Задачи для подготовки к экзамену
по линейной алгебре и аналитической геометрии

ИУ9, 2-й семестр, 2019 г.

1. Убедиться, что системы векторов

$$\mathbf{a}_1 = (1, -2, -3)^T,\ \mathbf{a}_2 = (2, 1, -2)^T,\ \mathbf{a}_3 = (3, 2, 1)^T$$

и

$$\mathbf{b}_1 = (4, -2, -5)^T,\ \mathbf{b}_2 = (5, 0, 7)^T,\ \mathbf{b}_3 = (8, 5, 0)^T$$

— базисы в векторном пространстве $\mathbf{R}^3$. Найти матрицу перехода $T_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}}$ и координаты в базисе $\mathbf{a}$ вектора $\mathbf{x}$, который в базисе $\mathbf{b}$ имеет координаты $(2, -1, -1)^T$.

2. Базис $\mathbf{e}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ пространства V_3 получается из правого ортонормированного базиса $\mathbf{e} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ поворотом на 180° вокруг вектора $\mathbf{i} + \mathbf{j}$; базис $\mathbf{e}'' = \{\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''\}$ получается из базиса $\mathbf{e}'$ поворотом на 90° по часовой стрелке вокруг вектора $\mathbf{k}'$. Найти матрицу перехода $T_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}''}$ и координаты в базисе $\mathbf{e}$ вектора $\mathbf{x}$, который в базисе $\mathbf{e}''$ имеет координаты $(1, 2, 3)^T$.

3. Подпространство U векторного пространства $\mathbf{R}^4$ задано системой

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

а подпространство W порождается векторами

$$\mathbf{b}_1 = (-1, 1, 3, 1)^T \text{ и } \mathbf{b}_2 = (-3, 3, 7, 4).$$

Найти базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ пространства U; задать системой подпространство W. Найти размерность суммы $U + W$ и пересечения $U \cap W$ подпространств U и W. Найти базис суммы $U + W$, выбрав его из векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, и базис пересечения $U \cap W$, представив его векторы как линейные комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ или $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Задать системой подпространство $U + W$.

4. Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

Указание: следовать доказательству теоремы о QR-разложении.

5. Ортонормировать систему векторов

$$\mathbf{f}_1 = (4, -1, 3, 3)^T,\ \mathbf{f}_2 = (-2, 3, -3, -2)$$

и дополнить её до ортонормированного базиса евклидова пространства $\mathbf{R}^4$.

6. Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$ к подпространству U евклидова пространства $\mathbf{R}^4$, порождённому векторами

$$\mathbf{a}_1 = (3, -1, -1, -1)^T,\ \mathbf{a}_2 = (-2, 4, 3, 2)^T,\ \mathbf{a}_3 = (10, 0, -1, -2)^T.$$

7. Найти угол и расстояние между вектором $\mathbf{x} = (2, 0, 3, 0)^T$ и подпространством U евклидова пространства $\mathbf{R}^4$, заданным системой

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. Линейный оператор (ЛО) $\varphi\colon V_3 \to V_3$ действует как симметрия относительно прямой L, заданной в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ уравнениями

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Найти матрицу ЛО φ в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и в базисе $2\mathbf{i} - \mathbf{j}, 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

9. Найти матрицу в каноническом базисе пространства $\mathbf{R}^3$ ЛО $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, переводящего векторы

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)^T,\ \mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)^T,\ \mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)^T$$

в векторы

$$\mathbf{b}_1 = (4, 1, 1)^T,\ \mathbf{b}_2 = (1, 4, 3)^T,\ \mathbf{b}_3 = (1, 1, 2)^T$$

соответственно.

10. Найти собственные числа и собственные векторы ЛО $\varphi\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, заданного в каноническом базисе пространства $\mathbf{C}^3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полупрост ли этот ЛО? Если да, указать базис пространства $\mathbf{C}^3$ из собственных векторов ЛО φ и матрицу ЛО φ в этом базисе.

11. Для ЛО $\varphi\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 & -16 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -6 \\ 4 & -1 & -2 & -7 \end{pmatrix},$$

найти жорданову нормальную форму (ЖНФ), жорданов базис, в котором φ имеет эту ЖНФ, и минимальный многочлен. Указание: характеристический многочлен этого ЛО равен а) $\chi_\varphi(t) = (t+1)^4$, б) $\chi_\varphi(t) = (t-1)^2(t+1)^2$.

12. Найти QS-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание: следовать доказательству теоремы о QS-разложении.

13. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис ортогонального ЛО $\varphi\colon V_3 \to V_3$, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Методом Лагранжа привести действительную квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$$

к сумме квадратов. Указать соответствующую замену переменных. Найти индексы инерции и ранг данной квадратичной формы. К какому типу знакоопределённости относится эта форма?

15. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму

$$\text{а) } x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz,$$

$$\text{б) } -x^2 - y^2 - z^2 - \sqrt{2}xy - \sqrt{2}xz - \sqrt{2}yz$$

к главным осям. Указать соответствующую замену переменных. Найти индексы инерции и ранг данной квадратичной формы. К какому типу знакоопределённости относится эта форма?

16. Эквивалентны ли квадратичные формы

$$Q_1 = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

и

$$Q_2 = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел? Над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел? К какому типу знакоопределённости принадлежит каждая из форм Q_1, Q_2?

17. Убедиться, что квадратичная форма $Q_1 = x^2 + 5y^2 + 2xy$ положительно определена, и осуществить одновременное приведение двух квадратичных форм Q_1 и $Q_2 = -7x^2 - 15y^2 - 6xy$ к суммам квадратов. Записать соответствующую замену координат. К какому типу знакоопределённости принадлежит форма Q_2? Указание: в качестве первого шага привести форму Q_1 к нормальному виду методом Лагранжа, а затем использовать ортогональные преобразования.

18. Убедиться, что подпространства

$$L\colon \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = -5 \end{cases} \quad \text{и } N\colon \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 5x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

евклидова аффинного пространства $\mathbf{R}^4$ не пересекаются. Чему равна размерность их суммы $L + N$? Вычислить расстояние $\rho(L, N)$. Найти прямую, проходящую через точку $B(2, -16, 7, 2)$ и пересекающую L и N.

19. Выяснить геометрический смысл движения евклидовой плоскости, которое в некоторой прямоугольной системе координат задано формулами

$$\text{а) } \begin{cases} x' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 6 \\ y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} x' = -y - 2 \\ y' = -x \end{cases}.$$

Указание: движение плоскости может быть одного из четырёх типов: сдвиг, поворот, симметрия, скользящая симметрия.

20. Уравнение

$$\text{а) } 5x^2 + 10y^2 + 6xy + 26x + 32y + 42 = 0,$$

$$\text{б) } x^2 - 6xy + 9y^2 - 5x + 5y + 11 = 0$$

кривой второго порядка ортогональным преобразованием привести к каноническому виду. Указать соответствующую замену координат и определить тип кривой. Сделать чертёж в исходной системе координат.

21. Тензор a^i_{jk} типа $(2,1)$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ векторного пространства $\mathbf{R}^2$ задан матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Найти альтернирование тензора a^i_{jk} по индексам j,k и свёртку по индексам i,k. Найти матрицу этого тензора в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$.