## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Особенности алгебраических многообразий интенсивно изучаются начиная с середины XX века. Одной из первых работ, тематика которой близка нашей, стала статья П. Дю Валя [1][1]. В ней были определены и классифицированы особенности алгебраических поверхностей, называемые теперь дювалевскими, или каноническими, а также описаны их минимальные разрешения. Позже изучение этих особенностей было возобновлено в работах представителей арнольдовской школы, см. [2][2], где их называют A-D-E-особенностями. Однако истинная роль дювалевских особенностей и их обобщений в алгебраической геометрии стала ясна только в начале 80-х годов с появлением программы минимальных моделей (ПММ).

ПММ представляет собой обобщение теории минимальных моделей алгебраических поверхностей, развитой в основном усилиями итальянской школы в начале XX века, на алгебраические многообразия высших размерностей. Основные идеи ПММ были высказаны Ш. Мори и М. Ридом в статьях [3][3] и [4][4]. ПММ называют также программой Мори. В работах Ш. Мори, М. Рида, Ю. Каваматы, Я. Коллара, В. В. Шокурова и других математиков ПММ была завершена для алгеберaических многообразий размерности 3 над полем характеристики 0. Предполагается, что ПММ верна во всех размерностях и для полей произвольной характеристики.

ПММ состоит в выделении в каждом классе бирационально изоморфных многообразий представителя, наделённого некоторыми экстремальными свойствами. Он и называется минимальной моделью. Например, в размерности 2 ПММ приводит к классическим минимальным моделям поверхностей. Одним из самых существенных отличий ПММ в размерности 3 является тот факт, что минимальная модель оказывается, вообще говоря, особым многообразием. Однако особенности, возможные на минимальной модели, не произвольны, а относятся к довольно узкому классу так называемых терминальных особенностей (это понятие и термин были введены в самой ПММ). Подробнее об особенностях алгебраических многообразий, возникающих в связи с ПММ, см. обзор В. А. Исковских [5][5].

[1] [1] Du Val, P. On the singularities which do not affect the condition of adjunction // Proc. Camb. Phil. Soc 30 (1934). C. 453–491.

[2] [2] Арнольд, В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, I. M.: Наука. 1982.

[3] [3] Mori, S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. of Math. 116 (1982), C. 133–176.

[4] [4] Reid, M. Canonical 3-folds // Jornées de Géométrie Algébrique d'Angers, A. Beauville, editor. Sijthoff and Noordhoff, Alpen aan den Rijn. 1980, C. 273–310.

[5] [5] Исковских, В. А. Особенности на минимальных моделях алгебраических многообразий // Труды

Терминальные особенности размерности 3 над полем комплексных чисел были полностью классифицированы с точностью до аналитического изоморфизма В. И. Даниловым, М. Ридом, Ш. Мори, Я. Колларом и Н. Шепард-Барроном ([6][6], [7][7], [8][8], [9][9]). Оказалось, что все такие терминальные особенности разбиваются на конечное число семейств. Горенштейновы терминальные особенности (т. е. такие, канонический класс которых в окрестности особой точки является дивизором Картье) — это в точности изолированные составные дювалевские точки ($cDV$-точки), т. е. особенности, общее гиперплоское сечение которых — поверхность с дювалевской особенностью. Негоренштейновы терминальные особенности представляют собой факторы изолированных $cDV$-точек по некоторым циклическим группам (подробнее см. [8]). Далее мы рассматриваем только трёхмерные терминальные особенности, определённые над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Ещё О. Зарисским было показано, что любая особенность трёхмерного многообразия над полем характеристики 0 допускает разрешение (см. [10][10]). Но о разрешениях трёхмерных терминальных особенностей до сих пор известно мало. В. И. Данилов в [6] построил так называемое экономное разрешение для терминальных особенностей, являющихся факторами гладких точек по циклическим группам. Все исключительные дивизоры такого разрешения — рациональные поверхности. М. Ридом в [4], следствие 2.14, было установлено, что исключительные дивизоры разрешения произвольной трёхмерной терминальной особенности являются бирационально-линейчатыми поверхностями. С другой стороны, ясно, что для любой кривой $C$ можно построить такое разрешение данной трёхмерной особенности, что на нём есть исключительный дивизор $E$, который как поверхность бирационально изоморфен поверхности $C \times \mathbb{P}^1$.

Изучение исключительных дивизоров становится более интересным, если ограничиться только существенными дивизорами. Это понятие было введено Дж. Нэшем в работе [11][11]. Пусть $(X, o)$ — росток особенности алгебраического многообразия или аналитического пространства и пусть $\pi\colon Y \to X$ — некоторое разрешение. Допустим, что исключительное множество морфизма $\pi$ содержит простой дивизор $E$. Дивизор $E$ называется *существенным* (для

семинара под рук. И. Р. Шафаревича, 1996–1998. Отдел алгебры МИРАН. М. 1998. С. 41–61.

[6] [6] Данилов, В. И. Бирациональная геометрия торических 3-мерных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 46 (1982), С. 972–981.

[7] [7] Reid, M. Minimal Models of Canonical 3-folds // Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Adv. Studies in Pure Math. Kinokuniya and North-Holland. 1983. V. 1. С. 131–180.

[8] [8] Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 98 (1985). С. 43–66.

[9] [9] Kollár, J., Shepard-Barron, N. Threefolds and deformations of surface singularities // Inv. Math. 91 (1988). С. 299–338.

[10] [10] Zariski, O. Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties // Ann. of Math. 45 (1944). С. 472–542.

[11] [11] Nash, J. F. Arc structure of singularities // Duke Math. J. 81 (1995). С. 31–38.

особенности $(X,o)$), если $\mathrm{center}_{Y'}(\nu_E)$ — дивизор для произвольного разрешения $\pi'\colon Y'\to X$, где $\nu_E$ — дискретное нормирование поля рациональных (мероморфных) функций $\mathbb{C}(X)$, соответствующее дивизору $E$. Грубо говоря, существенный дивизор — это дивизор, который входит в любое разрешение данной особенности. Дивизор $E$ называется *дивизориально существенным*, если $\mathrm{center}_{Y'}(\nu_E)$ — дивизор для любого дивизориального разрешения $\pi'\colon Y'\to X$, т. е. разрешения, исключительное множество которого имеет чистую коразмерность 1.

Критерий, выделяющий существенные дивизоры среди других, неизвестен. Но для терминальных особенностей есть простое достаточное условие, гарантирующее, что данный дивизор $E$ существен. А именно, если дискрепантность $a(E,X)<1$, то дивизор $E$ существен. Если $\mathrm{center}_X(E)=o$ и $a(E,X)\leqslant 1$, дивизор $E$ дивизориально существен. Существование дивизоров с $a(E,X)\leqslant 1$ над терминальной особенностью $(X,o)$ было показано Ю. Каваматой в [12][12] и Д. Г. Маркушевичем в [13][13]. Позднее В. В. Шокуровым было доказано, что дискрепантности терминальных особенностей индекса $m$ принимают все значения $k/m$, $k=1,\dots,m$ ([14][14]).

Оказалось, что бирациональный тип дивизоров с дискрепантностью $a\leqslant 1$ над терминальными особенностями допускает гораздо более точное описание, чем данное М. Ридом в [4]. Ю. Г. Прохоровым в [15][15] было установлено, что если $(X,0)$ — терминальная особенность типа $cA/m$, $m\geqslant 1$, то все дивизоры $E$ над $X$ с $\mathrm{center}_X(E)=o$ и $a(E,X)\leqslant 1$ рациональны как алгебраические поверхности. Особенности этого типа принято рассматривать как „наиболее часто встречающиеся" (см. [2]). В то же время известно, что над терминальными особенностями других типов есть нерациональные дивизоры с дискрепантностью $a\leqslant 1$. Задача, которой посвящена наша диссертация, как раз и состоит в описании нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a(E,X)\leqslant 1$ и $\mathrm{center}_X(E)=o$ над трёхмерными терминальными особенностями типа, отличного от $cA/m$.

Изучение разрешений терминальных особенностей не только интересно само по себе, но и имеет связи с другими современными исследованиями в алгебраической геометрии. Описание раздутий с нерациональными исключительными дивизорами полезно в классификации plt-раздутий терминальных особенностей, которой посвящены статьи Ю. Г. Прохорова [16][16] и С. А.

[12] [12] Kawamata, Y. Appendix to V. V. Shokurov "3-fold log flips" // Изв. РАН. Сер. матем. 56 (1992) №1. С. 105–201.

[13] [13] Markushevich, D. Minimal Discrepancy for a Terminal cDV Singularity is 1 // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 3 (1996). С. 445–456.

[14] [14] Shokurov, V. V. Semi-stable 3-fold flips // Изв. РАН Сер. матем. 57(2) (1993). С. 165–222.

[15] [15] Прохоров, Ю. Г. Замечание о разрешении трехмерных терминальных особенностей // Успехи матем. наук. 57 (2002). №4. С. 187–188.

[16] [16] Prokhorov, Yu. G. Blow-ups of canonical singularities // Proceedings of the International Algebraic

Кудрявцева [17][17]. Это, в свою очередь, требуется для классификации стягиваний Мори методом теории дополнений В. В. Шокурова ([18][18], [19][19]). Отметим также близкую по тематике серию работ М. Кавакиты [20][20], [21][21], [22][22] и работы Т. Хаякавы [23][23] и [24][24]. М. Кавакита классифицировал дивизориальные стягивания из трёхмерного терминального многообразия $Y$ в терминальную, в частности гладкую, точку $(X, o)$. Т. Хаякава описал все дивизориальные стягивания $\sigma\colon (Y \supset E) \to (X \ni o)$ из терминальных многообразий в негоренштейновы терминальные особенности, где дивизор $E$ имеет минимальную дискрепантность.

### Цель работы

Целью работы является изучение бирациональных свойств разрешений трёхмерных терминальных особенностей, определённых над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а именно, описание нерациональных дивизоров малой ($a \leqslant 1$) дискрепантности в таких разрешениях.

### Основные методы исследования

В работе используются методы теории особенностей гладких отображений, торической геометрии и некоторые результаты из программы минимальных моделей.

### Научная новизна

Результаты работы являются новыми. Основные из них следующие.

1. Получено полное описание нерациональных дивизоров малой дискрепантности ($a = 1$) в разрешениях терминальных особенностей типа $cD$. Описаны нерациональные дивизоры малой дискрепантности ($a = 1$)

conference on the Occasion of the 90th birthday of A. G. Kurosh. Moscow, Russia, May 25–30, 1998. (2000). C. 301–317.

[17] [17] Кудрявцев, С. А. О чисто логтерминальных раздутиях // Метем. заметки 69 (2001). С. 814–819.

[18] [18] Shokurov, V. V. Complements on surfaces // J. Math. Sci. 102:2 (2000). C. 3876–3932.

[19] [19] Prokhorov, Yu. G. $\mathbb{E}1$-blowing ups of terminal singularities // J. Math. Sci. 115 (2003). N. 3. C. 2395–2427.

[20] [20] Kawakita, M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points // Invent. Math. 145 (2001). C. 105–119.

[21] [21] Kawakita, M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound $A_1$ points // Compositio Math. 133 (2002). C. 95–116.

[22] [22] Kawakita, M. Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices // e-print: arXiv:math.AG/0306065.

[23] [23] Hayakawa, T. Blowing ups of 3-dimensional Terminal Singularities // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 35 (1999). C. 515–570.

[24] [24] Hayakawa, T. Blowing ups of 3-dimensional Terminal Singularities, II // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 36 (2000). C. 423–456.

в разрешениях невырожденных терминальных особенностей типа $cE$. Мы называем особенность невырожденной, если она аналитически изоморфна особенности в $\mathbb{C}^4$, которая задана невырожденной по Хованскому (невырожденной по отношению к своей диаграмме Ньютона) функцией некоторого стандартного вида. Описаны нерациональные дивизоры малой дискрепантности ($a \leqslant 1$) в разрешениях негоренштейновых терминальных особенностей. Для особенностей типов $cAx/4$, $cD/3-3$, $cD/2-2$, $cE/2$ это описание получено при дополнительном предположении невырожденности.

2. Все нерациональные дивизоры в разрешениях трёхмерных терминальных особенностей типов, упомянутых выше, реализуются как исключительные дивизоры некоторых взвешенных раздутий и псевдораздутий. Как алгебраические поверхности эти дивизоры бирационально изоморфны поверхностям вида $C \times \mathbb{P}^1$, где $C$ — некоторая кривая (это результат М. Рида, [4]). Для каждого из исследованных типов терминальных особенностей нами получены оценки для рода кривой $C$ и выяснено, когда эта кривая является гиперэллиптической.

3. Приведены многочисленные примеры нерациональных дивизоров малой дискрепантностями над терминальными особенностями. В частности, показано, что род кривой $C$ может быть произвольным; приведены примеры терминальных особенностей, над которыми существует два нерациональных дивизора малой дискрепантности; приведены примеры нерациональных дивизоров малой дискрепантности над терминальными особенностями, для которых кривая $C$ негиперэллиптическая.

### Практическая и теоретическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в задачах теории особенностей, геометрии торических многообразий, программы минимальных моделей.

### Апробация работы

Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре „Геометрия алгебраичесих многообразий" (в 2003 и 2004 гг.) (рук. В. А. Исковских, Ю. Г. Прохоров и С. А. Кудрявцев) на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, на XXVI Конференции молодых учёных мехмат. факультета МГУ (Москва, 2004 г.), на конференции GAEL XII (CNRS, Марсель, Франция, 2004 г.) и на Международной алгебраической конференции, посвящённой 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 2004).

### Публикации

Результаты работы опубликованы в работах [1–5], список которых приводится в конце реферата.

### Структура и объём работы

Работа состоит из введения (глава 1), трёх глав, разбитых на части, и списка литературы. Объём диссертации — 72 страницы, список литературы содержит 35 наименований.

## Краткое содержание диссертации

Во **введении** (**Глава 1**) приводится обзор работ по тематике, близкой диссертации, ставится задача и перечисляются основные результаты автора.

В **Главе 2** приведены все необходимые для дальнейшего определения и факты. В части 2.1 даётся определение терминальных и канонических особенностей, дювалевских особенностей поверхностей и составных дювалевских особенностей трёхмерных многообразий. Рассмотрим росток $(X, o)$ особенности нормального многообразия $X$, канонический дивизор $K_X$ которого — $\mathbb{Q}$-дивизор Картье. Если $\pi\colon Y \to X$ — некоторое разрешение особенностей, $E = \sum_i E_i$ — его исключительный дивизор, $E_i$ — простые дивизоры, то канонические дивизоры многообразий $X$ и $Y$ связаны формулой

$$K_Y = \pi^* K_X + \sum_i a_i E_i\,,$$

где число $a_i = a(E_i, X) \in \mathbb{Q}$ называется *дискрепантностью* многообразия $X$ в дивизоре $E_i$.

**Определение 2.1.1.** Если все $a_i > 0$, то особенность $(X, o)$ называется *терминальной*, а если все $a_i \geqslant 0$, то *канонической*.

**Определение 2.1.2.** *Дювалевской особенностью* мы называем росток поверхностной особенности $(S, o)$, который аналитически изоморфен одной из следующих особенностей в пространстве $\mathbb{C}^3$:

$$A_n\colon x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0\,,\ n \geqslant 1\,; \quad D_n\colon x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0\,,\ n \geqslant 4\,;$$

$$E_6\colon x^2 + y^3 + z^4 = 0\,; \quad E_7\colon x^2 + y^3 + yz^3 = 0\,; \quad E_8\colon x^2 + y^3 + z^5 = 0\,.$$

Трёхмерная особенность называется *составной дювалевской* (сокращённо *cDV-точкой*), если она аналитически изоморфна гиперповерхности $X \subset$

$\subset \mathbb{C}^4$, $0 \in X$, общее гиперплоское сечение $H \ni 0$ которой — поверхность с дювалевской особенностью.

После этого приводится аналитическая классификация трёхмерных терминальных особенностей Рида, Мори, Коллара и Шепард-Баррона (теоремы 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5). Уравнения негоренштейновых особенностей из теоремы 2.1.4 мы называем стандартными. В леммах 2.1.6 и 2.1.8 мы выводим стандартные уравнения для терминальных особенностей типов $cD$ и $cE$. Например, уравнение терминальной особенности типа $cE_6$ может быть приведено к виду

$$x^2 + y^3 + z^4 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + \\ + a_4 y t^{b_4} + a_5 y z t^{b_5} + a_6 y z^2 t^{b_6} + (\dots) = 0\,,$$

где $i - 1 + b_i \geqslant 4$ для $i = 1, 2, 3$, $a_i \in \mathbb{C}$, а члены, заключённые в скобки, не влияют на диаграмму Ньютона функции, определяющей особенность. Такое уравнение и называется стандартным уравнением $cE_6$-особенности.

В части 2.2 главы 2 определяются взвешенные раздутия и псевдораздутия — основные технические средства нашей работы. Сначала вводятся обозначения и напоминаются некоторые факты торической геометрии (см. [25][25]).

обозначим $N$ решётку $\mathbb{Z}^n$ в векторном пространстве $V = \mathbb{R}^n$;

$\tau = \mathbb{R}^n_{\geqslant 0} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0\ \forall i\}$ – неотрицательный октант;

$W = V^*$, $M = N^*$, $\tau^*$ – соответствующие двойственные объекты, $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon\ N \times M \ \to \mathbb{Z}$ – спаривание.

общее торическое многообразие $X(\Sigma)$ задаётся веером $\Sigma$ в пространстве $V$;

аффинное пространство $\mathbb{C}^n$ представляется как торическое многообразие $X_\tau = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\,[\tau^* \cap N^*]$ (его веер состоит из конуса $\tau$ и всех его граней);

факторпространство $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ представляется как торическое многообразие $X_\tau(N') = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\,[\tau^* \cap N'^*]$, где $M' = N'^*$ — решётка инвариантов действия группы $\mathbb{Z}_m$;

**Определение 2.2.1.** Пусть $w = \frac{1}{k}(w_1, w_2, \dots, w_n) \in N' \cap \operatorname{Int}(\tau)$ – примитивный вектор решетки $N'$ из внутренности $\tau$, $w_i \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим торический морфизм $\sigma_w\colon \mathbb{C}^n_w \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$, определенный разбиением октанта $\tau$ на конусы, имеющие луч $\mathbb{R}_{\geqslant 0} w$ одной из своих граней. Соответствующий веер $\Sigma'$ состоит из конусов $\sigma_1 = \langle w, e_2, \dots, e_n \rangle$, $\sigma_2 = \langle e_1, w, e_3, \dots, e_n \rangle$, $\dots$, $\sigma_n = \langle e_1, \dots, e_{n-1}, w \rangle$ и всех их граней, $e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$, $\mathbb{C}^n_w = X(\Sigma', N')$.

[25] [25] Данилов, В. И. Геометрия торических многообразий // Успехи матем. наук 33 (1978). С. 97–154.

Если векторы $w$, $e_1$, …, $e_n$ порождают решётку $N'$, то морфизм $\sigma_w$ называется *взвешенным раздутием* с весом $w$. Если же эти векторы порождают только некоторую подрешётку $N'' \subset N'$, то $\sigma_w$ называется *псевдораздутием* с весом $w$.

В этой же части сформулированы леммы, позволяющие вычислять дискрепантности взвешенных раздутий. В части 2.3, следуя [26][26], мы описываем вложенное торическое разрешение Варченко-Хованского невырожденных особенностей.

В части 2.4 описывается метод вычисления геометрического рода некоторых особых кривых.

**Глава 3** посвящена изучению разрешений горенштейновых терминальных особенностей типов $cD$ и $cE$. В части 3.1 доказывается

**Теорема 1.** *Пусть трёхмерная терминальная особенность* $(X, o)$ *имеет тип* $cD_{n+1}$, $n \geqslant 3$ *и* $\pi\colon Y \to X$ *— произвольное разрешение. Тогда на многообразии* $Y$ *есть не более одного нерационального дивизора* $E$ *с центром* $\mathrm{center}_X(E) = o$ *и дискрепантностью* $a(E, X) = 1$. *Если особенность* $(X, o)$ *изоморфна особенности в* $\mathbb{C}^4$, *заданной стандартным уравнением* ((2.1.2) *или* (2.1.3)), *то при* $n = 2k-1$ *нерациональный дивизор реализуется как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весом* $(k, k-1, 1, 1)$, *а при* $n = 2k$ *— как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весами* $(k, k, 1, 1)$. *В обоих случаях* $E$ *представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над гиперэллиптической кривой рода* $g \leqslant k-1$.

В части 3.2 рассматриваются особенности типа $cE$ и доказываются следующие две теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть* $(X, o)$ *— терминальная точка типа* $cE$, *изоморфная особенности в* $\mathbb{C}^4$, *определённой одним из стандартных уравнений* (2.1.4), (2.1.5) *или* (2.1.6). *Кроме этого, предположим, что это уравнение невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда для любого разрешения* $\pi\colon Y \to X$ *существует не более одного нерационального исключительного дивизора* $E \subset Y$ *с дискрепантностью* $a(E, X) = 1$ *и* $\mathrm{center}_X(E) = o$.

**Теорема 3.** *В условиях теоремы* 2 *предположим, что* $E$ *— нерациональный дивизор над* $X$ *с* $a(E, X) = 1$ *и* $\mathrm{center}_X(E) = o$. *Тогда* $E$ *бирационально изоморфен исключительному дивизору взвешенного раздутия* $\sigma_w$, *где все возможные веса* $w$ *перечислены ниже.*

**(i)** *Если* $X$ *имеет тип* $cE_6$, *то вес* $w$ *— один из следующих:*

[26][26] Varchenko, A. N. Zeta-function of monodromy and Newton's diagram // Invent. Math. 37 (1976). C. 253–262.

*1) $w = (2,2,1,1)$; 2) $w = (3,2,2,1)$; 3) $w = (4,3,2,1)$.*
*Во всех случаях $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где $C$ — кривая рода 1.*

**(ii)** *Если $X$ имеет тип $cE_7$, то вес $w$ — один из следующих:*
*1) $w = (3,2,2,1)$; 2) $w = (4,3,2,1)$;*
*3) $w = (5,3,2,1)$; 4) $w = (6,4,3,1)$.*
*В случаях 1), 2), 4) поверхность $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где $C$ — кривая рода 1.*
*В случае 3) род $g(C) \le 3$ и $C$ может быть негиперэллиптической.*

**(iii)** *Если $X$ имеет тип $cE_8$, то вес $w$ — один из следующих:*
*1) $w = (3,2,2,1)$; 2) $w = (4,3,2,1)$; 3) $w = (5,3,2,1)$;*
*4) $w = (6,4,3,1)$; 5) $w = (7,5,3,1)$; 6) $w = (8,5,3,1)$;*
*7) $w = (9,6,4,1)$; 8) $w = (12,8,5,1)$.*
*В случае 6) поверхность $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где $g(C) \le 4$ и $C$ может быть негиперэллиптической. В остальных случаях $g(C) = 1$.*

Кроме этого, в главе 3 приводятся некоторые примеры нерациональных дивизоров малой дискрепантности над терминальными особенностями.

*Пример 3.1.1.* Рассмотрим особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ типа $cD_{2k}$, $k > 1$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0\,.$$

При раздутии с весами $(k, k-1, 1, 1)$ в качестве исключительного дивизора $E$ вклеивается бирационально-линейчатая поверхность над кривой

$$C = \{y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0\} \subset \mathbb{P}(k-1, 1, 1)\,.$$

Очевидно, это квазигладкая кривая, её род $g(C) = k-1$. Дискрепантность $a(E, X) = k + k - 1 + 1 + 1 - 1 - (2k-1) = 1$ по лемме 2.2.2. Этот пример показывает, что нерациональный исключительный дивизор $E$ может быть бирационально-линейчатой поверхностью над гиперэллиптической кривой произвольного рода.

*Пример 3.2.6.* Пусть особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ определена уравнением

$$x^2 + y^3 + z^5 + t^{15} = 0\,.$$

Очевидно, $X$ имеет тип $cE_8$. Раздуем её с весом $(8,5,3,1)$ (см. теорему 3, (iii) 6)). Тогда мы получаем исключительный дивизор

$$\{y^3 + z^5 + t^{15} = 0\} \subset \mathbb{P}(8,5,3,1)\,.$$

Это конус над негиперэллиптической кривой рода 4.

**Глава 4** посвящена изучению разрешений негоренштейновых терминальных особенностей. В ней доказываются следующие теоремы.

**Теорема 4.** *Пусть $\pi\colon Y \to X$ — разрешение 3-мерной негоренштейновой терминальной особенности $(X, o)$. Если $(X, o)$ имеет тип $cAx/4$, $cD/3-3$, $cD/2-2$ или $cE/2$, то дополнительно предположим, что стандартное уравнение особенности $(X, o)$ (см. теорему 2.1.4) невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда на $Y$ существует не более двух нерациональных дивизоров $E_i$ со свойствами $\pi(E_i) = o$ и $a(E_i, X) \leqslant 1$.*

**Теорема 5.** *Пусть $E$ — нерациональный дивизор из теоремы 4. Тогда $E$ реализуется как исключительный дивизор одного из взвешенных раздутий или псевдораздутий (см. определение 2.2.1), перечисленных ниже. Во всех случаях поверхность $E$ бирационально изоморфна поверхности $C \times \mathbb{P}^1$. В следующем списке для каждого типа негоренштейновых терминальных особенностей (отличного от $cA/m$) мы приводим все возможные нерациональные раздутия $\nu$, соответствующие дискрепантности $a = a(E, X)$ и оценки для рода $g$ кривой $C$.*

***(cAx/4)*** *Пусть $(X, o)$ имеет тип $cA_{2n}x/4$ (см. часть 4.1).*

*1) $\nu = \frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 1/4$; $g \leqslant 2k$;*

*2) $\nu = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+5, 3, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 3/4$;*

$$g \leqslant \begin{cases} 2m-1, & k = 3m\,, \\ 2m+1, & k = 3m+1\,, \\ 2m+2, & k = 3m+2\,. \end{cases}$$

*3) $\nu = \frac{1}{4}(4k+5, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 1/4$; $g \leqslant 2k+1$;*

*4) $\nu = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+1, 3, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 3/4$;*

$$g \leqslant \begin{cases} 2m, & k = 3m\,, \\ 2m+1, & k = 3m+1 \text{ или } k = 3m+2\,. \end{cases}$$

*Для всех раздутий кривая $C$ гиперэллиптическая.*

***(cAx/2)*** *Пусть особенность $(X, o)$ имеет тип $cA_{2k}x/2$ (см. часть 4.2). Тогда если $k$ чётное, то*

*$\nu = \frac{1}{2}(k, k+1, 1, 1)$; $a = 1/2$; $g \leqslant k-1$;*

*если $k$ нечётное, то*

*$\nu = \frac{1}{2}(k+1, k, 1, 1)$; $a = 1/2$; $g \leqslant k-1$.*

*В обоих случаях кривая $C$ гиперэллиптическая. Если нерациональный дивизор $E$ существует, то он единствен.*

***(cD/3-1)*** *В этом случае нерациональных дивизоров с $a \leqslant 1$ и $\operatorname{center}_X(E) = o$ нет.*

***(cD/3-2)***

*$\nu = \frac{1}{3}(2, 1, 4, 3)$; $a = 1/3$; $g = 1$.*

*В данном случае если нерациональный дивизор $E$ существует, то он единствен.*
***(cD/3-3)***
*1)* $\nu = \frac{1}{3}(5,4,1,6)$*;* $a = 1/3$*;* $g = 1$*;*
*2)* $\nu = \frac{1}{3}(2,4,1,3)$*;* $a = 1/3$*;* $g = 1$*;*
*3)* $\nu = \frac{1}{3}(4,5,2,6)$*;* $a = 2/3$*;* $g = 1$*.*
***(cD/2-1)*** *В этом случае нерациональных дивизоров с* $a \leqslant 1$ *и* $\mathrm{center}_X(E) = o$ *нет.*
***(cD/2-2)*** *Пусть особенность* $(X, o)$ *имеет тип* $cD_n/2{-}2$ *(см. часть* 4.4.2*).*
*1)* $\nu = \frac{1}{2}(1,m,2,m)$*,* $m = 2k-1$*,* $m \leqslant n-1$*;* $a = 1/2$*;* $g \leqslant k-1$*;*
*2)* $\nu = \frac{1}{2}(1,m-1,2,m+1)$*,* $m = 2k$*,* $m \leqslant n-1$*;* $a = 1/2$*;* $g \leqslant k$*;*
*3)* $\nu = (1,k,2,k)$*,* $k \leqslant (n-1)/2$*;* $a = 1$*;*

$$g \leqslant \begin{cases} k/2\,, & k \text{ — \textit{чётное}}\,,\\ (k-1)/2\,, & k \text{ — \textit{нечётное}}\,; \end{cases}$$

*4)* $\nu = (1,k-1,1,k)$*,* $k \leqslant n/2$*;* $a = 1$*;*

$$g \leqslant \begin{cases} (k-2)/2\,, & k \text{ — \textit{чётное}}\,,\\ (k-1)/2\,, & k \text{ — \textit{нечётное}}\,. \end{cases}$$

*Во всех случаях кривая $C$ гиперэллиптическая.*
***(cE/2)***
*1)* $\nu = \frac{1}{2}(2,3,1,3)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
*2)* $\nu = \frac{1}{2}(2,1,3,3)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
*3)* $\nu = \frac{1}{2}(4,3,1,5)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
*4)* $\nu = \frac{1}{2}(4,3,1,7)$*;* $a = 1/2$*;* $g \leqslant 3$*;*
*5)* $\nu = \frac{1}{2}(6,5,1,9)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
*6)* $\nu = (2,2,1,3)$*;* $a = 1$*;* $g = 1$*;*
*7)* $\nu = (3,2,1,4)$*;* $a = 1$*;* $g = 1$*.*
*В случае 4) кривая $C$ может быть негиперэллиптической.*

Эти теоремы доказываются отдельно для каждого типа негоренштейновых терминальных особенностей в частях 4.1–4.5. Также в главе 4 приведены некоторые примеры нерациональных дивизоров.
*Пример 4.5.3.*

$$\{u^2 + x^3 + y^2z^2 + y^6 + z^6 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,.$$

Исключительный дивизор раздутия $\nu_1 = \frac{1}{2}(2,3,1,3)$:

$$\{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,3,1,3)\,,$$

раздутия $\nu_2 = \frac{1}{2}(2,1,3,3)$:

$$\{u^2 + x^3 + y^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,1,3,3)\,.$$

Они оба являются конусами над эллиптическими кривыми.

Автор глубоко признателен В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и научное руководство. По ходу работы очень полезными были беседы с В. В. Шокуровым и С. А. Кудрявцевым.

### Публикации автора по теме диссертации


1. Степанов, Д. А. О разрешении 3-мерных терминальных особенностей // Матем. заметки 77 вып. 1 (2005). С. 127–140.

2. Степанов, Д. А. О нерациональных дивизорах над невырожденными $cDV$-точками // ВИНИТИ РАН. 2004. №1528-B2004 Деп. Сдана в Матем. сборник.

3. Степанов, Д. А. О нерациональных дивизорах над негоренштейновыми терминальными особенностями // ВИНИТИ РАН. 2004. №1529-B2004. Деп. Сдана в труды Международной алгебраической конференции, посвящённой 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры.

4. Stepanov, D. A. On resolution of terminal singularities // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры. Тезисы докладов. М.: 2004. С. 284.

5. Степанов, Д. А. О разрешениях терминальных особенностей // XXVI Конференция молодых учёных механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Тезисы докладов. М.: 2004. С. 118.