О минимальной дискрепантности особенностей Брискорна

Д. А. Степанов

1. Введение. Рассмотрим росток (X, x) особенности нормального многообразия X, канонический дивизор K_X которого — $\mathbb{Q}$-дивизор Картье. Если $\pi\colon Y \to X$ — некоторое разрешение особенностей, $E = \sum_i E_i$ — его исключительный дивизор, E_i — простые дивизоры, то канонические дивизоры многообразий X и Y связаны формулой

$$K_Y = \pi^* K_X + \sum_i a_i E_i \ ,$$

где $a_i = a(E_i, X) \in \mathbb{Q}$ — дискрепантность X в дивизоре E_i.

Если все $a_i \geq 0$, то особенность (X, x) называется канонической.

Величина $\mathrm{md}_x(X) = \inf \min\limits_{E_i, \pi(E_i)=x} a_i$, где точная нижняя грань берется по всем разрешениям $\pi\colon Y \to X$, называется минимальной дискрепантностью X в точке x.

В. В. Шокуровым (см. [1]) выдвинута следующая

Гипотеза. *Если* $\dim X = n$, *то* $\mathrm{md}_x(X) \leq n - 2$. (*Обозначенеия см. выше.*)

Маркушевичем эта гипотеза доказана для трехмерных изолированных терминальных особенностей индекса 1 (см. [2]). Кавамата обобщил этот результат на случай особенностей индекса $r > 1$ (см. [3]), чем исчерпывается случай размерности 3. Амбро (его работа находится в печати) дал доказательство для невырожденных гиперповерхностных особенностей в произвольной размерности. В настоящей статье доказывается такая

Теорема 1. *Гипотеза Шокурова верна для гиперповерхностных особенностей Брискорна в любой размерности.*

С помощью небольшой модификации доказательства теоремы 1 устанавливается следующий результат:

Теорема 2. *Пусть* $(X, 0)$ *– особенность Брискорна размерности* n. *Если* $\mathrm{md}_0(X) > n - 3$, *то общее гиперплоское сечение* X *имеет канонические особенности.*

Напомним, что гиперповерхностной особенностью Брискорна размерности n называется особенность $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$, где

$$X = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_0^{a_0} + x_1^{a_1} + \dots + x_n^{a_n} = 0\}\ ,$$

здесь все $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i \geq 2$.

Отметим, что особенность Брискорна является изолированной.

Естественно, особенности Брискорна — частный случай особенностей, рассмотренных в работе Амбро, но наше доказательство отличается и было получено независимо.

В отличие от работы [2] мы не пользуемся классификацией особенностей из программы минимальных моделей (терминальных), но так же, как в [2] и у Амбро, методом доказательства служит подбор для каждой особенности раздутия с подходящими весами, которое и дает нужную дискрепантность; веса выбираются исходя из вида многочлена, задающего особенность. Но если Амбро лишь доказывает существование такого раздутия, то мы указываем его явно.

2. Техника взвешенных раздутий. Приведем определение и некоторые свойства взвешенных раздутий. При их изложении мы следуем, в основном, работе [2].

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями торической геометрии (см. [4]). Мы используем следующие обозначения и факты.

Обозначим N решетку $\mathbb{Z}^n$ в векторном пространстве $V = \mathbb{R}^n$;
$\tau = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geq 0\ \forall i\}$ — положительный октант;
$W = V^*$, $M = N^*$, τ^* — соответствующие двойственные объекты, $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ N \times M \to \mathbb{Z}$ — спаривание;
общее торическое многообразие X_Σ задается веером Σ в пространстве V;
аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ представляется как торическое многообразие $X_\tau = \mathrm{Spec}\mathbb{C}\,[\tau^* \cap N^*]$ (его веер состоит из конуса τ и всех его граней);
если веер Σ' вписан в Σ, то определен бирациональный морфизм торических многообразий $X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$.

Определение. Пусть $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in N \cap \mathrm{Int}(\tau)$ — примитивный вектор решетки N из внутренности τ. Взвешенным раздутием $\sigma_w\colon \mathbb{A}^n_w \to \mathbb{A}^n$ с весами w_i, $i = 1, \dots, n$, называется торический морфизм, определенный разбиением октанта τ на конусы, имеющие луч $\mathbb{R}_+ w$ одной из своих граней. Соответствующий веер Σ' состоит из конусов $\sigma_1 = \langle w, e_2, \dots, e_n\rangle$, $\sigma_2 = \langle e_1, w, e_3, \dots, e_n\rangle$, $\dots$, $\sigma_n = \langle e_1, \dots, e_{n-1}, w\rangle$ и всех их граней; $\mathbb{A}^n_w = X_{\Sigma'}$.

Каждый из конусов σ_i определяет аффинное торическое многообразие $U_i = X_{\sigma_i}$, изоморфное $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_{w_i}(-w_1, \dots, -w_{i-1}, 1, -w_{i+1}, \dots, -w_n)$, где группа действует по правилу $y_1 \to \varepsilon^{-w_1} y_1, \ldots, y_i \to \varepsilon y_i, \ldots, y_n \to \varepsilon^{-w_n} y_n$, ε — примитивный корень степени w_i из 1. Поэтому $\mathbb{A}^n_w$ можно покрыть аффинными картами U_i, причем координаты x_i в $\mathbb{A}^n$ связаны с координатами y_i формулами

$$x_i = y_i^{w_i}, \;\; x_j = y_j y_i^{w_j}, \; j \neq i \; . \tag{1}$$

Пусть $Y = \{f = 0\}$ — гиперповерхность в $\mathbb{A}^n$, $Y_w \subset \mathbb{A}^n_w$ — ее собственный прообраз, а $E_w \subset \mathbb{A}^n_w$ — исключительный дивизор взвешенного раздутия σ_w. Предположим, что среди неприводимых компонент $Y_w \cap E_w$ есть такая компонента Γ размерности $n-2$, что многообразие Y_w нормально в общей точке Γ. Тогда E_w — дивизор Картье в общей точке Γ и корректно определена кратность d_Γ, $E_w|_{Y_w} = d_\Gamma \Gamma + \ldots$.

Заметим, что кратность d_Γ может быть найдена явно. Сделаем в уравнении $f = f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ замену вида (1) и представим полученный многочлен так:

$$f(y_1 y_i^{w_1}, \ldots, y_i^{w_i}, \ldots, y_n y_i^{w_i}) =$$
$$= y_i^N g_0(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) + y_i^{N+1} g_1(y_1, \ldots, y_n) \; .$$

Это уравнение полного прообраза Y в карте U_i; исключительный дивизор задается уравнением $y_i = 0$, а $E_w \cap Y_w$ в E_w — $g_0 = 0$. Пусть $g_0 = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ — разложение g_0 на неприводимые множители. Карту U_i можно выбрать так, что $\Gamma \cap U_i$ будет задаваться в $E_w \cap U_i$ уравнением $p_j^{r_j} = 0$ для некоторого $j = 1, \ldots, k$. Тогда кратность $d_\Gamma = r_j$.

Исключительный дивизор E_w порождает дискретное нормирование ν_w поля $K(Y)$: $\nu_w(x^m) = \langle w, m \rangle$, $\nu_w(f) = \min\limits_{a_m \neq 0} \langle w, m \rangle$, если $f = \sum\limits_m a_m x^m$.

Для оценки минимальной дискрепантности мы будем применять следующее утверждение.

Лемма 1. *Если Γ (обозначения см. выше) не является торическим подмногообразием в $\mathbb{A}^n_w$, то*

$$a(\Gamma, Y) = d_\Gamma(-\nu_w(f) + |w| - 1) \; ,$$

где $|w| = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

Доказательство. См. [2, Предложение 2.3].

3. Доказательство теоремы 1. Итак, пусть наша особенность $(Y, 0)$ задана уравнением

$$x_0^{a_0} + x_1^{a_1} + \cdots + x_n^{a_n} = 0 \; , \tag{2}$$

где можно считать, что $2 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$.

Для доказательства теоремы 1 мы сделаем такое взвешенное раздутие, при котором появится исключительный дивизор с дискрепантностью, не превышающей $n-2$.

Положим $m = \min\{[a_i, a_j] \mid 0 \leq i < j \leq n\}$ (через $[a, b]$ мы обозначаем наименьшее общее кратное чисел a и b). Тогда необходимым нам раздутием будет взвешенное раздутие с весами $w_i = \left\lceil \frac{m}{a_i} \right\rceil$, где $\lceil a \rceil$ — верхняя целая часть от числа a.

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что при взвешенном раздутии σ_w исключительный дивизор его ограничения на собственный прообраз Y_w нашей особенности будет содержать приведенную компоненту Γ, т.е. g_0 имеет некратный множитель (g_0 введен в пункте 2). Действительно, при вышеуказанном выборе весов многочлен g_0 будет одним из следующих:

$$y_{i_1}^{a_{i_1}} + y_{i_2}^{a_{i_2}} + \cdots + y_{i_k}^{a_{i_k}},\ k \geq 3\ ; \tag{3}$$

$$y_{i_1}^{a_{i_1}} + \cdots + y_{i_k}^{a_{i_k}} + 1,\ k \geq 2\ ; \tag{4}$$

$$y_i^{a_i} + y_j^{a_j}\ ; \tag{5}$$

$$y_i^{a_i} + 1\ . \tag{6}$$

Можно проверить, что многочлены (3) и (4) неприводимы; $\Gamma = \{g_0 = 0\}$. В случае (5) обозначим через d наибольший общий делитель чисел a_i и a_j; тогда $g_0 = (y_i^{a_i/d} + \varepsilon y_j^{a_j/d})(\dots)$, где ε – подходящий корень из 1, и многочлен в первых скобках неприводим, он и задает Γ. Многочлен (6) разлагается на различные линейные множители, любой из них можно взять за определяющий для Γ.

Легко видеть, что во всех случаях Γ не является торическим подмногообразием в $\mathbb{A}_w^{n+1}$. А так как особенности Y_w лежат в стратах $\{y_i = 0\}$ (это можно усмотреть из уравнения для Y_w), многообразие Y_w нормально в общей точке Γ. Следовательно, $d_\Gamma = 1$. Теперь с помощью леммы 1 получим оценку

$$\mathrm{md} \leq \sum_{i=0}^{n} \left\lceil \frac{m}{a_i} \right\rceil - 1 - m\ .$$

Оказывается, выражение в правой части неравенства ограничено сверху числом $n - 2$. Это устанавливается с помощью следующего результата.

Лемма 2. *Пусть набор натуральных чисел* $\{a_i\}_{i=0}^n, n \geq 1$, *и число* $m \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют следующим условиям:* а) $2 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$; б) *для всех* $i, j, i \neq j, [a_i, a_j] \geq m$;

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{n} \left\lceil \frac{m}{a_i} \right\rceil - m \leq n - 1$.

Доказательство. Применим двойную индукцию по n и по m.

Основание индукции $n = 1, m = 2$. Очевидно, $a_0 = a_1 = 2$, неравенство превращается в равенство $1 + 1 - 2 = 0$.

Индуктивный шаг $m \to m + 1$.

1) Пусть $a_1 \leq m$. Имеем $\left\lceil \frac{m+1}{a} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{m}{a} \right\rceil$, причем строгое неравенство будет тогда и только тогда, когда a делит m. Следовательно,

$$\left\lceil \frac{m+1}{a_0} \right\rceil + \left\lceil \frac{m+1}{a_1} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{m}{a_0} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{a_1} \right\rceil + 2$$

тогда и только тогда, когда m — общее кратное чисел a_0 и a_1. Но по условию леммы $[a_0, a_1] \geq m+1$ — противоречие. Значит,

$$\left\lceil \frac{m+1}{a_0} \right\rceil + \left\lceil \frac{m+1}{a_1} \right\rceil - m - 1 \leq \left\lceil \frac{m}{a_0} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{a_1} \right\rceil - m \leq 0$$

по предположению индукции.

2) Пусть $a_1 = m+1$. Тогда доказываемое неравенство примет вид $\left\lceil \frac{m+1}{a_0} \right\rceil + 1 - m - 1 = \left\lceil \frac{m+1}{a_0} \right\rceil - m \leq 0$, что очевидно выполнено при всех $m \geq 3$.

Индуктивный шаг $n-1 \to n$. Основание индукции $m = 2$; тогда, очевидно, все $a_i = 2$. Неравенство превращается в следующее равенство: $1 + \cdots + 1 - 2 = (n+1) - 2 = n - 1$.

Индуктивный шаг $m \to m+1$.

1) Пусть $a_n \leq m$. Обозначим $S_{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \left\lceil \frac{m+1}{a_i} \right\rceil$. По тем же соображениям, что и выше, неравенство $S_{m+1} \geq S_m + 2$ имеет место тогда и только тогда, когда найдутся такие i и j, что m — общее кратное a_i и a_j. Но по условию леммы $[a_i, a_j] \geq m+1$ — противоречие. Следовательно, $S_{m+1} \leq S_m + 1, S_{m+1} - m - 1 \leq S_m - m \leq n - 1$ по предположению индукции.

2) Пусть $a_n = m+1$. Доказываемое неравенство примет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lceil \frac{m+1}{a_i} \right\rceil + 1 - m - 1 \leq n - 1 \ ,$$

что верно согласно предположению индукции по n. Лемма доказана.

Заметим, что для нашей особенности всегда можно считать, что $m \geq a_n$. Если это не выполнено, т.е. $a_k \leq m < a_{k+1}, k < n$, то применим лемму 2 в размерности k:

$$\sum_{i=0}^{n} \left\lceil \frac{m}{a_i} \right\rceil - 1 - m = \sum_{i=0}^{k} \left\lceil \frac{m}{a_i} \right\rceil - m + 1 + \cdots + 1 - 1 \leq$$

$$\leq k - 1 + n - k - 1 = n - 2 \ .$$

Таким образом, для особенностей Брискорна гипотеза Шокурова полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим сечение особенности (2) гиперплоскостью

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \ .$$

Так как эта гиперплоскость предполагается общей, переменную x_n можно выразить через остальные. В координатах $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ уравнение сечения имеет вид

$$x_0^{a_0} + \cdots + x_{n-1}^{a_{n-1}} + (\beta_0 x_0 + \cdots + \beta_{n-1} x_{n-1})^{a_n} = 0 \ .$$

Можно проверить, что для общей гиперплоскости такое сечение будет невырожденным в смысле А. Г. Хованского (определение см., например, в [2]). А для невырожденных гиперповерхностей известен [2] критерий каноничности в терминах их диаграмм Ньютона: гиперповерхность $\{f = 0\}$ имеет канонические особенности тогда и только тогда, когда точка $(1, 1, \ldots, 1)$ лежит над диаграммой Ньютона многочлена f. Очевидно, что для нашего сечения диаграммой Ньютона является выпуклая оболочка точек

$$(a_0, 0, \ldots, 0), (0, a_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, a_{n-1}) \ .$$

Поэтому сечение канонично тогда и только тогда, когда $1/a_0 + 1/a_1 + \cdots + 1/a_{n-1} > 1$.

Теперь с помощью рассуждений, подобных использованным в доказательстве теоремы 1, теорема 2 выводится из следующего результата.

Лемма 3. *Пусть набор натуральных чисел* $\{a_i\}_{i=0}^n, n \geq 3,$ *и число* $m \in \mathbb{N}$, *удовлетворяют условиям* а), б) *леммы 2 и, кроме этого, условию* в) $\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \leq 1$.

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{n} \left\lceil \frac{m}{a_i} \right\rceil - m \leq n - 2$.

Доказательство. Применим двойную индукцию по n и по m.

Основание индукции $n = 3, m = 3$. Условия а), в) влекут $a_i = 3$. Доказываемое неравенство превращается в неравенство $1+1+1+1-3 \leq n - 2 = 1$, которое верно.

Индуктивный шаг $m \to m + 1$.

1) Пусть $a_3 \leq m$. Доказательство в этом случае полностью повторяет соответствующий шаг доказательства леммы 2.

2) Пусть $a_3 = m + 1$. Здесь необходимо рассмотреть серию случаев.

Пусть $a_0 = 2$. Тогда из условия в) следует неравенство $a_1 \geq 3$. Если $a_1 = 3$, то опять условие в) влечет $a_2 \geq 6$, а из условий а) и б) следует, что $m+1 = 6$. Неравенство превращается в равенство $3+2+1+1-6 = 1$.

Если $a_1 = 4$, то аналогично получаем, что $a_2 = m + 1 = 4$, неравенство примет вид $2 + 1 + 1 + 1 - 4 = 1$. Если же $a_1 \geq 5$, то $a_2 \geq 5$,

$$\sum \left\lceil \frac{m+1}{a_i} \right\rceil - m - 1 \leq \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{m+1}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{m+1}{5} \right\rceil - m \leq$$
$$\leq 3 - \frac{3}{5}m < 1 \text{ при } m \geq 5\ .$$

С помощью подобных рассуждений проверяются случаи $a_0 = 3, 4, \geq 5$. Арифметические проверки мы опускаем.

Индуктивный шаг $n - 1 \to n$. Далее необходимо просто повторить доказательство леммы 2.

Автор признателен Ю. Г. Прохорову и С. А. Кудрявцеву за постановку задачи и полезные замечания, а также за обсуждения в процессе работы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-00441, а также INTAS-OPEN 2000 N269.

Список литературы.

1. *Shokurov V. V.* Problems about Fano varieties //Birational geometry of algebraic varieties — Open problems, the Katata symposium of the Taniguchi Foundation, 1988.

2. *Markushevich D.* Minimal discrepancy for a terminal cDV singularity is 1 //J. Math. Sci. Univ. Tokyo 1996 **3**, N2 445–456.

3. *Kawamata Y.* The minimal discrepancy of a 3-fold terminal singularity, appendix to Shokurov, V.V., 3-fold flips //Изв. РАН Сер. матем. 1993 **40**(1) 93–202.

4. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий //Успехи матем. наук 1978 **33** 97–154.

Поступила в редакцию 19.12.01