Примерный вариант № 1

1 (*4 балла*). Базис $\mathcal{E} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ пространства V_3 поворачивается на 180° вокруг прямой $z = 0$, $x - y = 0$, потом на 90° в отрицательном направлении вокруг нового положения вектора $\mathbf{j}$. В результате получается базис $\mathcal{E}'' = \{\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''\}$. Найти матрицу перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''}$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 1, 1)$.

2 (*4 балла*). В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы

$$\mathbf{a}_1 = (0, 3, 2, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (2, -2, -1, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (1, 7, 5, 1),$$

$$\mathbf{b}_1 = (1, 3, 2, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (-1, 0, 3, 2), \quad \mathbf{b}_3 = (4, 5, 1, 0).$$

а) Найти размерности пространств $U = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ и $W = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$; б) найти размерность суммы подпространств U и W и выделить из векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_j$ базис пространства $U + W$; в) найти размерность и построить какой-нибудь базис пересечения $U \cap W$.

3 (*4 балла*). Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $\mathbf{x} = (-10, 1, 1, 12)$ на подпространство U, натянутое на векторы $\mathbf{a} = (1, 5, 5, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, 3, 3, 5)$. Найти угол и расстояние между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством U.

4 (*4 балла*). Для квадратичной формы $Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_3^2$ а) найти нормальный вид в области вещественных чисел; б) указать линейное преобразование, приводящее к этому виду; в) определить, к какому типу знакоопределённости принадлежит форма Q; г) определить, существует ли базис, в котором данная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изменится ли ответ в случае поля комплексных чисел?

5 (*4 балла*). В n-мерном евклидовом пространстве даны такие векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}$, что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) < 0$ при $i \neq j$. Доказать, что любые n из этих векторов образуют базис.

ИУ-9, ЛА и АГ, 2020 г., 2 семестр, примерные варианты РК1; необходимый минимум -- 12 баллов; составители Ю. С. Белинская и Д. А. Степанов

Примерный вариант № 2

1 (*4 балла*). Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 7, 1)$ к базису $\mathbf{b}_1 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (5, 2, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, -6)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 2, 3)$.

2 (*4 балла*). В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы

$$\mathbf{a}_1 = (0, -1, -4, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, 5), \quad \mathbf{a}_3 = (1, 3, 7, 2),$$

$$\mathbf{b}_1 = (3, 2, 1, -3), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 4, 8, 15), \quad \mathbf{b}_3 = (4, 4, 4, 1).$$

а) Найти размерности пространств $U = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ и $W = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$; б) найти размерность суммы подпространств U и W и выделить из векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_j$ базис пространства $U + W$; в) найти размерность и построить какой-нибудь базис пересечения $U \cap W$.

3 (*4 балла*). Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

4 (*4 балла*). Для квадратичной формы $Q = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$ а) найти нормальный вид в области вещественных чисел; б) указать линейное преобразование, приводящее к этому виду; в) определить, к какому типу знакоопределённости принадлежит форма Q; г) определить, существует ли базис, в котором данная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изменится ли ответ в случае поля комплексных чисел?

5 (*4 балла*). Пусть V — векторное пространство положительной размерности над бесконечным полем. Доказать, что V не является объединением конечного числа своих собственных подпространств.