vdash \neg\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to \neg B \to (\neg A \to C)$, MT1 к (3);

(5) $\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A, \neg A \vdash$
$\neg\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to \neg B \to (\neg A \to C)$, MT13 к (4);

(6) $\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A, \neg A \vdash \neg B \to (\neg A \to C)$, MP (для секвенций) к (2) и (5);

(7) $\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A, \neg A, \neg B \vdash C$, MT2 дважды к (6), одну и ту же посылку $\neg A$ слева повторять не нужно; вывод по существу закончен;

(8) $\neg(\neg B \to (\neg A \to C)) \to A \vdash \neg B \to (\neg A \to C)$, MT1 дважды к (7),

что и требовалось доказать. †

Пример 3. Докажем эквивалентность

$$((\neg A \to B) \vee (\neg B \to \neg C)) \equiv (A \vee (B \vee \neg C)).$$

Доказать эквивалентность — значит доказать, что из её левой части выводима правая, а из правой — левая. Таким образом, нам нужно вывести две секвенции

$$\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C) \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg C)$$

и

$$\neg A \to (\neg B \to \neg C) \vdash \neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C),$$

в которых мы выразили дизъюнкцию через импликации и отрицание.

Вывод первой секвенции.

(1) $\neg A, \neg A \to B \vdash \neg A$ по MT12 и MT13;

(2) $\neg A, \neg A \to B \vdash \neg A \to B$ по MT12 и MT13;

(3) $\neg A, \neg A \to B \vdash B$, MP к (1) и (2);

(4) $B, \neg B \vdash \neg C$, MT15;

(5) $B \vdash \neg B \to \neg C$, MT1 к (4);

(6) $\vdash B \to (\neg B \to \neg C)$, MT1 к (5);

(7) $\neg A, \neg A \to B \vdash B \to (\neg B \to \neg C)$, МТ13 к (6);

(8) $\neg A, \neg A \to B \vdash \neg B \to \neg C$, МР к (3) и (7);

(9) $\neg A \to B \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg C)$, МТ1 к (8);

(10) $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg A \to (\neg B \to \neg C))$, МТ1 к (9);

(11) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C) \vdash \neg(\neg B \to \neg C) \to \neg\neg(\neg A \to B)$, МТ9;

(12) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg B \to \neg C) \vdash \neg\neg(\neg A \to B)$, МТ2 к (11);

(13) $\neg\neg(\neg A \to B) \vdash \neg A \to B$, МТ5 к (12);

(14) $\vdash \neg\neg(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$, МТ1 к (13);

(15) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg B \to \neg C) \vdash \neg\neg(\neg A \to B) \to$ $\to (\neg A \to B)$, МТ13 к (14);

(16) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg B \to \neg C) \vdash \neg A \to B$, МР к (12) и (15);

(17) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg B \to \neg C) \vdash (\neg A \to B) \to (\neg A \to$ $\to (\neg B \to \neg C))$, МТ13 к (10);

(18) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg B \to \neg C) \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg C)$, МР к (16) и (17);

(19) $\vdash (\neg B \to \neg C) \to (\neg A \to (\neg B \to \neg C))$, аксиома А1;

(20) $\neg B \to \neg C \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg C)$, МТ2 к (19);

(21) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C), \neg B \to \neg C \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg C)$, МТ13 к (20);

(22) $\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C) \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg C)$, МТ14 к (18) и (21),

первая секвенция выведена.

Вывод второй секвенции.

(1) $A, \neg A \vdash B$, МТ15;

(2) $\vdash A \to (\neg A \to B)$, МТ1 дважды к (1);

(3) $A \to (\neg A \to B) \vdash \neg(\neg A \to B) \to \neg A$, МТ9;

(4) $\vdash (A \to (\neg A \to B)) \to (\neg(\neg A \to B) \to \neg A)$, МТ1;

(5) $\vdash \neg(\neg A \to B) \to \neg A$, МР к (2) и (4);

(6) $\neg(\neg A \to B) \vdash \neg A$, МТ2 к (5);

(7) $\neg A \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg A \to B) \vdash \neg A$, МТ13 к (7);

(8) $\neg A \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg A \to B) \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg C)$, МТ12 и МТ13;

(9) $\neg A \to (\neg B \to \neg C), \neg(\neg A \to B) \vdash \neg B \to \neg C$, МР к (7) и (8);

(10) $\neg A \to (\neg B \to \neg C) \vdash \neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C)$, МТ1 к (9),

и вторая секвенция, а с ней и эквивалентность, выведена. †

Список литературы

[Б] А. И. Белоусов, Элементы математической логики (конспект лекций), https://www.bmstu.ru/ps/%7EAbel/fileman/download/%D0%9B%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8B%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B9%20%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D0%BA%D0%B8.doc.