

Вопросы для подготовки к экзамену
по линейной алгебре
для ИУ-9, 2018 г., лектор Д. А. Степанов

(вопросы сформулированы так же, как в экзаменационных билетах)

1. Дайте определения и приведите примеры линейного (векторного) пространства, базиса, размерности векторного пространства. Как определяется матрица перехода при переходе к другому базису? Выведите формулу изменения координат вектора при переходе от базиса к базису. Дайте определение изоморфизма векторных пространств и выведите простейшие свойства изоморфизма. Докажите, что два векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$.
2. Дайте определения и приведите примеры линейных подпространств, суммы и пересечения подпространств. Сформулируйте и докажите теорему о формуле Грассмана.
3. Дайте определения и приведите примеры линейных подпространств, суммы и пересечения подпространств, прямой суммы подпространств. Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма $V_1 + V_2 + \dots + V_m$ подпространств линейного пространства является прямой.
4. Дайте определение факторпространства векторного пространства по подпространству. Докажите корректность определения операций в факторпространстве. Докажите теорему о размерности факторпространства.
5. Дайте определения и приведите примеры линейных функций и сопряжённого пространства. Докажите теорему о том, что для любого конечномерного пространства V имеем $\dim V = \dim V^*$.
6. Дайте определения сопряжённого пространства и двойственного базиса. Сформулируйте и докажите теорему о матрице перехода между двойственными базисами к данному двум базисам линейного пространства.
7. Дайте определения и приведите примеры линейных подпространств и линейных функций. Что называется ядром линейной функции? Сформулируйте и докажите теорему о том, что всякое подпространство есть пересечение ядер некоторого множества линейных функций.
8. Дайте определение ортогонального подпространства (аннулятора) в сопряжённом векторном пространстве. Сформулируйте и докажите его основные свойства.
9. Дайте определение евклидова пространства. Сформулируйте и докажите утверждение о неравенстве Коши-Буняковского. Дайте определение матрицы Грама, сформулируйте и докажите её свойства.
10. Дайте определения линейной независимости векторов, ортогональности векторов. Докажите линейную независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Как вычисляется скалярное произведение в произвольном базисе? В ортонормированном базисе? Опишите процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Сформулируйте и докажите теорему о QR -разложении.

11. Докажите неравенство треугольника в евклидовом пространстве. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора. Как определяется угол и расстояние между вектором и подпространством?
12. Дайте определения ортонормированного базиса и ортогональной матрицы. Сформулируйте и докажите утверждение об ортогональных матрицах как матрицах перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Сформулируйте и докажите групповые свойства ортогональных матриц.
13. Дайте определения ортогонального дополнения к подпространству и прямой суммы подпространств. Докажите теорему о том, что $V = U \oplus U^\perp$, в частности, $U \cap U^\perp = \{0\}$ и $\dim U^\perp = n - \dim U$, где $n = \dim V$.
14. Дайте определение ортогонального дополнения. Сформулируйте и докажите свойства операции взятия ортогонального дополнения.
15. Дайте определения сопряжённого пространства, евклидова пространства, изоморфизма линейных пространств. Сформулируйте и докажите теорему об изоморфизме линейных пространств V и V^* в случае евклидовых пространств.
16. Дайте определения и приведите примеры симметрических билинейных функций. Докажите теорему о том, что для произвольной симметрической билинейной функции над полем F , $\text{char} F \neq 2$, существует базис пространства, в котором матрица функции диагональна. Дайте определение квадратичной формы. Докажите, что любая квадратичная форма линейной заменой переменных приводится к виду, в котором ненулевые коэффициенты имеют лишь квадраты переменных.
17. Дайте определения симметрической билинейной функции и квадратичной функции, приведите примеры. Опишите алгоритм Лагранжа. Сформулируйте и докажите теорему о формуле Якоби.
18. Дайте определение квадратичной функции. Сформулируйте и докажите утверждения о нормальных видах квадратичной функции над полем комплексных и действительных чисел. Что называется индексами инерции? Сформулируйте и докажите закон инерции.
19. Дайте определения симметрической билинейной функции, квадратичной функции, положительно определённой квадратичной функции и приведите примеры. Сформулируйте и докажите критерий Сильвестра.
20. Дайте определения полуторалинейных функций, эрмитовых квадратичных форм, унитарного пространства. Сформулируйте и докажите свойства, аналогичные свойствам евклидовых пространств. Докажите, что совокупность $U(n)$ унитарных матриц порядка n — группа.
21. Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Что называется матрицей линейного оператора? Сформулируйте и докажите утверждение об изменении матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Что называется

- рангом и определителем линейного оператора? Докажите корректность определений ранга и определителя линейного оператора. Дайте определение инвариантного подпространства.
22. Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Как определяется алгебра линейных операторов? Сформулируйте и докажите теорему об изоморфизме алгебры линейных операторов и алгебры матриц и утверждение о размерности алгебры линейных операторов.
 23. Дать определение линейного оператора, индуцированного на факторпространстве по инвариантному подпространству. Доказать теорему о матрице линейного оператора, имеющего инвариантное подпространство.
 24. Докажите теорему о гомоморфизме для линейных отображений векторных пространств.
 25. Дайте определение линейного отображения и приведите примеры. Что называется ядром $\text{Ker}\varphi$ и образом $\text{Im}\varphi$ линейного отображения $\varphi: V \rightarrow W$? Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих пространствах. Докажите формулу $\dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi = \dim V$.
 26. Дайте определения и приведите примеры линейных операторов и инвариантных подпространств. Сформулируйте и докажите теоремы об инвариантных подпространствах линейного оператора над полем комплексных чисел и над полем действительных чисел.
 27. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора. Что называется характеристическим многочленом линейного оператора? Докажите, что определение характеристического многочлена корректно, то есть не зависит от выбора базиса. Сформулируйте и докажите утверждение о связи собственных значений линейного оператора и корней его характеристического многочлена.
 28. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора. Сформулируйте и докажите критерий существования базиса из собственных векторов линейного оператора.
 29. Дайте определение собственного подпространства. Сформулируйте и докажите утверждение о связи кратности собственного значения линейного оператора и размерности соответствующего собственного подпространства.
 30. Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Сформулируйте и докажите теорему о приведении матрицы линейного оператора к треугольному виду.
 31. Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Сформулируйте и докажите теорему Гамильтона-Кэли.
 32. Дайте определение минимального многочлена и приведите примеры минимальных многочленов. Сформулируйте и докажите свойства минимальных многочленов.

33. Дайте определения линейного оператора, минимального многочлена линейного оператора. Какой линейный оператор называется диагонализируемым? Сформулируйте и докажите теорему о связи диагонализируемости линейного оператора и кратности корней его минимального многочлена.
34. Дайте определение жордановой клетки и жордановой матрицы. Дайте определение нильпотентного линейного оператора. Докажите теорему о жордановой нормальной форме нильпотентного оператора.
35. Дайте определения корневого вектора и корневого подпространства. Сформулируйте и докажите теорему о разложении линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
36. Дайте определение жорданова базиса. Докажите теорему о жордановой нормальной форме линейного оператора.
37. Дайте определения евклидова пространства, линейного оператора и билинейной функции и приведите примеры. Сформулируйте и докажите утверждение о связи между линейным оператором и билинейной функцией в евклидовом пространстве. Дайте определение сопряжённого линейного оператора. Докажите, что в евклидовом пространстве любому линейному оператору отвечает сопряжённый оператор и притом только один. Сформулируйте и докажите утверждение о связи операции перехода от оператора к сопряжённому оператору с операциями сложения и умножения линейных операторов.
38. Дайте определения собственного вектора и собственного значения. Сформулируйте и докажите свойство системы собственных векторов произвольного линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Дайте определение самосопряжённого линейного оператора. Сформулируйте и докажите свойство системы собственных векторов самосопряжённого линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.
39. Дайте определения и приведите примеры симметрических (самосопряжённых) и ортогональных операторов. Сформулируйте и докажите свойства матриц самосопряжённого и ортогонального оператора в ортонормированном базисе. Что называется пространством, инвариантным относительно линейного оператора? Пусть $A: V \rightarrow V$ — ортогональный или самосопряжённый линейный оператор евклидова пространства V , $U \subset V$ — A -инвариантное подпространство, $W = U^\perp$ — ортогональное дополнение к U . Докажите, что W — A -инвариантное подпространство.
40. Дайте определения евклидова пространства и квадратичных форм. Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичной формы к главным осям в евклидовом пространстве.
41. Дайте определения симметрической билинейной функции, квадратичной функции (формы). Сформулируйте и докажите теорему об одновременном приведении пары квадратичных форм к сумме квадратов.

42. Дайте определение и приведите примеры самосопряжённого линейного оператора. Сформулируйте и докажите теорему о каноническом виде самосопряжённого оператора евклидова пространства.
43. Дайте определение и приведите примеры ортогональных операторов. Сформулируйте и докажите теорему о каноническом виде ортогонального оператора евклидова пространства.
44. Дайте определение линейного оператора и приведите примеры. Какой линейный оператор называется невырожденным? Сформулируйте и докажите теорему о полярном разложении невырожденного линейного оператора евклидова пространства.
45. Дайте определения эрмитова оператора, унитарного оператора. Сформулируйте и докажите теорему о приведении эрмитова и унитарного оператора к каноническому виду в унитарном пространстве.
46. Дайте определение и приведите примеры аффинных пространств. Сформулируйте и докажите простейшие свойства аффинных пространств. Что называется изоморфизмом аффинных пространств? Сформулируйте и докажите утверждение об изоморфизме аффинных пространств одной размерности. Как определяется система координат в аффинном пространстве? Сформулируйте и докажите утверждение о формуле перехода от одной системы к другой.
47. Дайте определения аффинных пространств и аффинных подпространств. Каково может быть взаимное расположение аффинных подпространств? Сформулируйте и докажите утверждение о пересечении аффинных подпространств. Сформулируйте и докажите теорему о задании аффинного подпространства как множества решений СЛАУ.
48. Дайте определение аффинного отображения и приведите примеры. Что называется матрицей аффинного отображения? Сформулируйте и докажите утверждение об изменении его матрицы при переходе к новой системе координат. Сформулируйте и докажите теорему о действии аффинного преобразования на $n + 1$ точке.
49. Дайте определение аффинного евклидова пространства. Как определяется расстояние между двумя аффинными подпространствами в аффинном евклидовом пространстве? Сформулируйте и докажите теорему о вычислении расстояния между аффинными подпространствами.
50. Дайте определение аффинно-квадратичной функции. Что называется матрицей аффинно-квадратичной функции? Сформулируйте и докажите утверждение о матричной и координатной записи аффинно-квадратичной функции. Сформулируйте и докажите утверждение об изменении матрицы аффинно-квадратичной функции при замене координат. Что называется центром аффинно-квадратичной функции? Сформулируйте и докажите условие центральности аффинно-квадратичной функции.
51. Дайте определение аффинно-квадратичной функции. Сформулируйте и докажите теорему о приведении аффинно-квадратичной функции к нормальному виду и к главным осям.

52. Как задаётся эквивалентность относительно группы преобразований? Дайте определение аффинной квадратики. Сформулируйте и докажите теорему о классификации аффинных квадратик. Выведите утверждения об аффинной и ортогональной классификации квадратик в двумерном аффинном пространстве.
53. Дайте определение полилинейной функции, тензора, приведите примеры. Сформулируйте и докажите утверждение об изменении коэффициентов тензора при переходе к другому базису.
54. Дайте определение тензора и приведите примеры. Сформулируйте определение линейных операций над тензорами. Докажите, что множество тензоров типа (p, q) образует линейное пространство и найдите его размерность.
55. Дайте определение операции тензорного произведения тензоров. Дайте определение тензорной алгебры векторного пространства. Как тензорное произведение вычисляется в координатах?
56. Дайте определения тензора, симметрического тензора, антисимметрического тензора. Дайте определения операций симметрирования и альтернирования. Сформулируйте и докажите их свойства.