Бирациональные свойства разрешений трёхмерных терминальных особенностей

Д. А. Степанов

Оглавление

Глава 1

Введение

Если в классический период развития алгебраической геометрии математики предпочитали работать с неособыми многообразиями, то, начиная с середины XX века, особенности также подвергаются тщательному изучению. Одной из первых работ, тематика которой близка нашей, стала статья П. Дю Валя [10]. В ней были определены и классифицированы так называемые канонические, или дювалевские, особенности алгебраических поверхностей, а также описаны их минимальные разрешения. Позже изучение этих особенностей было возобновлено в работах представителей арнольдовской школы, см. [1], где их называют A-D-E-особенностями. Однако истинная роль дювалевских особенностей и их обобщений в алгебраической геометрии стала ясна только в начале 80-х годов с появлением программы минимальных моделей (ПММ).

ПММ представляет собой обобщение теории минимальных моделей алгебраических поверхностей, развитой в основном усилиями итальянской школы в начале XX века, на алгебраические многообразия высших размерностей. Основные идеи ПММ были высказаны Ш. Мори и М. Ридом в статьях [24] и [29]. ПММ называют также программой Мори. В работах Ш. Мори, М. Рида, Ю. Каваматы, Я. Коллара, В. В. Шокурова и других математиков ПММ была завершена для алгебераических многообразий размерности 3 над полем характеристики 0. Предполагается, что ПММ верна во всех размерностях и для полей произвольной характеристики. Доступное изложение этой теории содержится в [23].

ПММ состоит в выделении в каждом классе бирационально изоморфных многообразий представителя, наделённого некоторыми экстремальными свойствами. Он и называется минимальной моделью. Например, в размерности 2 ПММ приводит к классическим минимальным моделям поверхностей. Одним из самых существенных отличий ПММ в размерности 3 является тот факт, что минимальная модель оказывается, вообще говоря, особым многообразием. Однако особенности, возможные на минимальной модели, не произвольны, а относятся к довольно узкому классу так называемых терминальных особенностей (это понятие и термин были введены в самой ПММ). Подробнее об особенностях алгебраических многообразий, возникающих в связи с ПММ, см. обзор В. А. Исковских [4].

Терминальные особенности размерности 3 над полем комплексных чисел были полностью классифицированы с точностью до аналитического изоморфизма В. И. Даниловым, М. Ридом, Ш. Мори, Я. Колларом и Н. Шепард-Барроном ([3], [30], [25], [20]). Оказалось, что все терминальные особенности разбиваются на конечное число семейств. Горенштейновы особенности (т. е. такие, канонический класс которых в окрестности особой точки является дивизором Картье) — это в точности изолированные составные дювалевские точки (cDV-точки), т. е. особенности, общее гиперплоское сечение которых — поверхность с дювалевской особенностью. Негоренштейновы терминальные особенности представляют собой факторы изолированных cDV-точек по некоторым циклическим группам. Подробную классификацию мы приводим ниже, см. гл. 2, часть 2.1, теоремы 2.1.3, 2.1.4 и 2.1.5. Далее мы рассматриваем только трёхмерные терминальные особенности, определённые над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Ещё О. Зарисским было показано, что любая особенность трёхмерного многообразия над полем характеристики 0 допускает разрешение (см. [35]). Описание минимальных разрешений было существенной частью изучения дювалевских особенностей. Но о разрешениях трёхмерных терминальных особенностей до сих пор известно мало. В. И. Данилов в [3] построил так называемое экономное разрешение для терминальных особенностей, являющихся факторами гладких точек по циклическим группам. Все исключительные дивизоры такого разрешения — рациональные поверхности. М. Ридом в [29], следствие 2.14, было установлено, что исключительные дивизоры разрешения произвольной трёхмерной терминальной особенности являются бирационально-линейчатыми поверхностями. С другой стороны, ясно, что для любой кривой C можно построить такое разрешение данной трёхмерной особенности, что на нём есть исключительный дивизор E, который как поверхность бирационально изоморфен поверхности $C\times\mathbb{P}^1$. Поэтому результат М. Рида даёт полное описание бирационального типа исключительных дивизоров в разрешениях трёхмерных терминальных особенностей.

Изучение исключительных дивизоров становится более интересным, если ограничиться только существенными дивизорами. Это понятие было введено Дж. Нэшем в работе [26]. Пусть (X, o) — росток особенности алгебраического многообразия или аналитического пространства и пусть $\pi\colon Y \to X$ — некоторое разрешение. Допустим, что исключительное множество морфизма π

содержит простой дивизор E. Дивизор E называется *существенным* (для особенности (X, o)), если $\mathrm{center}_{Y'}(\nu_E)$ — дивизор для произвольного разрешения $\pi' \colon Y' \to X$, где ν_E — дискретное нормирование поля рациональных (мероморфных) функций $\mathbb{C}(X)$, соответствующее дивизору E. Грубо говоря, существенный дивизор — это дивизор, который входит в любое разрешение данной особенности. Дивизор E называется *дивизориально существенным*, если $\mathrm{center}_{Y'}(\nu_E)$ — дивизор для любого дивизориального разрешения $\pi' \colon Y' \to X$, т. е. разрешения, исключительное множество которого имеет чистую коразмерность 1. Заметим, что если дивизоры E_1 и E_2 над (X, o) определяют одно и то же дискретное нормирование поля $\mathbb{C}(X)$, то как многообразия E_1 и E_2 бирационально изоморфны.

Критерий, выделяющий существенные дивизоры среди других, неизвестен. Но для терминальных особенностей есть простое достаточное условие, гарантирующее, что данный дивизор E существен. А именно, если дискрепантность $a(E, X) < 1$, то дивизор E существен. Если $\mathrm{center}_X(E) = o$ и $a(E, X) \leqslant 1$, дивизор E дивизориально существен. Оба утверждения легко следуют из рассмотрения „домика Хиронаки" для двух разрешений теминальной особенности. Существование дивизоров с $a(E, X) < 1$ над негоренштейновой терминальной особенностью (X, o) было показано Ю. Каваматой в [19]. Существование дивизоров с $a(E, X) = 1$ над горенштейновой терминальной особенностью (X, o) было показано Д. Г. Маркушевичем в [22] (1 — минимальное возможное значение дискрепантности над горенштейновой терминальной особенностью). Позднее В. В. Шокуровым было доказано, что дискрепантности терминальных особенностей индекса m принимают все значения k/m, $k = 1, \ldots, m$ ([33]).

Оказалось, что бирациональный тип дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$ над терминальными особенностями допускает гораздо более точное описание, чем данное М. Ридом в [29]. Ю. Г. Прохоровым в [8] было установлено, что если $(X, 0)$ — терминальная особенность типа cA/m, $m \geqslant 1$ (обозначения см. ниже в теореме 2.1.4), то все дивизоры E над X с $\mathrm{center}_X(E) = o$ и $a(E, X) \leqslant 1$ рациональны как алгебраические поверхности. Особенности этого типа принято рассматривать как „наиболее часто встречающиеся" (см. [1]). В то же время известно, что над терминальными особенностями других типов есть нерациональные дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$. Многочисленные примеры таких дивизоров приведены нами ниже в главах 3 и 4. Задача, которой посвящена наша работа, как раз и состоит в описании нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a(E, X) \leqslant 1$ и $\mathrm{center}_X(E) = o$ над трёхмерными терминальными особенностями типа, отличного от cA/m.

Изучение разрешений терминальных особенностей не только интересно само по себе, но и имеет связи с другими современными исследованиями в алгебраической геометрии. Описание раздутий с нерациональными исключительными дивизорами полезно в классификации plt-раздутий терминальных особенностей, которой посвящены статьи Ю. Г. Прохорова [27] и С. А. Кудрявцева [6]. Это, в свою очередь, требуется для классификации стягиваний Мори методом теории дополнений В. В. Шокурова ([32], [28]). Отметим также близкую по тематике серию работ М. Кавакиты [16], [17], [18] и работы Т. Хаякавы [12] и [13]. М. Кавакита классифицировал дивизориальные стягивания из трёхмерного терминального многообразия Y в терминальную, в частности гладкую, точку (X, o). За небольшим числом исключений, все они оказываются тороидальными морфизмами. Из ПММ следует, что для любого геометрического дискретного нормирования ν поля $k(X)$ с дискрепантностью $a \leqslant 1$ существует такое дивизориальное стягивание $\sigma\colon (Y \supset E) \to (X \ni o)$, что Y имеет канонические особенности и дивизор E задаёт нормирование ν. Поэтому, если бы классификация Кавакиты покрывала и случай стягиваний из канонических многообразий, то её, в принципе, можно было применить для решения нашей задачи. Однако известны примеры дивизориальных стягиваний из канонических многообразий в терминальные, которые не являются тороидальными морфизмами. Т. Хаякава описал все дивизориальные стягивания $\sigma\colon (Y \supset E) \to (X \ni o)$ из терминальных многообразий в негоренштейновы терминальные особенности, где дивизор E имеет минимальную дискрепантность. Многие из найденных им раздутий встречаются и у нас. Остальные раздутия Хаякавы нам не интересны, ибо они дают только рациональные исключительные дивизоры, и в то же время ряд наших раздутий не встречаются у Хаякавы, ибо мы описываем нерациональные дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$, а не только с минимальной.

Нами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть трёхмерная терминальная особенность* (X, o) *имеет тип* cD_{n+1}, $n \geqslant 3$ *и* $\pi\colon Y \to X$ *— произвольное разрешение. Тогда на многообразии* Y *есть не более одного нерационального дивизора* E *с центром* $\operatorname{center}_X(E) = o$ *и дискрепантностью* $a(E, X) = 1$. *Если особенность* (X, o) *изоморфна особенности в* $\mathbb{C}^4$, *заданной стандартным уравнением* ((2.1.2) *или* (2.1.3)), *то при* $n = 2k-1$ *нерациональный дивизор реализуется как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весом* $(k, k-1, 1, 1)$, *а при* $n = 2k$ *— как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весами* $(k, k, 1, 1)$. *В обоих случаях* E *представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над гиперэллиптической кривой рода* $g \leqslant k-1$.

Для терминальных особенностей типа cE мы дополнительно предполагаем, что особенность (X, o) изоморфна стандартной особенности в $\mathbb{C}^4$, уравнение которой невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Известно, что в некотором смысле почти все особенности невырожденны (см. [34]), таким образом, нами рассмотрен общий случай.

Теорема 2. *Пусть (X, o) — терминальная точка типа cE, изоморфная особенности в $\mathbb{C}^4$, определённой одним из стандартных уравнений* (2.1.4), (2.1.5) *или* (2.1.6). *Кроме этого, предположим, что это уравнение невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда для любого разрешения $\pi\colon Y \to X$ существует не более одного нерационального исключительного дивизора $E \subset Y$ с дискрепантностью $a(E, X) = 1$ и $\operatorname{center}_X(E) = o$.*

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 предположим, что E — нерациональный дивизор над X с $a(E, X) = 1$ и $\operatorname{center}_X(E) = o$. Тогда E бирационально изоморфен исключительному дивизору взвешенного раздутия σ_w, где все возможные веса w перечислены ниже.*

(i) *Если X имеет тип cE_6, то вес w — один из следующих:*
1) $w = (2, 2, 1, 1)$;
2) $w = (3, 2, 2, 1)$;
3) $w = (4, 3, 2, 1)$.
Во всех случаях $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где C — кривая рода 1.

(ii) *Если X имеет тип cE_7, то вес w — один из следующих:*
1) $w = (3, 2, 2, 1)$; 2) $w = (4, 3, 2, 1)$;
3) $w = (5, 3, 2, 1)$; 4) $w = (6, 4, 3, 1)$.
В случаях 1), 2), 4) поверхность $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где C — кривая рода 1.
В случае 3) род $g(C) \leq 3$ и C может быть негиперэллиптической.

(iii) *Если X имеет тип cE_8, то вес w — один из следующих:*
1) $w = (3, 2, 2, 1)$; 2) $w = (4, 3, 2, 1)$; 3) $w = (5, 3, 2, 1)$;
4) $w = (6, 4, 3, 1)$; 5) $w = (7, 5, 3, 1)$; 6) $w = (8, 5, 3, 1)$;
7) $w = (9, 6, 4, 1)$; 8) $w = (12, 8, 5, 1)$.
В случае 6) поверхность $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где $g(C) \leq 4$ и C может быть негиперэллиптической. В остальных случаях $g(C) = 1$.

Пусть теперь (X, o) — негоренштейнова терминальная особенность. В некоторых случаях для описания нерациональных дивизоров мы снова накладываем ограничение невырожденности. Наши результаты собраны в следующих двух теоремах.

Теорема 4. *Пусть* $\pi\colon Y \to X$ *— разрешение 3-мерной негоренштейновой терминальной особенности* (X, o). *Если* (X, o) *имеет тип* $cAx/4$, $cD/3-3$, $cD/2-2$ *или* $cE/2$, *то дополнительно предположим, что стандартное уравнение особенности* (X, o) *(см. теорему 2.1.4) невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда на* Y *существует не более двух нерациональных дивизоров* E_i *со свойствами* $\pi(E_i) = o$ *и* $a(E_i, X) \leqslant 1$.

Теорема 5. *Пусть* E *— нерациональный дивизор из теоремы 4. Тогда* E *реализуется как исключительный дивизор одного из взвешенных раздутий или псевдораздутий (см. определение 2.2.1), перечисленных ниже. Во всех случаях поверхность* E *бирационально изоморфна поверхности* $C \times \mathbb{P}^1$. *В следующем списке для каждого типа негоренштейновых терминальных особенностей (отличного от* cA/m*) мы приводим все возможные нерациональные раздутия* ν, *соответствующие дискрепантности* $a = a(E, X)$ *и оценки для рода* g *кривой* C.

(cAx/4) *Пусть* (X, o) *имеет тип* $cA_{2n}x/4$ *(см. часть 4.1).*
1) $\nu = \frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 1/4$; $g \leqslant 2k$;
2) $\nu = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+5, 3, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 3/4$;

$$g \leqslant \begin{cases} 2m-1, & k = 3m\,, \\ 2m+1, & k = 3m+1\,, \\ 2m+2, & k = 3m+2\,. \end{cases}$$

3) $\nu = \frac{1}{4}(4k+5, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 1/4$; $g \leqslant 2k+1$;
4) $\nu = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+1, 3, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 3/4$;

$$g \leqslant \begin{cases} 2m, & k = 3m\,, \\ 2m+1, & k = 3m+1 \text{ или } k = 3m+2\,. \end{cases}$$

Для всех раздутий кривая C *гиперэллиптическая.*
(cAx/2) *Пусть особенность* (X, o) *имеет тип* $cA_{2k}x/2$ *(см. часть 4.2). Тогда если* k *чётное, то*
$\nu = \frac{1}{2}(k, k+1, 1, 1)$; $a = 1/2$; $g \leqslant k-1$;
если k *нечётное, то*
$\nu = \frac{1}{2}(k+1, k, 1, 1)$; $a = 1/2$; $g \leqslant k-1$.
В обоих случаях кривая C *гиперэллиптическая. Если нерациональный дивизор* E *существует, то он единствен.*
(cD/3-1) *В этом случае нерациональных дивизоров с* $a \leqslant 1$ *и* $\operatorname{center}_X(E) = o$ *нет.*
(cD/3-2)
$\nu = \frac{1}{3}(2, 1, 4, 3)$; $a = 1/3$; $g = 1$.

В данном случае если нерациональный дивизор E существует, то он единствен.

(cD/3-3)
1) $\nu = \frac{1}{3}(5,4,1,6)$*;* $a = 1/3$*;* $g = 1$*;*
2) $\nu = \frac{1}{3}(2,4,1,3)$*;* $a = 1/3$*;* $g = 1$*;*
3) $\nu = \frac{1}{3}(4,5,2,6)$*;* $a = 2/3$*;* $g = 1$*.*

(cD/2-1) *В этом случае нерациональных дивизоров с* $a \leqslant 1$ *и* $\mathrm{center}_X(E) = o$ *нет.*

(cD/2-2) *Пусть особенность* (X, o) *имеет тип* $cD_n/2{-}2$ *(см. часть 4.4.2).*
1) $\nu = \frac{1}{2}(1,m,2,m)$*,* $m = 2k-1$*,* $m \leqslant n-1$*;* $a = 1/2$*;* $g \leqslant k-1$*;*
2) $\nu = \frac{1}{2}(1,m-1,2,m+1)$*,* $m = 2k$*,* $m \leqslant n-1$*;* $a = 1/2$*;* $g \leqslant k$*;*
3) $\nu = (1,k,2,k)$*,* $k \leqslant (n-1)/2$*;* $a = 1$*;*

$$g \leqslant \begin{cases} k/2\,, & k \text{ — \textit{чётное}}\,, \\ (k-1)/2\,, & k \text{ — \textit{нечётное}}\,; \end{cases}$$

4) $\nu = (1,k-1,1,k)$*,* $k \leqslant n/2$*;* $a = 1$*;*

$$g \leqslant \begin{cases} (k-2)/2\,, & k \text{ — \textit{чётное}}\,, \\ (k-1)/2\,, & k \text{ — \textit{нечётное}}\,. \end{cases}$$

Во всех случаях кривая C гиперэллиптическая.

(cE/2)
1) $\nu = \frac{1}{2}(2,3,1,3)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
2) $\nu = \frac{1}{2}(2,1,3,3)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
3) $\nu = \frac{1}{2}(4,3,1,5)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
4) $\nu = \frac{1}{2}(4,3,1,7)$*;* $a = 1/2$*;* $g \leqslant 3$*;*
5) $\nu = \frac{1}{2}(6,5,1,9)$*;* $a = 1/2$*;* $g = 1$*;*
6) $\nu = (2,2,1,3)$*;* $a = 1$*;* $g = 1$*;*
7) $\nu = (3,2,1,4)$*;* $a = 1$*;* $g = 1$*.*
В случае 4) кривая C может быть негиперэллиптической.

Результаты теоремы 1 опубликованы в [a1] и [a5], теорем 2 и 3 — в [a2] и [a4], теорем 4 и 5 — в [a3].

Коротко опишем идею доказательств. Нерациональные дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$ присутствуют в любом дивизориальном разрешении данной терминальной особенности. Поэтому для того, чтобы показать, что таких дивизоров не более одного (или двух), достаточно построить одно дивизориальное разрешение и описать нерациональные дивизоры с малой дискрепантностью на нём. Для особенностей типа cD мы сначала выполняем взвешенное раздутие, которое реализует нерациональный дивизор, а затем исследуем особенности на раздутом многообразии и показываем, что их можно разрешить, вклеив с дискрепантностью $a \leqslant 1$ только рациональные исключительные дивизоры. При этом проявляется следующая закономерность. Если данная особенность является в некотором смысле общей, то раздутое многообразие имеет только очень простые циклические факторособенности. Они тороидальны, следовательно, их можно разрешить торическими методами. Очевидно, при этом появятся только рациональные исключительные дивизоры. Такую ситуацию иллюстрирует пример 3.1.1. Но встречаются и некоторые исключительные случаи, когда раздутое многообразие имеет более сложные особенности, иногда даже худшие, чем исходная особенность (см. пример 3.1.2). Тогда приходится подниматься на второй и более высокие „этажи" разрешения и применять некоторый индуктивный процесс.

Если в случае cD нерациональное раздутие однозначно определяется типом особенности, то в случае cE оно более сложным образом зависит от диаграммы Ньютона её определяющего ряда. Контролировать особенности, появляющиеся после взвешенного раздутия данной cE-точки, становится сложно, особенно в случаях cE_7 и cE_8. Поэтому мы накладываем дополнительное ограничение невырожденности и исследуем нерациональные дивизоры вложенного торического разрешения Варченко-Хованского. Все эти дивизоры соответствуют граням диаграммы Ньютона определяющего ряда особенности. Начальный отрезок этого ряда известен, поэтому подробное описание нерациональных дивизоров с малой дискрепантностью становится возможным.

В доказательствах теорем о негоренштейновых особенностях мы комбинируем эти два метода. Для некоторых типов особеннотей возможно сразу „выдуть" нерациональный исключительный дивизор и показать, что других нет, для остальных типов особенностей приходится предполагать невырожденность и исследовать вложенное торическое разрешение.

Благодарности. Автор глубоко признателен В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и научное руководство. По ходу работы очень полезными были беседы с В. В. Шокуровым и С. А. Кудрявцевым.

План работы

Диссертация состоит из настоящего введения (глава 1) и трёх глав. Во второй главе приведены все необходимые для дальнейшего определения и факты. В части 2.1 главы 2 даётся определение терминальных и канонических особенностей (определение 2.1.1), дювалевских особенностей поверхностей (определение 2.1.2) и составных дювалевских особенностей трёхмерных многообразий. После этого приводится аналитическая классификация трёхмерных терминальных особенностей Рида-Мори-Коллара-Шепард-Баррона (теоремы 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5). Затем в леммах 2.1.6 и 2.1.8 мы выводим стандартные уравнения для терминальных особенностей типов cD и cE.

В части 2.2 главы 2 мы вводим понятие взвешенного раздутия (определение 2.2.1). Взвешенное раздутие — основное техническое средство исследования особенностей в нашей работе. Кроме этого, определяется ещё один класс морфизмов, являющийся небольшим обобщением взвешенных раздутий — псевдораздутия. Приводится формула для вычисления дискрепантности взвешенного раздутия (лемма 2.2.2) и формула для вычисления дискрепантности дивизора E над особенностью X, когда известна его дискрепантность над некоторым раздутием $\sigma\colon Y \to X$ (лемма 2.2.4).

В части 2.3 приводятся необходимые сведения о вложенном торическом разрешении Варченко-Хованского невырожденных особенностей, даётся определение функции (ряда), невырожденной по отношению к своей диаграмме Ньютона (определение 2.3.1). Также вычисляется дискрепантность исключительных дивизоров вложенного разрешения (лемма 2.3.2). В конце доказывается лемма 2.3.5, которой мы часто пользуемся, чтобы установить рациональность исключительных дивизоров раздутий терминальных особенностей.

В части 2.4 приводится формула для вычисления рода квазигладкой кривой на взвешенной проективной плоскости. В лемме 2.4.1 показано, как вычислять род некоторых особых кривых.

Глава 3 посвящена доказательству теорем 1, 2 и 3. Теорема 1 доказывается в части 3.1, причём доказательство распадается на два случая — когда данная особенность имеет тип cD_{2k} и cD_{2k+1}. Они разобраны соответсвоенно в пунктах 3.1.1 и 3.1.2. В пункте 3.1.3 рассмотрены некоторые примеры раздутий cD-особенностей с нерациональными исключительными дивизорами.

В части 3.2 главы 3 доказываются теоремы 2 и 3. Доказательство проводится отдельно для каждого типа особенностей cE_6, cE_7 и cE_8 в соответствующих пунктах 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3. На рисунке 3.1 схематически изображена диаграмма Ньютона особенности типа cE_6, а на рисунке 3.2 — для особенности типа cE_7. В пункте 3.2.4 приведены некоторые примеры нерациональных раздутий cE-особенностей.

В главе 4 доказываются теоремы 4 и 5. Доказательство проводится отдельно для каждого типа негоренштейновых терминальных особенностей из теоремы 2.1.4 в соответствующих частях 4.1–4.5. Случай особенностей типа cA/m был полностью исследован Ю. Г. Прохоровым в [8], поэтому мы его не рассматриваем. По ходу дела приводятся многочисленные примеры нерациональных раздутий, в частности, примеры особенностей, имеющих два нерациональных дивизора с дискрепантностью $a \leqslant 1$. См., скажем, пример 4.5.3.

Глава 2

Предварительные сведения

2.1 Терминальные особенности

Рассмотрим росток (X, o) особенности нормального многообразия X, канонический дивизор K_X которого — $\mathbb{Q}$-дивизор Картье. Последнее означает, что найдётся такое натуральное число m, что mK_X — дивизор Картье. Минимальное число m с этим свойством называется *индексом* особенности (X, o). Если $\pi\colon Y \to X$ — некоторое разрешение особенностей, $E = \sum_i E_i$ — его исключительный дивизор, E_i — простые дивизоры, то канонические дивизоры многообразий X и Y связаны формулой

$$K_Y = \pi^* K_X + \sum_i a_i E_i \,,$$

где число $a_i = a(E_i, X) \in \mathbb{Q}$ называется *дискрепантностью* многообразия X в дивизоре E_i.

Определение 2.1.1. Если все $a_i > 0$, то особенность (X, o) называется *терминальной*, а если все $a_i \geqslant 0$, то *канонической*.

Это определение не зависит от выбора разрешения π ([4]).

Определение 2.1.2. *Дювалевской особенностью* назывется росток поверхностной особенности (S, o), который аналитически изоморфен одной из следующих особенностей в пространстве $\mathbb{C}^3$:

$$A_n\colon x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0\,,\ n \geqslant 1\,; \quad D_n\colon x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0\,,\ n \geqslant 4\,;$$

$$E_6\colon x^2 + y^3 + z^4 = 0\,; \quad E_7\colon x^2 + y^3 + yz^3 = 0\,; \quad E_8\colon x^2 + y^3 + z^5 = 0\,.$$

Трёхмерная особенность называется *составной дювалевской* (сокращённо *cDV-точкой*), если она аналитически изоморфна гиперповерхности $X \subset \mathbb{C}^4$, $0 \in X$, общее гиперплоское сечение $H \ni 0$ которой — поверхность с дювалевской особенностью. Мы будем говорить, что $0 \in X$ *имеет тип* cA_n, $n \geq 1$,

(cD_n, $n \geq 4$, cE_6, cE_7, cE_8), если $(H, 0)$ — дювалевская особенность типа A_n (D_n, E_6, E_7, E_8 соответственно). В аналитической окрестности точки 0 особенность X типа cA_n (cD_n, cE_6, cE_7, cE_8) может быть задана уравнением вида

$$f(x, y, z) + tg(x, y, z, t) = 0\,, \tag{2.1.1}$$

где g — некоторый степенной ряд и f — соответствующий многочлен из определения 2.1.2.

Следующие три теоремы дают аналитическую классификацию трёхмерных терминальных особенностей. Для них понадобятся следующие обозначения. Пусть циклическая группа $\mathbb{Z}_m$ действует на пространстве $\mathbb{C}^n$ по правилу: $x_i \to \varepsilon^{a_i r} x_i$, $i = 1, \ldots, n$, где x_i — координаты на $\mathbb{C}^n$, ε — примитивный корень из 1 степени m, $a_i \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}_m$ — вычет по модулю m. Тогда фактор-пространство $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ мы будем обозначать через $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $\frac{1}{m}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Мы всегда предполагаем, что группа действует без квазиотражений.

Теорема 2.1.3. *([30]) 3-мерные терминальные особенности индекса* 1 *— это изолированные cDV-точки и только они.*

Теорема 2.1.4. *([25]) Пусть X — росток 3-мерной терминальной особенности индекса $\geqslant 2$. Тогда X может быть так вложено в $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_m$, что выполнено одно из следующих утверждений:*

(cA/m) $X \simeq \{xy + f(z, u) = 0\} \subset \frac{1}{m}(\alpha, -\alpha, 1, 0)$, *где целое число α взаимно просто с m и $f(z, u) \in \mathbb{C}\{z, u\}$ — инвариант группы $\mathbb{Z}_m$.*

(cAx/4) $X \simeq \{x^2 + y^2 + f(z, u) = 0\} \subset \frac{1}{4}(1, 3, 1, 2)$, *где $f(z, u) \in \mathbb{C}\{z, u\}$ — полуинвариант группы $\mathbb{Z}_4$ и $u \notin f(z, u)$ (моном u не входит в ряд f).*

(cAx/2) $X \simeq \{x^2 + y^2 + f(z, u) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1)$, *где $f(z, u) \in (z, u)^4\mathbb{C}\{z, u\}$ — инвариант группы $\mathbb{Z}_2$.*

(cD/3) $X \simeq \{\varphi(x, y, z, u) = 0\} \subset \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)$, *где φ имеет одну из слудующих форм:*

- **(cD/3-1)** $\varphi = u^2 + x^3 + yz(y + z)$,
- **(cD/3-2)** $\varphi = u^2 + x^3 + yz^2 + xy^4\lambda(y^3) + y^6\mu(y^3)$, *где $\lambda(y^3)$, $\mu(y^3) \in \mathbb{C}\{y^3\}$ и $4\lambda^3 + 27\mu^2 \neq 0$,*
- **(cD/3-3)** $\varphi = u^2 + x^3 + y^3 + xyz^3\alpha(z^3) + xz^4\beta(z^3) + yz^5\gamma(z^3) + z^6\delta(z^3)$, *где $\alpha(z^3)$, $\beta(z^3)$, $\gamma(z^3)$, $\delta(z^3) \in \mathbb{C}\{z^3\}$.*

(cD/2) $X \simeq \{\varphi(x, y, z, u) = 0\} \subset \frac{1}{2}(1, 1, 0, 1)$, *где φ имеет одну из следующих форм:*

(cD/2-1) $\varphi = u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c$, *где* a, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$,

(cD/2-2) $\varphi = u^2 + y^2z + \lambda yx^{2a+1} + g(x,z)$, *где* $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \geqslant 1$, $g(x,z) \in \in (x^4, x^2z^2, z^3)\mathbb{C}\{x,z\}$.

(cE/2) $X \simeq \{u^2 + x^3 + g(y,z)x + h(y,z) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)$, *где* $g(y,z) \in \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\}$, $h(y,z) \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\} \setminus (y,z)^5\mathbb{C}\{y,z\}$.

Индекс особенности X *равен порядку циклической группы* $\mathbb{Z}_m$.

Теорема 2.1.5. *([20]) Пусть* X *— одна из особенностей*

$$\{\varphi(x,y,z,u) = 0\} \subset \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_m\,,$$

перечисленных в теореме 2.1.4. Допустим, что $\varphi(x,y,z,u) = 0$ *определяет изолированную особенность в* 0 *и что действие группы* $\mathbb{Z}_m$ *на* X *свободно вне* 0. *Тогда* X *терминальна.*

Для работы с cDV-точками типов cD и cE нам потребуется несколько упростить их определяющие уравнения. Введём следующие обозначения.

Пусть $\mathbb{C}\{x,y,z,t\}$ — кольцо сходящихся степенных рядов с комплексными коэффициентами от четырех переменных и пусть с каждой переменной связано некоторое положительное рациональное число $w(x)$, $w(y)$, $w(z)$, $w(t)$, называемое её весом. Тогда можно определить вес любого монома $M = x^a y^b z^c t^d$ как

$$w(M) = aw(x) + bw(y) + cw(z) + dw(t)$$

и вес любой функции (ряда) $g \in \mathbb{C}\{x,y,z,t\}$, $g = \sum_I a_I M_I$, где $a_I \in \mathbb{C}$, M_I — мономы, как

$$w(g) = \min\{w(M_I) \,|\, a_I \neq 0\}\,.$$

Через $g_{w=n}(x,y,z,t)$, где n — рациональное число, мы будем обозначать многочлен $\sum_{M_I\colon w(M_I)=n} a_I M_I$ — часть g веса n, а через $g_{w>n}(x,y,z,t)$ — ряд $\sum_{M_I\colon w(M_I)>n} a_I M_I$. В случае, когда веса совпадают с обычной степенью ($w(x) = w(y) = w(z) = w(t) = 1$), будем писать просто $g_n(x,y,z,t)$, $g_{>n}(x,y,z,t)$.

Согласно [7], особенность типа cD_4 аналитически изоморфна гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ с уравнением

$$x^2 + g(y,z,t) = 0\,, \tag{2.1.2}$$

где ряд g начинается с членов степени 3 и уравнение $g_3(y,z,t) = 0$ определяет приведённую кубику в $\mathbb{P}^2$. Особенность типа cD_{n+1}, $n \geqslant 4$, аналитически изоморфна гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ с уравнением

$$x^2 + y^2z + g(y,z,t) = 0\,, \tag{2.1.3}$$

где ряд g начинается с членов степени 4 или больше. Как видно из леммы 2.1.6, можно считать выполненными следующие условия. Присвоим переменным такие веса: $w(x) = n/2$, $w(y) = (n-1)/2$, $w(z) = w(t) = 1$. Тогда
а) вес функции g равен $w(g) = n$;
б) если $n = 2k-1$, $k > 2$, то многочлен $y^2z + g_{w=2k-1}(y, z, t)$ определяет в $\mathbb{P}(k-1, 1, 1)$ приведённую кривую.

Лемма 2.1.6. *Пусть 3-мерная терминальная особенность* $(X, 0) \subset \mathbb{C}^4$ *типа* cD_{n+1}, $n \geqslant 4$, *задана уравнением* (2.1.3) *Присвоим переменным следующие веса:* $w(x) = n/2$, $w(y) = (n-1)/2$, $w(z) = w(t) = 1$. *Тогда существует такая аналитическая замена координат, что в новых переменных уравнение особенности имеет тот же вид, вес новой функции* g *равен* $w(g) = n$ *и многочлен* $y^2z + g_{w=n}(y, z, t)$ *не содержит в своём разложении на неприводимые кратных множителей.*

Доказательство. Напомним, что если cDV-особенность имеет тип cD_{n+1}, то все её гиперплоские сечения имеют тип D_{n+1} или хуже (т. е. D_N, где $N > n+1$, или E_N. См. также [22]). Пусть сначала $w(g) = k$. Ясно, что если $k < n$, то $g_{w=k}$ имеет вид $g_{w=k} = yf(z, t) + h(z, t)$ (если n — чётное, то $f = 0$ или $h = 0$). Если $g_{w=k}$ делится на z, $g_{w=k} = z(yf_1 + h_1)$, и

$$y^2 + yf_1 + h_1 = (y + a(z, t))^2$$

— квадрат, то замена вида $y_1 = y + a(z, t)$ сохраняет вид уравнения особенности, но вес функции g увеличивается. Продолжая таким же образом, мы придём в одну из следующих ситуаций: 1) $k = w(g) < n$ и либо $g_{w=k}$ не делится на z, либо $y^2 + yf_1 + h_1$ не квадрат, или 2) $w(g) \geqslant n$. Но ситуация 1) невозможна. Действительно, рассмотрим сечение $t = \alpha z$ для достаточно общего α. Уравнение сечения имеет вид $x^2 + y^2z + g'(y, z) = 0$, $w(g') = k < n$. Применив стандартные методы теории особенностей ([1]), получим, что это сечение имеет тип D_{k+1}, $k < n$ — противоречие. Но и случай $w(g) > n$ невозможен, ибо тогда наша особенность имела бы тип cD_{n+2} или хуже. Следовательно, $w(g) = n$. Если бы при этом многочлен $g_{w=n}$ делился на z и соответствующий многочлен $y^2 + yf_1 + h_1$ был полным квадратом, то мы снова могли бы сделать замену переменных и получить $w(g) > n$, что невозможно. Лемма доказана. □

Если особенность $(X, o) \subset \mathbb{C}^4$ задана уравнением (2.1.3), для которого выполнены условия *а* и *б*, то мы будем называть (X, o) *стандартной cD-особенностью*. Кроме этого, часто удобно считать, что переменная y входит в ряд g в уравнении (2.1.3) только в степени $\leqslant 1$. Этого легко добиться обычными методами теории особенностей, см., например, доказательство леммы 2.1.8.

Стандартные уравнения для cE-особенностей приведены в лемме 2.1.8. Но сначала напомним определение диаграммы Ньютона степенного ряда.

Определение 2.1.7. ([1]) Пусть $f = \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} a_m x^m$ — степенной ряд, $\Gamma_+(f)$ — выпуклая оболочка множества $\bigcup\limits_{a_m \neq 0} (m + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0})$ в $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. *Диаграммой Ньютона* $\Gamma(f)$ ряда f называется объединение всех компактных граней полиэдра $\Gamma_+(f)$.

Лемма 2.1.8. *Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ — росток изолированной cE-точки. Тогда после подходящей замены координат особенность $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ определена одним из следующих уравнений.*

$$\begin{gathered} x^2 + y^3 + z^4 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + \\ + a_4 y t^{b_4} + a_5 y z t^{b_5} + a_6 y z^2 t^{b_6} + (\dots) = 0\,, \end{gathered} \tag{2.1.4}$$

если X имеет тип cE_6. Здесь $i - 1 + b_i \geqslant 4$ для $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{gathered} x^2 + y^3 + yz^3 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + \dots + a_k z^{k-1} t^{b_k} + a_{k+1} z^k + \\ + a_{k+2} y t^{b_{k+1}} + a_{k+3} y z t^{b_{k+2}} + (\dots) = 0\,, \end{gathered} \tag{2.1.5}$$

если X имеет тип cE_7. Здесь k — некоторое целое число $\geqslant 5$.

$$\begin{gathered} x^2 + y^3 + z^5 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + a_4 z^3 t^{b_4} + \\ + a_5 y t^{b_5} + a_6 y z t^{b_6} + a_7 y z^2 t^{b_7} + a_8 y z^3 t^{b_8} + (\dots) = 0\,, \end{gathered} \tag{2.1.6}$$

если X имеет тип cE_8. Здесь $i - 1 + b_i \geqslant 5$ для $i = 1, 2, 3, 4$.

Заключённая в скобки часть каждого уравнения не влияет на его диаграмму Ньютона.

Доказательство. Мы докажем лемму для cE_6-особенностей. В других случаях доказательство аналогично.

Итак, предположим, что X задано уравнением

$$f = x^2 + y^3 + z^4 + tg(x, y, z, t) = 0\,.$$

Расположим мономы ряда tg в возрастающем порядке по отношению к grlex-упорядочению (см. [5], гл. 2 §2). Допустим, что $a_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$ — первый из мономов tg, содержащий переменную x. Если $\alpha = 1$, то сделаем замену координат $x \leftarrow x - \frac{a_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2} y^\beta z^\gamma t^\delta$, $y \leftarrow y$, $z \leftarrow z$, $t \leftarrow t$. Если же $\alpha \geq 2$, то замену $x \leftarrow x / \sqrt{1 + a_{\alpha\beta\gamma\delta} x^{\alpha-2} y^\beta z^\gamma t^\delta}$, $y \leftarrow y$, и т. д. В обоих случаях мы уничтожаем моном $a_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$, но предыдущая часть ряда tg не изменяется. Повторяя эту процедуру, мы увеличиваем число

$$\min\{\deg x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta \mid x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta \in tg, \alpha \geq 1\}\,.$$

Напомним, что данная особенность $(X, 0)$ изолирована. Следовательно, она конечно определена ([14], теорема 3.3) и мы можем привести её уравнение к виду

$$x^2 + y^3 + z^4 + tg(y, z, t) = 0\,.$$

(Нам следовало бы писать g' вместо g, но здесь использование того же обозначения не должно привести к путанице.)

Аналогично, используя мономы y^3 и z^4, мы удаляем мономы с y^β, $\beta \geq 2$, и z^γ, $\gamma \geq 3$ из ряда tg и приводим уравнение к виду (2.1.4). Если бы в f был моном $z^\gamma t^\delta$ с $\gamma + \delta \leq 3$, то f определял бы особенность типа cD_4 или cA; это доказывает условие $i - 1 + b_i \geq 4$ для $i = 1, 2, 3$. По построению, мономы из части $(\dots)$ уравнения (2.1.4) не влияют на его диаграмму Ньютона. $\square$

2.2 Взвешенные раздутия

Нам будут необходимы основные понятия торической геометрии (см. [2]). Фиксируем обозначения и напомним некоторые факты:

обозначим N решётку $\mathbb{Z}^n$ в векторном пространстве $V = \mathbb{R}^n$;

$\tau = \mathbb{R}^n_{\geqslant 0} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geqslant 0 \ \forall i\}$ – неотрицательный октант;

$W = V^*$, $M = N^*$, τ^* – соответствующие двойственные объекты, $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon\ N \times M \ \to \mathbb{Z}$ – спаривание.

общее торическое многообразие $X(\Sigma)$ задается веером Σ в пространстве V;

аффинное пространство $\mathbb{C}^n$ представляется как торическое многообразие $X_\tau = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\,[\tau^* \cap N^*]$ (его веер состоит из конуса τ и всех его граней);

факторпространство $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ представляется как торическое многообразие $X_\tau(N') = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\,[\tau^* \cap N'^*]$, где $M' = N'^*$ — решётка инвариантов действия группы $\mathbb{Z}_m$;

если веер Σ' вписан в Σ, то определен бирациональный морфизм торических многообразий $X(\Sigma') \to X(\Sigma)$.

Определение 2.2.1. Пусть $w = \frac{1}{k}(w_1, w_2, \dots, w_n) \in N' \cap \operatorname{Int}(\tau)$ – примитивный вектор решетки N' из внутренности τ, $w_i \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим торический морфизм $\sigma_w \colon \mathbb{C}^n_w \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$, определенный разбиением октанта τ на конусы, имеющие луч $\mathbb{R}_{\geqslant 0} w$ одной из своих граней. Соответствующий веер Σ' состоит из конусов $\sigma_1 = \langle w, e_2, \dots, e_n \rangle$, $\sigma_2 = \langle e_1, w, e_3, \dots, e_n \rangle$, $\dots$, $\sigma_n = \langle e_1, \dots, e_{n-1}, w \rangle$ и всех их граней, $e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$, $\mathbb{C}^n_w = X(\Sigma', N')$.

Если векторы w, e_1, …, e_n порождают решётку N', то морфизм σ_w называется *взвешенным раздутием* с весом w. Если же эти векторы порождают только некоторую подрешётку $N'' \subset N'$, то σ_w называется *псевдораздутием* с весом w.

Замечание. Случай раздутия пространства $\mathbb{C}^n$ $(m = 1)$ в определении 2.2.1 не исключён.

Сначала остановимся подробнее на случае взвешенного раздутия $\sigma_w \colon \mathbb{C}^n_w \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$. Каждый из конусов σ_i определяет аффинное торическое многообразие $U_i = X_{\sigma_i}$, изоморфное многообразию

$$\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_{w_i}(-w_1, \dots, -w_{i-1}, m, -w_{i+1}, \dots, -w_n)\,.$$

Поэтому $\mathbb{C}^n_w$ можно покрыть аффинными картами U_i, причем координаты x_j в $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ связаны с координатами y_j в $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_{w_i}$ формулами

$$x_i = y_i^{w_i/m}, \quad x_j = y_j y_i^{w_j/m},\ j \neq i\,. \tag{2.2.1}$$

Исключительный дивизор E взвешенного раздутия σ_w изоморфен взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(w_1, w_2, \dots, w_n)$. Пусть теперь

$$X = \{f(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$$

— гиперповерхность, $0 \in X$, $f = \sum a_m x^m$, x^m — мономы ряда f, $a_m \in \mathbb{C}$. Будем обозначать ограничение раздутия σ_w на собственный прообраз Y многообразия X той же буквой σ_w и называть его взвешенным раздутием многообразия X. Тогда исключительный дивизор $Y \cap E$ задаётся в пространстве $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$ уравнением

$$f_w(x_1, \dots, x_n) = 0\,, \tag{2.2.2}$$

где x_j теперь имеют смысл координат во взвешенном проективном пространстве, а

$$f_w = \sum_{w(x^m)=w(f),a_m\neq 0} a_m x^m\,;$$

где $w(x^m) = \langle w, m\rangle$; $w(f) = \min\{w(x^m)\,|\,a_m \neq 0\}$.

Пусть теперь σ_w — псевдораздутие пространства $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m(a_1, \dots, a_n)$. Положим $a = \frac{1}{m}(a_1, \dots, a_n)$. Рассмотрим проекцию $p\colon V \to W = V/\langle w\rangle$. Обозначим $N_w \subset W$ — образ решётки N (а равно и решётки N''), N'_w — образ решётки N' при проекции p. Ясно, что

$$N'_w/N_w \simeq (N'/\langle w\rangle)/(N''/\langle w\rangle) \simeq N'/N''$$

— конечная группа порядка m/k для некоторого $k|m$. Эта группа циклическая, ибо N'/N'' — факторгруппа циклической группы N'/N по подгруппе N''/N порядка k. Построим такую решётку N_1, $N \subset N_1$, что $N_1/N \simeq N'/N''$ и образ N_1 в V совпадает с N'_w. Для этого положим

$$N_1 = \langle e_1, \ldots, e_n, w' \rangle \,,$$

где $w' = a + (k-1)\frac{1}{m/k} w$. Так как можно считать, что $w = \frac{m}{k} a - z$, $z \in N$, имеем:

$$w' = \frac{1}{m}(a_1, \ldots, a_n) + (k-1)\frac{1}{m}(a_1 - kz_1, \ldots, a_n - kz_n) =$$

$$= \frac{k}{m}(a_1 - (k-1)z_1, \ldots, a_n - (k-1)z_n) \,.$$

Очевидно, $p(w') = p(a)$. Следовательно, N_1 накрывает N'_w. Кроме этого, порядок группы N_1/N делит число m/k, поэтому $N_1/N \simeq N'_w/N_w$. Этот изоморфизм канонический, он задаётся сопоставлением $w_1 \to p(a)$.

Теперь рассмотрим веер $\Sigma \subset V$, $\Sigma = \tau \backslash \tau^0$, т. е. положительный октант без внутренности, он состоит из положительных октантов координатных плоскостей и всех их граней. Соответствующие торические многообразия — это

$$X(\Sigma, N) = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

и

$$X(\Sigma, N_1) = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\mathbb{Z}_{m/k} \,.$$

Введём ещё веер Σ' — образ веера Σ при проекции p. Тогда $X(\Sigma', N_w) = \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$. Имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
X(\Sigma, N) \arrow[r] \arrow[d] & X(\Sigma, N_1) \arrow[d] \\
X(\Sigma', N_w) \arrow[r] & X(\Sigma', N'_w) \,,
\end{tikzcd}$$

где морфизмы между торическими многообразиями задаются естественными отображениями вееров и решёток. Из неё следует, что исключительный дивизор исходного псевдораздутия изоморфен торическому многообразию

$$X(\Sigma', N'_w) = \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)/\mathbb{Z}_{m/k}(w'_1, \ldots, w'_n) \,,$$

где $w' = \frac{k}{m}(w'_1, \ldots, w'_n)$. Если мы выполняем псевдораздутие гиперповерхности X, то его исключительный дивизор определяется в факторпространстве $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)/\mathbb{Z}_{m/k}$ тем же уравнением (2.2.2).

Аффинная карта $x_i \neq 0$ многообразия $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)/\mathbb{Z}_{m/k}(w'_1, \ldots, w'_n)$ — это

$$\mathbb{C}^{n-1}/\mathbb{Z}_{(m/k)w_i}(w_i w'_1 - w'_i w_1, \ldots, w_i w'_n - w'_i w_n)\,.$$

Действительно, отношения

$$\frac{x_j}{(x_i)^{\frac{w_j}{w_i}}}$$

определены как раз по модулю действия этой группы.

Теперь вычислим дискрепантность исключительного дивизора взвешенного раздутия σ_w.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $X = \{f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ *— нормальная гиперповерхность в* $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$, $\sigma_w \colon \mathbb{C}^n_w \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ *— взвешенное раздутие с весом* w, $\mathbb{C}^n_w \supset Y$ *— собственный прообраз* X, E *— исключительный дивизор* σ_w. *Предположим, что* Y *тоже нормальна и* $E|_Y = \sum m_i E_i$, E_i *— простые дивизоры,* m_i *— их кратности в* $E|_Y$. *Тогда дискрепантность*

$$a(E_i, X) = m_i(w_1 + \cdots + w_n - 1 - w(f))\,.$$

Доказательство. См. [22], 2.3, или [12], 3.9. □

Замечание 2.2.3. Как известно, гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$ нормальна тогда и только тогда, когда её особенности лежат в коразмерности 2. Нормальность сохраняется при факторизации по конечной группе, следовательно, то же верно для гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n/G$. Все многообразия, которые мы будем рассматривать, являются гиперповерхностями в $\mathbb{C}^n/G$ и, как будет ясно, их особенности лежат в коразмерности 2. Поэтому далее мы не будем всякий раз отдельно проверять условия применимости леммы 2.2.2.

Часто необходимо вычислить дискрепантность $a(E, X)$ некоторого дивизора E над особенностью X, когда известна его дискрепантность $a(E, Y)$ над некоторым раздутием $\sigma \colon Y \to X$.

Лемма 2.2.4. *Пусть* $\sigma_w \colon Y \to X$ *— такое же взвешенное раздутие, как в лемме 2.2.2, и* $K_Y \equiv \sigma_w^* K_X + \sum_{i=1}^n a_i E_i$. *Пусть еще* $\pi \colon Z \to Y$ *— некоторое разрешение,* F_j *— его исключительные дивизоры и выполнены равенства*

$$K_Z \equiv \pi^* K_Y + \sum b_j F_j\,,$$

$$\pi^* E_i \equiv E'_i + \sum m_{ij} F_j\,,\ i = 1, \ldots, n\,,$$

где E'_i *— собственный прообраз* E_i. *Тогда* $a(F_j, X) = b_j + \sum_i a_i m_{ij}$.

Замечание. $\pi^* K_Y$ и $\pi^* E_i$ определены, ибо в условиях леммы 2.2.2 K_Y и E_i — $\mathbb{Q}$-Картье дивизоры.

Доказательство. Сравнить K_Z и $\pi^*(\sigma_w^* K_X)$. См. также [12], 5.3 и [28], 2.15. □

Замечание 2.2.5. Это замечание понадобится нам в части 3.1. Пусть в обозначениях лемм 2.2.2 и 2.2.4 осбенность $(X,0)$ терминальна, дивизор $E|_Y$ приведён и $a(E_i,X)=1$ для любой его компоненты E_i. Известно ([31], 6.4), что общий член F линейной системы $|-K_X|$ — поверхность с дювалевской особенностью. Тогда по теореме об обращении формулы присоединения ([21], 17.6) пара (X,F) логтеминальна. Учитывая, что $K_X+F\equiv 0$, получаем, что пара (X,F) канонична и $a(E_i,X,F)=0$. Но тогда и пара (Y,F'), где F' — собственный прообраз F, канонична. Поэтому многообразие Y имеет не хуже чем канонические особенности.

2.3 Вложенное торическое разрешение

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)=\sum a_m x^m$ — степенной ряд с диаграммой Ньютона $\Gamma(f)$. Для любой грани ρ диаграммы $\Gamma(f)$ обозначим через $f_\rho=\sum_{m\in\rho} a_m x^m$ соответствующую часть ряда f.

Определение 2.3.1. ([34]) Ряд f называется *невырожденным по отношению к своей диаграмме Ньютона* (далее просто *невырожденным*), если для любой грани ρ диаграммы $\Gamma(f)$ гиперповерхность

$$\{f_\rho(x_1,\dots,x_n)=0\}\subset(\mathbb{C}^*)^n$$

неособа.

Пусть $f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — сходящийся степенной ряд, причём $f(0)=0$, $(\{f=0\},0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ — изолированная особенность. Если f невырожден, то для особенности $(\{f=0\},0)$ существует вложенное торическое разрешение Варченко-Хованского (см. [34]), т. е. такой торический морфизм $\pi\colon \widetilde{\mathbb{C}^n}\to\mathbb{C}^n$, что $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ и собственный прообраз Y многообразия X неособы, и исключительное множество морфизма $\pi|_Y$ — дивизор с нормальными пересечениями. Однако, если на $\mathbb{C}^n$ действует группа $\mathbb{Z}_m$ и f — её полуинвариант, то конструкция вложенного разрешения практически без изменений переносится и на факторособенность $(X,o)=(\{f=0\},0)/\mathbb{Z}_m\subset\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$. При этом все необходимые торические многообразия и морфизмы строятся исходя из решётки N', двойственной к решётке M' инвариантных мономов группы $\mathbb{Z}_m$, $M'\subset\mathbb{Z}^n$. На это простое обобщение нам указал С. А. Кудрявцев.

Вложенное торическое разрешение $\pi\colon Y\to X$ особенности (X,o) строится как ограничение торического морфизма, соответствующего определённому разбиению положительного октанта $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. Если Σ — соответствующий этому разбиению веер, то положим $\widetilde{\mathbb{C}^n}=X(\Sigma,N')$ — торическое многообразие, построенное по вееру Σ, $\tilde{\pi}\colon \widetilde{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ — естественный бирациональный морфизм. Тогда π — это ограничение морфизма $\tilde{\pi}$ на собственный прообраз Y особенности X.

Исключительные дивизоры морфизма $\tilde{\pi}$ взаимно-однозначно соответствуют одномерным конусам веера Σ. Возьмём такой конус τ, его исключительный дивизор $E_\tau \subset \widetilde{\mathbb{C}^n}$ и положим $E_\tau|_Y = \sum m_j E_j$. Кроме этого, положим $w = (w_1, \ldots, w_n)$ — примитивный вектор решётки N' вдоль конуса τ. Диаграмма $\Gamma(f)$ лежит в пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$, двойственном к $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \otimes \mathbb{Z}^n$, соответствующее спаривание мы обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Вычислим дискрепантность $a(E_j, X)$.

Лемма 2.3.2. *Предположим, что группа $\mathbb{Z}_m$ действует на X свободно в коразмерности* 1. *Тогда*

$$a(E_j, X) = m_j(w_1 + w_2 + \cdots + w_n - 1 - w(f))\,,$$

где $w(f) = \min\{\langle w, v\rangle \mid v \in \Gamma(f)\}$.

Доказательство. Аналогично [34], §10, у общей точки дивизора E_τ в $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ есть аффинная окрестность $U \simeq \mathbb{C}^n$ с такими координатами $y_1, \ldots, y_n$, что уравнение $y_1 = 0$ определяет $E_\tau \cap U$ и $\tilde{\pi}|_U\colon U \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ задан формулами

$$x_1 = y_1^{w_1} y_2^{a_1^2} \ldots y_n^{a_1^n}\,,$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_n = y_1^{w_n} y_2^{a_n^2} \ldots y_n^{a_n^n}$$

для некоторых $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i) \in N' \cap \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. С помощью этих формул легко вычислить полный прообраз $\tilde{\pi}^* X$ многообразия X. Имеем:

$$f(y_1^{w_1} y_2^{a_1^2} \ldots y_n^{a_1^n}, \ldots, y_1^{w_n} y_2^{a_n^2} \ldots y_n^{a_n^n}) =$$

$$= y_1^{w(f)} f'(y_1, \ldots, y_n)\,,$$

где ряд f' не делится на y_1. Поэтому

$$\tilde{\pi}^* X = w(f) E_\tau + Y\,,$$

где Y — собственный прообраз многообразия X.

Теперь рассмотрим сечение $(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)^{\otimes m}$ пучка $(\Omega^n_{C_0})^{\otimes m}$, где C_0 — множество гладких точек многообразия $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$. Поднимем это сечение на $\widetilde{\mathbb{C}^n}$:

$$\tilde{\pi}^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)^{\otimes m} = (dy_1^{w_1} y_2^{a_1^2} \ldots y_n^{a_1^n} \wedge \cdots \wedge dy_1^{w_n} y_2^{a_n^2} \ldots y_n^{a_n^n})^{\otimes m} =$$

$$= (\delta y_1^{w_1+\dots+w_n-1}\dots)^m (dy_1\wedge\dots\wedge dy_n)^{\otimes m}\,,$$

где δ — отличный от нуля определитель матрицы, составленной из векторов w, a^i. Отсюда следует, что канонические дивизоры многообразий $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ и $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ связаны формулой

$$K_{\widetilde{\mathbb{C}^n}} \equiv \tilde{\pi}^* K_{\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m} + (w_1+\dots+w_n-1)E_\tau\,.$$

Теперь по формуле присоединения получаем

$$K_Y \equiv \pi^* K_X + \sum_j m_j(w_1+w_2+\dots+w_n-1-w(f))E_j\,.$$

„Внизу" на $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ формула присоединения применима благодаря тому, что действие группы на X свободно в коразмерности 1. ☐

Замечание 2.3.3. Формулы для дискрепантности из лемм 2.2.2 и 2.3.2 совпадают. Однако доказательство леммы 2.3.2 неприменимо для леммы 2.2.2, ибо в ней особенность $\{f=0\}$ не предполагается невырожденной. С другой стороны, вектор w в лемме 2.3.2 может задавать и псевдораздутие, а не только взвешенное раздутие, как в лемме 2.2.2.

Следствие 2.3.4. *Если* $a(E_j,X)\leqslant 1$, *то* $w_1+\dots+w_n-1-w(f)\leqslant 1$.

Заметим, что исключительные дивизоры E_j бирационально изоморфны дивизорам $E_{w,j}$ соответственно, $\sum E_{w,j} = E_w|_{X_w}$, где X_w — собственный прообраз многообразия X при взвешенном раздутии

$$\nu_w\colon \mathbb{C}^n_w \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m\,.$$

Это следует из того, что у любых двух разбиений неотрицательного октанта $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ есть общее подразбиение. Исключительный дивизор E_w взвешенного раздутия ν_w изоморфен взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$, а дивизор $\sum E_{w,j}$ задан в $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$ уравнением

$$f_{\rho(w)}(x_1,\dots,x_n)=0\,,$$

где f_ρ — часть ряда f, соответствующая грани

$$\rho(w)=\{v\in\Gamma(f)\,|\,\langle w,v\rangle = w(f)\}\,.$$

В заключение сформулируем ещё одну лемму, позволяющую в некоторых случаях устанавливать рациональность исключительных дивизоров взвешенных раздутий или псевдораздутий трёхмерных терминальных особенностей. Она будет полезной в главах 3 и 4.

Пусть (X, o) — одна из терминальных особенностей теорем 2.1.3 или 2.1.4, ν_w — её взвешенное раздутие или псевдораздутие, E_w — исключительный дивизор морфизма $\nu_w \colon X_w \to X$. Обозначим через E' поверхность в пространстве $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, накрывающую E_w (если ν_w — взвешенное раздутие, то $E' = E_w$).

Лемма 2.3.5. *Предположим, что поверхность E' неприводима и имеет только рациональные особенности. Тогда поверхность E_w рациональна.*

Доказательство. Поверхность E' можно рассматривать как дивизор над некоторой терминальной cDV-точкой. Возьмём разрешение $\pi \colon \widetilde{E}' \to E'$ особенностей поверхности E'. По [29], следствие 2.14, E' бирационально-линейчата. Значит, $P_2(\widetilde{E}') = h^0(2K_{\widetilde{E}'}) = 0$. С другой стороны, E' — гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, следовально $h^1(\mathcal{O}_{E'}) = 0$. Так как E' имеет только рациональные особенности, $h^1(\mathcal{O}_{\widetilde{E}'}) = h^1(\mathcal{O}_{E'}) = 0$. Поэтому $\widetilde{E}'$ рациональна по критерию Кастельнуово, а следовательно, рациональна и E_w. □

Эта лемма может быть применена, например, когда E' квазигладка или когда ν_w — plt-раздутие (см. [27], определение 3).

Если у раздутия ν есть нерациональный исключительный дивизор, то мы будем иногда говорить, что раздутие ν *нерационально.*

2.4 Род кривой на взвешенной проективной плоскости

Мы увидим, что нерациональные дивизоры над терминальными особенностями реализуются как исключительные дивизоры взвешенных раздутий и псевдораздутий и оказываются конусами над кривыми во взвешенной проективной плоскости. Для удобства воспроизведём формулу для рода (квази)гладкой кривой на взвешенной проективной плоскости из работы [11].

Гиперповерхность $X = \{f(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$, где f — квазиоднородный многочлен, во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(w_0, \ldots, w_n)$ называется *квазигладкой*, если *аффинное* многообразие

$$\{f(x_0, \ldots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

неособо вне начала координат. Квазигладкая гиперповерхность может иметь только факторособенности, поэтому квазигладкая кривая на взвещенной проктивной плоскости является на самом деле просто гладкой.

Пусть $C = \{f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{P}(w_0, w_1, w_2)$ — (квази)гладкая кривая степени d (в градуировке $\deg x = w_0$, $\deg y = w_1$, $\deg z = w_2$). Тогда её род вычисляется по формуле:

$$g(C) = \text{ коэффициент при } t^{d-(w_0+w_1+w_2)} \text{ в формальном ряде} \tag{2.4.1}$$

$$\frac{1-t^d}{(1-t^{w_0})(1-t^{w_1})(1-t^{w_2})}\,.$$

Во многих случаях нам потребуется вычислять род особых кривых. Тогда формула 2.4.1 даёт только арифметический род кривой C, а чтобы найти геометрический род, надо вычислить ещё некоторую поправку, которая зависит от особенностей кривой. Следующая лемма достаточна для наших целей.

Лемма 2.4.1. *Пусть C — кривая на взвешенной проективной плоскости $X = \mathbb{P}(w_0, w_1, w_2)$, не проходящая через особые точки многообразия X. Пусть P_i, $i = 1, \ldots, s$ — особые точки кривой C, в окрестности каждой из которых пара (X, C) аналитически изоморфна паре $(\mathbb{C}^2, \{x^{p_i} = y^{q_i}\})$. Тогда род данной кривой можно вычислить по формуле*

$$g = g_a - \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i q_i + d_i - p_i - q_i}{2}\,,$$

где $d_i = (p_i, q_i)$ — наибольший общий делитель чисел p_i и q_i, а g_a — арифметический род кривой C, который может быть вычислен по формуле (2.4.1)*.*

Доказательство. Как будет видно из дальнейшего, можно ограничиться случаем одной особой точки P типа $x^p = y^q$, $(p, q) = d$.

Сделаем взвешенное раздутие ν плоскости X с центром в P и весами $(q/d, p/d)$ по отношению к локальным координатам x и y. Пусть $U \simeq \mathbb{C}^2$ — аналитическая окрестность точки P, где $(X, C) \simeq (\mathbb{C}^2, \{x^{p_i} = y^{q_i}\})$. Тогда прообраз $\widetilde{U}$ окрестности U покрывается двумя аффинными картами. В первой $U_1 \simeq \frac{1}{q/d}(1, -p/d)$ собственный прообраз C' кривой C задан уравнением

$$y_1^q = 1\,,$$

(см. формулы 2.2.1), т. е. неособ и не проходит через особую точку карты U_1. Исключительный дивизор E раздутия ν в U_1 задан уравнением $x_1 = 0$. Тогда точки пересечения $E \cap C'$ соответствуют решениям уравнения $y_1^q = 1$, но нужно ещё учесть действие группы $\mathbb{Z}_{q/d}(1, -p/q)$. Получаем, что $E \cdot C' = d$.

Аналогично во второй карте $U_2 \simeq \frac{1}{p/d}(-q/d, 1)$

$$C'\colon \quad x_2^p = 1$$

неособ и не проходит через особую точку карты U_2. Таким образом, мы построили разрешение особенностей кривой C. Так как C не проходит через особые точки плоскости X, а C' — через особые точки раздутого многообразия $\tilde{X}$, то и „внизу", и „наверху" применима обычная формула присоединения.

Имеем (см. лемму 2.2.2):

$$K_{\tilde{X}} + C' \equiv \nu^*(K_X + C) + (\frac{p+q}{2} - 1 - \frac{pq}{d})E\,,$$

откуда, пересекая с C', получаем:

$$2g - 2 = 2g_a + p + q - pq - d\,,$$

т. е.

$$g = g_a - \frac{pq + d - p - q}{2}\,,$$

что и требовалось доказать. □

Пример 2.4.2. Рассмотрим кривую

$$\{x^3 + y^4 + x^2z^4 = 0\} \subset \mathbb{P}(4,3,1)$$

степени 12. Очевидно, она не проходит через особые точки $(1:0:0)$ и $(0:1:0)$ плоскости $\mathbb{P}(4,3,1)$. Эта кривая имеет единственную особую точку $(0:0:1)$, в окрестности которой аналитически изоморфна кривой

$$\{x^2 = y^4\} \subset \mathbb{C}^2\,.$$

По формуле 2.4.1 можно подсчитать, что $g_a = 3$. По лемме 2.4.1 поправка равна $\frac{1}{2}(8 + 2 - 2 - 4) = 2$. Следовательно, $g = 1$.

Глава 3

Горенштейновы терминальные особенности

Напомним, что особенность (X, o) называется *горенштейновой*, если канонический дивизор K_X — дивизор Картье, т. е., в окрестности точки o он является дивизором некоторой мероморфной функции. Согласно теореме 2.1.3, к горенштейновым относятся только те трёхмерные терминальные особенности, которые представляют собой изолированные cDV-точки. Нерациональных дивизоров малой дискрепантности над особенностями типа cA нет по результату Ю. Г. Прохорова [8], так что нам остаётся рассмотреть cD- и cE-особенности.

3.1 Терминальные особенности типа cD

Эта часть посвящена доказательству следующего результата.

Теорема 1. *Пусть трёхмерная терминальная особенность* (X, o) *имеет тип* cD_{n+1}, $n \geqslant 3$ *и* $\pi\colon Y \to X$ *— произвольное разрешение. Тогда на многообразии* Y *есть не более одного нерационального дивизора* E *с центом* $\mathrm{center}_X(E) = o$ *и дискрепантностью* $a(E, X) = 1$. *Если особенность* (X, o) *изоморфна особенности в* $\mathbb{C}^4$, *заданной стандартным уравнением* ((2.1.2) *или* (2.1.3)), *то при* $n = 2k-1$ *нерациональный дивизор реализуется как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весом* $(k, k-1, 1, 1)$, *а при* $n = 2k$ *— как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весами* $(k, k, 1, 1)$. *В обоих случаях* E *представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над гиперэллиптической кривой рода* $g \leqslant k-1$.

Для доказательства теоремы 1 мы покажем, что для любой терминальной особенности типа cD существует дивизориальное разрешение, содержащее не более одного нерационального дивизора с дискрепантностью 1. Для особенностей типа cD_4 доказательство фактически содержится в работе [28], предложение 2.13, поэтому далее мы этот случай не рассматриваем.

3.1.1 Случай cD_{2k}

Можно предполагать, что терминальная особенность (X, o) задана в $\mathbb{C}^4$ уравнением

$$x^2 + y^2 z + g(y, z, t) = 0\,,$$

где при весах переменных $w(x) = (2k-1)/2$, $w(y) = k-1$, $w(z) = w(t) = 1$ вес функции g равен $2k-1$, $k > 2$, и многочлен $f = y^2 z + g_{w=2k-1}(y, z, t)$ не содержит в своём разложении на неприводимые кратных множителей (см. условия *а* и *б* перед леммой 2.1.6). Рассмотрим взвешенное раздутие σ пространства $\mathbb{C}^4$ с весами $(k, k-1, 1, 1)$. Обозначим через X_1 собственный прообраз X при этом раздутии и через E — исключительный дивизор ограничения σ на X_1. Тогда E лежит во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(x,y,z,t)}(k, k-1, 1, 1)$ и задаётся уравнением

$$f = y^2 z + g_{w=2k-1}(y, z, t) = 0\,.$$

(Мы обозначили координаты во взвешенном проективном пространстве теми же буквами, что и в $\mathbb{C}^4$.) Ниже мы увидим, что на X_1 лежат только изолированные особенности. Поэтому X_1 нормально и по лемме 2.2.2 можно посчитать дискрепантность $a(X, E_i) = 1$ для любой компоненты E (по условию *б* E приведён). Ясно, что E представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над кривой $\{f(y, z, t) = 0\}$ в $\mathbb{P}_{(y,z,t)}(k-1, 1, 1)$. Если эта кривая (квази)гладкая, то, как нетрудно вычислить, её род равен $k-1$. В общем случае эта кривая может иметь особенности и быть приводимой. Если она приводима, то либо $f = zf_1$, либо $f = yf_2$, где многочлен f_2 линеен по y. Многочлен f_1 в свою очередь может разлагаться на два линейных по y множителя. Отсюда видно, что данная кривая, а вместе с ней и поверхность E, имеет не более одной нерациональной компоненты C. Переменная y входит в её уравнение в степени 2, следовательно, кривая C гиперэллиптична.

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что других нерациональных дивизоров с дискрепантностью 1 над особенностью X нет. Для этого мы исследуем особенности на X_1. Раздутие $\mathbb{C}^4$ и X_1 покрываются четырьмя аффинными картами, каждую из которых мы рассмотрим отдельно.

В первой карте $U_1 \simeq \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k(1, 1, -1, -1)$ отображение σ задаётся формулами:

$$x = x_1^k\,,\ y = x_1^{k-1} y_1\,,\ z = x_1 z_1\,,\ t = x_1 t_1\,.$$

Поэтому X_1 определяется уравнением

$$f_1 = x_1 + y_1^2 z_1 + g_{w=2k-1}(y_1, z_1, t_1) + x_1^{-(2k-1)} g_{w>2k-1}(x_1^{k-1} y_1, x_1 z_1, x_1 t_1) = 0\,.$$

Особенности X_1 могут лежать только на исключительном дивизоре $\{x_1 = 0\}$. Ниже мы полностью исследуем 3-ю и 4-ю карты, так что здесь можно ограничиться рассмотрением множества $\{z_1 = t_1 = 0\}$, которое ими не покрывается. Из этих условий с учётом того, что многочлен $g_{w=2k-1}$ не содержит мономов, зависящих только от y_1, следует, что на нашем множестве $\partial f_1/\partial x_1 = 1$. Значит, f_1 определяет гиперповерхность, гладкую на $\{x_1 = z_1 = t_1 = 0\}$. Группа $\mathbb{Z}_k$ имеет на этой гиперповерхности только одну неподвижную точку — $(0, 0, 0, 0)$. Следовательно, X_1 имеет в первой карте только одну изолированную циклическую факторособенность (по [31], 5.2, она терминальна). Такая особенность тороидальна, поэтому можно построить её дивизориальное разрешение, имеющее только рациональные исключительные дивизоры.

Во второй карте $U_2 \simeq \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_{k-1}(-1, 1, -1, -1)$ отображение σ задается формулами:

$$x = y_2^k x_2\,,\ y = y_2^{k-1}\,,\ z = y_2 z_2\,,\ t = y_2 t_2\,.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением:

$$f_2 = x_2^2 y_2 + z_2 + g_{w=2k-1}(1, z_2, t_2) + y_2^{-(2k-1)} g_{w>2k-1}(y_2^{k-1}, y_2 z_2, y_2 t_2) = 0\,.$$

Как и в первой карте, ограничимся рассмотрением множества $\{y_2 = z_2 = t_2 = 0\}$. Тогда $\partial f_2/\partial z_2 = 1$, т. е. f_2 определяет гладкую гиперповерхность. Мы снова получаем, что X_1 имеет во второй карте единственную изолированную циклическую (терминальную) факторособенность. Эту особенность можно дивизориально разрешить, вклеив только рациональные дивизоры.

В третьей карте $U_3 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задаётся формулами:

$$x = z_3^k x_3\,,\ y = z_3^{k-1} y_3\,,\ z = z_3\,,\ t = z_3 t_3\,.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением:

$$f_3 = x_3^2 z_3 + y_3^2 + g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) + z_3 g_{w=2k}(y_3, 1, t_3) +$$

$$+ z_3^{-(2k-1)} g_{w>2k}(z_3^{k-1} y_3, z_3, z_3 t_3) = 0\,.$$

Особенности X_3 лежат на исключительном дивизоре $\{z_3 = 0\}$. Их можно найти из системы

$$\begin{cases} y_3^2 + g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) = 0 \\ 2y_3 + \frac{\partial}{\partial y_3} g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t_3} g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) = 0 \\ x_3^2 + g_{w=2k}(y_3, 1, t_3) = 0 \\ z_3 = 0\,. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что для того, чтобы X_1 имело особенности в третьей карте, необходимо, чтобы имела особенности кривая

$$\{y_3^2 + g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) = 0\} \subset \mathbb{C}^2_{(y_3,t_3)} \,.$$

Кратность её особенностей равна 2. Отсюда следует, что у X_1 в третьей карте может быть только конечное число изолированных cDV-точек. Дискрепантность $a(F, X_1)$ любого дивизора F над такой точкой $\geqslant 1$, а следовательно (по лемме 2.2.4), $a(F, X) > 1$ и он нас не интересует.

В четвёртой карте $U_4 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задаётся формулами:

$$x = t_4^k x_4 \,,\ y = t_4^{k-1} y_4 \,,\ z = t_4 z_4 \,,\ t = t_4 \,.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением:

$$f_4 = x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + y_4 f(z_4, 1) + h(z_4, 1) + t_4 g_{w=2k}(y_4, z_4, 1) +$$

$$+ t_4^{-(2k-1)} g_{w>2k}(t_4^{k-1} y_4, t_4 z_4, t_4) = 0 \,,$$

где мы положили $g_{w=2k-1} = yf(z,t) + h(z,t)$. Особенности лежат на исключительном дивизоре $\{t_4 = 0\}$; кроме этого, так как третью карту мы исследовали полностью, можно считать, что $z_4 = 0$.

Чтобы многообразие X_1 имело особенности, необходимо $f(0,1) = h(0,1) = 0$. Линейной заменой y_4 приведем уравнение X_1 к виду

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + z_4 h_1(z_4) + t_4 g'_{w=2k}(y_4, z_4, 1) + t_4^2 h'(y_4, z_4, t_4) = 0 \,,$$

где h' — некоторая функция а h_1 — многочлен. Далее нетрудно показать, что если ряд

$$z_4 h_1(z_4) + t_4 g'_{w=2k}(y_4, z_4, 1) + t_4^2 h'(y_4, z_4, t_4)$$

содержит хотя бы один моном степени 2, то X_1 имеет в четвертой карте только изолированные cDV-точки. Если же это условие не выполнено, то X_1 имеет в начале координат изолированную особенность вида

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + g'(y_4, z_4, t_4) = 0 \,,$$

где ряд g' начинается с членов степени 3 или выше. Эта особенность не терминальна, но, как мы знаем (2.2.5), она канонична. Следовательно, по лемме 2.2.4 для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что все дивизоры дискрепантности 0 над такой особенностью рациональны.

Во-первых заметим, что заменой переменных можно добиться, чтобы часть g' степени 3 имела вид

$$g'_3 = a_1 z_4^3 + a_2 t_4 z_4^2 + a_3 t_4^2 y_4 + a_4 t_4^2 z_4 + a_5 t_4^3 \,, \tag{3.1.1}$$

где a_i, $i = 1, \ldots, 5$ — некоторые числа. Сделаем обыкновенное раздутие σ_1 начала координат карты U_4 и обозначим X_2 собственный прообраз X_1, а E_1 — исключительный дивизор ограничения отображения σ_1 на X_2. Поверхность E_1 задаётся в $\mathbb{P}^3$ уравнением

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + g_3'(y_4, z_4, t_4) = 0\,.$$

По переменным x_4 и y_4 степень этого уравнения 2. В аффинном куске $\{t_4 \neq 0\}$ рассмотрим сечения плоскостями $z_4 = \mathrm{const}$. Если общее сечение — неприводимая коника, то E_1 — рациональная поверхность. В противном случае уравнение E_1 имеет вид

$$x_4^2 + z_4(y_4 + (\ldots))^2 = 0\,,$$

где под $(\ldots)$ понимаются некоторые линейные по z_4 и t_4 члены. Очевидно, E_1 снова рациональна.

Теперь исследуем новые особенности, которые могут появиться на многообразии X_2. Для этого снова нужно рассмотреть четыре карты $V_i \simeq \mathbb{C}^4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

В первой карте V_1 уравнение многообразия X_2

$$f_1' = t_1' + (y_1')^2 z_1' + g_3'(y_1', z_1', t_1') + (x_1')^{-3} g_{>3}'(x_1' y_1', x_1' z_1', x_1' t_1') = 0\,,$$

Особенности лежат на исключительном дивизоре $\{x_1' = 0\}$ и определяютя из системы

$$f_1'(0, y_1', z_1', t_1') = t_1' + (y_1')^2 z_1' + g_3'(y_1', z_1', t_1') = 0$$
$$(\partial/\partial y_1') f_1'(0, y_1', z_1', t_1') = 2y_1' z_1' + a_3 (t_1')^2 = 0$$
$$(\partial/\partial z_1') f_1'(0, y_1', z_1', t_1') =$$
$$= (y_1')^2 + 3a_1 (z_1')^2 + 2a_2 t_1' z_1' + a_4 t_1' = 0$$
$$(\partial/\partial t_1') f_1'(0, y_1', z_1', t_1') =$$
$$= 1 + a_2 (z_1')^2 + 2t_1'(a_3 y_1' + a_4 z_1' + a_5 t_1') + a_5 (t_1')^2 = 0$$
$$(\partial/\partial x_1') f_1'(0, y_1', z_1', t_1') = g_4'(y_1', z_1', t_1') = 0\,.$$

Домножим второе, третье и четвёртое уравнения соответственно на y_1', z_1' и t_1', сложим и сравним с первым. Учитывая (3.1.1), получим, что $t_1' = 0$. Тогда y_1' и z_1' находятся из системы

$$\begin{cases} 2y_1' z_1' = 0 \\ (y_1')^2 + 3a_1 (z_1')^2 = 0 \\ 1 + a_2 (z_1')^2 = 0\,. \end{cases}$$

Из неё следует, что X_2 имеет особенности в первой карте только если $a_1 = 0$, а $a_2 \neq 0$. Все эти особенности — изолированные точки типа cA. По лемме 2.2.4 исключительные дивизоры над ними имеют дискрепантность > 1 над X.

Во второй карте V_2 уравнение многообразия X_2

$$(x_2')^2 t_2' + z_2' + g_3'(1, z_2', t_2') + (y_2')^{-3} g_{>3}'(y_2', y_2' z_2', y_2' t_2') = 0\,.$$

Особенности лежат на исключительном дивизоре $\{y_2' = 0\}$. Кроме этого, можно считать $x_2' = 0$, ибо мы полностью исследовали карту V_1. Поэтому особенности можно найти из системы

$$z_2' + g_3'(1, z_2', t_2') = 0$$

$$1 + \frac{\partial}{\partial z_2'} g_3'(1, z_2', t_2') = 1 + 3a_1 (z_2')^2 + 2a_2 z_2' t_2' + a_4 (t_2')^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2'} g_3'(1, z_2', t_2') = a_2 (z_2')^2 + 2a_3 t_2' + 2a_4 z_2' t_2' + 3a_5 (t_2')^2 = 0$$

$$g_4'(1, z_2', t_2') = 0\,.$$

Домножим второе и третье уравнения соответственно на z_2' и t_2', сложим и сравним с первым. Учитывая (3.1.1), получим уравнение

$$2z_2' + a_3 (t_2')^2 = 0\,.$$

Если $a_3 = 0$, то $z_2' = 0$. В этом случае X_2 либо неособо, либо имеет две особые точки типа cA. Если $a_3 \neq 0$, то подставив $z_2' = -(a_3/2)(t_2')^2$ во второе уравнение системы, получим нетривиальное уравнение на t_2'. Поэтому X_2 может иметь во второй карте только конечное число изолированных особых точек $(0, 0, {z_2'}^{(i)}, {t_2'}^{(i)})$. Все они имеют тип cDV, и, следовательно, не могут дать дивизоров с дискрепантностью 1 над X.

В третьей карте V_3 уранение многообразия X_2

$$(x_3')^2 t_3' + (y_3')^2 + g_3'(y_3', 1, t_3') + (z_3')^{-3} g_{>3}'(z_3' y_3', z_3', z_3' t_3') = 0\,.$$

Здесь осталось проверить особенности на оси t_3'. Очевидно, что гиперплоское сечение вида $t_3' = \mathrm{const}$ при $\mathrm{const} \neq 0$ неособо или имеет тип A. При $t_3' = 0$ рассмотрим сечение вида $t_3' = \alpha z_3'$ для достаточно общего α: оно имеет тип не хуже cD. Таким образом, в третьей карте X_2 имеет только cDV-точки. Если они изолированы, то доказательство завершается как и в предыдущих случаях. Неизолированный случай рассмотрим ниже.

В четвёртой карте V_4 уравнение многообразия X_2

$$(x_4')^2 + (y_4')^2 z_4' + g_3'(y_4', z_4', 1) + (t_4')^{-3} g_{>3}'(t_4' y_4', t_4' z_4', t_4') = 0\,.$$

Тут остаётся исследовать только точку $(0,0,0,0)$. Гиперплоское сечение вида $t'_4 = \alpha z'_4$ для достаточно общего α имеет тип D. Т.е. и в четвертой карте X_2 имеет только cDV-особенности. В изолированном случае доказательство заканчивается, как в картах V_1 и V_2.

Остаётся рассмотреть случай, когда многообразие X_2 имеет неизолированную cDV-особенность вдоль некоторой проективной прямой l, причём в общей точке этой прямой особенность имеет тип cA. По лемме 2.2.4 нас интересуют только дивизоры с дискрепантностью 0 над X_2. Центр любого такого дивизора на многообразии X_2 — прямая l. Поэтому достаточно показать, что особенность в общей точке l можно разрешить, вклеив только рациональные дивизоры.

Так как нас интересует только общая точка прямой l, можно ограничиться одним аффинным куском X_2, например, лежащим в карте V_3. Итак, пусть наша особенность задана уравнением

$$(x'_3)^2 t'_3 + (y'_3)^2 + h'(y'_3, z'_3, t'_3) = 0\,,$$

иммет тип cA_n, причём особенности лежат вдоль оси t'_3. Сделаем раздутие этой оси. Если $n = 1$ (это означает, что в h' есть хотя бы один моном степени 2 по y'_3 и z'_3), то первое же раздутие разрешает особенность в общей точке l, причем исключительный дивизор рационален. Если $n \geqslant 2$, то рациональность исключительного дивизора видна из его уравнения в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^1$:

$$(x'_3)^2 t'_3 + (y'_3)^2 = 0\,.$$

При $n = 2$ особенность в общей точке прямой l также разрешаются за одно раздутие. Пусть дальше $n > 2$.

Раздутое многообразие X_3 покрывается тремя картами $X_3 \cap (W_i \simeq \mathbb{C}^3 \times \times \mathbb{C}^1)$, $i = 1, 2, 3$.

В первых двух картах многообразие X_3 неособо. Действительно, например, в первой карте с координатами u_1, v_1, w_1, t'_3 многообразие X_3 задано уравнением

$$t'_3 + v_1^2 + u_1^{-2} h'(u_1 v_1, u_1 w_1, t'_3) = 0\,.$$

Очевидно, частная производная по t'_3 не обращается в 0 нигде на исключительном дивизоре $u_1 = 0$.

В третьей карте многообразие X_3 задано уравнением

$$u_3^2 t'_3 + v_3^2 + w_3^{-2} h'(w_3 v_3, w_3, t'_3) = 0\,.$$

Так как в первых двух картах X_3 неособо, здесь особенности могут лежать только вдоль оси t'_3. Благодаря делению функции h' на w_3^2 общее сечение $t'_3 = \mathrm{const}$ имеет тип cA_{n-2}, т. е. мы приходим к той же ситуации, с которой начинали, но уже с меньшим n. Поэтому конечное число раздутий прямых разрешает особенность в общей точке l и исключительные дивизоры этих раздутий рациональны, что и требовалось доказать.

3.1.2 Случай cD_{2k+1}.

Пусть терминальная особенность (X, o) задана в $\mathbb{C}^4$ уравнением

$$x^2 + y^2 z + g(y, z, t) = 0\,,$$

где при весах переменных $w(x) = k$, $w(y) = (2k-1)/2$, $w(z) = w(t) = 1$ вес функции g равен $2k$, $k > 2$ (см. условие a перед леммой 2.1.6). Рассмотрим взвешенное раздутие σ с весами $(k, k, 1, 1)$. Исключительный дивизор E его ограничения на собственный прообраз особенности X задан в $\mathbb{P}(k, k, 1, 1)$ уравнением

$$x^2 + g_{w=2k}(z, t) = 0$$

и представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над соответствующей кривой C в $\mathbb{P}(k, 1, 1)$. Заметим, что E либо неприводим и приведён, $a(E, X) = 1$, либо распадается на две приведённые рациональные компоненты. Если кривая C (квази)гладкая, то её род равен $k - 1$. Переменная x входит в уравнение для C в степени 2, поэтому если кривая C неприводима, то она гиперэллиптична.

Далее обозначим X_1 собственный прообраз X при морфизме σ и изучим его особенности. Многообразие X_1 покрывается четырьмя картами, каждую из которых мы рассмотрим отдельно.

В первой карте $U_1 \simeq \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k(1, 0, -1, -1)$ отображение σ задаётся формулами:

$$x = x_1^k\,,\ y = x_1^k y_1\,,\ z = x_1 z_1\,,\ t = x_1 t_1\,.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$1 + x_1 y_1^2 z_1 + g_{w=2k}(z_1, t_1) + x_1^{-2k} g_{w>2k}(x_1^k y_1, x_1 z_1, x_1 t_1) = 0\,.$$

Его особенности лежат на исключительном дивизоре $\{x_1 = 0\}$. Так как функция $g_{w=2k}$ однородна, в особой точке $g_{w=2k} = 0$. Следовательно, X_1 в первой карте неособо.

Во второй карте $U_2 \simeq \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k(0, 1, -1, -1)$ отображение σ задаётся формулами

$$x = y_2^k x_2\,,\ y = y_2^k\,,\ z = y_2 z_2\,,\ t = y_2 t_2\,.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$x_2^2 + y_2 z_2 + g_{w=2k}(z_2, t_2) + y_2^{-2k} g_{w>2k}(y_2^k, y_2 z_2, y_2 t_2) = 0\,. \qquad (3.1.2)$$

Можно считать, что $x_2 = y_2 = 0$, ибо особенности лежат на исключительном дивизоре и мы полносью исследовали первую карту. Кроме этого, будем считать, что $z_2 = t_2 = 0$, потому что ниже мы полностью рассмотрим третью и четвёртую карты, т. е. нужно проверить только точку $(0, 0, 0, 0)$. Очевидно, что в ней многообразие X_1 имеет особенность типа cA_1/k. Эта особенность может быть неизолированной. В изолированном случае все дивизоры с дискрепантностью $a < 1$ над X_1 рациональны по результату Прохорова [8]. Дивизоры с бóльшими дискрепантностями нас не интересуют (лемма 2.2.4). Неизолированный случай мы рассмотрим ниже.

В третьей карте $U_3 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задаётся формулами:

$$x = z_3^k x_3\,,\ y = z_3^k y_3\,,\ z = z_3\,,\ t = z_3 t_3\,.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$x_3^2 + y_3^2 z_3 + g_{w=2k}(1, t_3) + z_3^{-2k} g_{w>2k}(z_3^k y_3, z_3, z_3 t_3) = 0\,.$$

По тем же соображениям, что и выше, можно считать, что особенности лежат в множестве $\{x_3 = z_3 = 0\}$. Поэтому особые точки находятся из системы

$$\begin{cases} g_{w=2k}(1, t_3) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t_3} g_{w=2k}(1, t_3) = 0 \\ y_3^2 + g_{w=2k+1}(y_3, 1, 0) = 0\,. \end{cases}$$

Так как $g_{w=2k}(1, t)$ не равно тождественно нулю, отсюда видно, что многообразие X_1 может иметь в карте U_3 только изолированные cDV-точки. Дивизоры над этими точками имеют дискрепантности $a > 1$ над X.

В четвёртой карте $U_4 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задаётся формулами

$$x = t_4^k x_4\,,\ y = t_4^k y_4\,,\ z = t_4 z_4\,,\ t = t_4\,.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$x_4^2 + y_4^2 z_4 t_4 + g_{w=2k}(z_4, 1) + t_4^{-2k} g_{w>2k}(t_4^k y_4, t_4 z_4, t_4) = 0\,.$$

Неисследованными остаются только особенности, лежащие в $\{x_4 = z_4 = t_4 = 0\}$, т. е. на оси y_4. Представим квазиоднородную часть степени $2k+1$ функции g следующи образом:

$$g_{w=2k+1} = y h_{w=k+1}(z, t) + h_{w=2k+1}(z, t)\,.$$

Тогда в особой точке должно выполнятся равенство (полученное путём дифференцирования уравнения X_1 по t_4)

$$y_4 h_{w=k+1}(0, 1) + h_{w=2k+1}(0, 1) = 0\,.$$

Если это уравнение на y_4 нетривиально, то X_1 имеет в четвёртой карте не более одной особой точки, тип которой cA. Если же $(\partial/\partial z_4)g_{w=2k}(0,1) = g_{w=2k}(0,1) = h_{w=k+1}(0,1) = h_{w=2k+1}(0,1) = 0$, то X_1 обладает неизолированной особенностью вдоль оси y_4. Гиперплоское сечение вида $y_4 = \mathrm{const} = \alpha$ имеет, очевидно, тип A_1 для общего α. Пусть z_4^3 делит $g_{2k}(z_4, 1)$ и мономы $y_4z_4t_4$ и z_4t_4 входят в ряд $t_4^{-2k}g_{w>2k}(t_4^ky_4, t_4z_4, t_4)$ с коэффициентами b и c соотоветственно. Тогда при тех α, которые являются корнями квадратного уравнения $y_4^2 + by_4 + c = 0$, сечение $y_4 = \alpha$ имеет худшие, чем A, особенности: если корни данного уравнения различны, то тип этих особенностей D, если же уравнение имеет один двукратный корень α_0, то особенность в точке $(0, \alpha_0, 0, 0)$ может быть недювалевской. Перенеся начало координат в точку $(0, \alpha_0, 0, 0)$, приведем уравнение многообразия X_1 к виду

$$x_4^2 + y_4^2z_4t_4 + g'(y_4, z_4, t_4) = 0\,, \tag{3.1.3}$$

где степени всех мономов ряда g' по z_4 и t_4 не меньше 2. Если в g' входят мономы степени $\leqslant 3$, то особенность в 0 дювалевская (нужно рассмотреть сечение $t_4 = \beta y_4$ или $z_4 = \beta y_4$).

Итак, мы установили, что если многообразие X_1 обладает неизолированной особенностью, то это особенность типа cA_1 в общей точке некоторой прямой l. Нас интересуют только дивизоры с дискрепанотностью < 1 над X_1. Если центр такого дивизора — прямая l, то его дискрепантность равна 0. Как мы видели в случае cD_{2k}, такой дивизор единствен и рационален. Кроме этого дивизоры с дискрепантностью < 1 могут быть двух видов: дивизоры с дисрепантностью a, $0 < a < 1$, над началом координат карты U_2 (неизолированная особенность типа cA/k), и дивизоры с дискрепантностью 0 над точкой $(0, 0, 0, 0)$ вида (3.1.3) (если ряд g' начинается с членов степени 4 или выше). Покажем, что все такие дивизоры рациональны.

В неизолированном случае в карте U_2 существует такая совместимая с действием группы аналитическая замена координат, что в окрестности 0 многообразие X_1 будет задаваться уравнением

$$x'^2 + y'z' = 0 \subset \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k(0, 1, -1, -1)\,.$$

Действительно, с помощью метода, описанного в доказательстве леммы 2.1.8, можно построить по крайней мере *формальную* замену переменных, переводящую уравнение (3.1.2) в данное. Но тогда по результату М. Артина [9], следствие 1.6, существует и подходящая аналитическая замена.

Сделаем взвешенное раздутие с весами $(1/k)(k, 1, 2k-1, 1)$ ([12], §6). Тривиально проверяется, что исключительный дивизор рационален и на исключительном дивизоре раздутого многообразия лежат только циклические факторособенности и cDV-точки. Например, в третьей карте, изоморфной

$$\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_{2k-1}(-k,-1,k,-1)\,,$$

собственный прообраз данной особенности задан уравнением

$$x_3'^2 + y_3' = 0\,.$$

Очевидно, он имеет только одну циклическую факторособенность в начале координат.

В четвёртой карте $\simeq \mathbb{C}^4$ уравнение собственного прообраза

$$x_4'^2 + y_4'z_4' = 0\,.$$

На исключительном дивизоре $\{t_4' = 0\}$ лежит единственная особая точка типа cA. Следовательно, все дивизоры с дискрепантностью < 1 над $0 \in X_1$ рациональны.

Теперь рассмотрим точку вида (3.1.3), где ряд g' начинается с членов степени $\geqslant 4$ и все мономы имеют степень $\geqslant 2$ по z_4 и t_4. Мы хотим показать, что все дивизоры с дискрепантносью 0 и центром в $(0,0,0,0)$ рациональны. Сделаем раздутие с весами $(2,1,1,1)$. Его исключительный дивизор E задан в $\mathbb{P}(2,1,1,1)$ уравнением

$$x_4^2 + y_4^2z_4t_4 + g_4'(y_4,z_4,t_4) = 0\,.$$

Заметим, что степень этого уравнения по x_4 и y_4 равна 2. Поэтому в афинном куске $t_4 \neq 0$ сечения поверхности E плоскостями $z_4 = \mathrm{const}$ — коники. Если общая коника неприводима, то E рациональна. В противном случае уравнение E в $\{t_4 \neq 0\}$ имеет вид

$$x_4^2 + z_4(y_4 + (\dots))^2 = 0\,,$$

где под $(\dots)$ подразумевается некоторая линейная функция от z_4. Очевидно, E снова рациональна.

Теперь исследуем особенности раздутого многообразия X_2. Оно покрывается четырьмя афинными картами V_i, $i = 1,2,3,4$. Тривиально проверяется, что в карте V_1 многообразие X_2 неособо.

Во второй карте $V_2 \simeq \mathbb{C}^4$ многообразие X_2 задано уравнением

$$(x_2')^2 + z_2't_2' + g_4'(1,z_2',t_2') + (y_2')^{-4}g_{>4}'(y_2',y_2'z_2',y_2't_2') = 0\,.$$

Для нас важны особенности, которые лежат на исключительном дивизоре $\{y_2' = 0\}$. Все такие особенности происходят из особенностей кривой $\{z_2't_2' + g_4'(1,z_2',t_2') = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Это кривая степени 4 и у нее есть обыкновенная двойная особая точка в 0. Если эта кривая неприводима, то другие её особые точки также имеют кратность 2. Все они дают cDV точки на многообразии X_2. Если кривая приводима, то из анализа возможных комбинаций следует, что все особенности на X_2 все равно имеют тип cDV, но может присутствовать неизолированная особенность вдоль некоторой прямой $l \subset E$, причем особенность в общей точке l имеет тип cA. Это соответствует конфигурации, когда данная квартика распадается на три прямые, одна из которых двойная. Такая ситуация уже была рассмотрена нами в части 3.1.1 — мы знаем, что все дивизоры с дискрепантностью 0 и центром в l рациональны. Для примера рассмотрим ещё случай, когда квартика распадается на кубику и прямую. Если прямая и кубика пересекаются в трёх различных точках, то ясно, что многообразие X_2 имеет в соответствующих точках особенности не хуже cA_1. Если прямая касается кубики, то X_2 в соответствующей точке имеет особенность не хуже cA, а если сама кубика имеет особую точку и прямая через неё проходит — то особенность не хуже D. Заметим, что данная прямая не может быть двойной касательной в каспе, ибо тогда квартика не имела бы обыкновенной двойной точки.

В третьей карте X_2 задано уравнением

$$(x_3')^2 + (y_3')^2 t_3' + g_4'(y_3', 1, t_3') + (z_3')^{-4} g_{>4}'(z_3' y_3', z_3', z_3' t_3') = 0\,.$$

Остаётся исследовать особенности, лежащие в $\{x_3' = y_3' = z_3' = 0\}$, т. е. на оси t_3'. Из уравнения непосредственно видно, что все точки оси t_3' имеют тип cDV и cA в общей точке (или гладкие). Особенности такого типа уже были изучены нами в части 3.1.1. Четвёртая карта рассматривается совершенно аналогично. Этим завершается доказательство в случае cD_{2k+1}, а вместе с ним и всей теоремы 1.

3.1.3 Примеры

Пример 3.1.1. Рассмотрим особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ типа cD_{2k}, $k > 1$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0\,.$$

При раздутии с весами $(k, k-1, 1, 1)$ в качестве исключительного дивизора E вклеивается бирационально-линейчатая поверхность над кривой

$$C = \{y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0\} \subset \mathbb{P}(k-1, 1, 1)\,.$$

Очевидно, это квазигладкая кривая, её род $g(C) = k - 1$. Дискрепантность $a(E, X) = k + k - 1 + 1 + 1 - 1 - (2k - 1) = 1$ по лемме 2.2.2. Этот пример показывает, что нерациональный исключительный дивизор E может быть бирационально-линейчатой поверхностью над гиперэллиптической кривой произвольного рода.

Пример 3.1.2. Пусть особенность X типа cD_{2k} задана уравнением

$$x^2 + y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k+2} = 0\,.$$

При взвешенном раздутии $(k, k-1, 1, 1)$ исключительный дивизор состоит из трех рациональных компонент $\{z = 0\}$, $\{y = iz^{k-1}\}$, $\{y = -iz^{k-1}\} \subset \subset \mathbb{P}(k, k-1, 1, 1)$. Раздутое многообразие X_1 покрывается четырьмя картами. В четвёртой карте, изоморфной $\mathbb{C}^4$, X_1 задано уравнением

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + z_4^{2k-1} + t_4^3 = 0\,.$$

Мы получаем изолированную каноническую (не терминнальную) особенность в 0; на исследование особенностей такого типа были потрачены основные усилия при доказательстве теоремы 1 в случае cD_{2k}. Нерациональных дивизоров с дискрепантностью 1 у данной особенности X нет.

Пример 3.1.3. Соответствующими примерами в случае cD_{2k+1} являются особенности

$$x^2 + y^2 z + z^{2k} + t^{2k} = 0$$

и

$$x^2 + y^2 z + z^{2k} + t^{2k+4} = 0\,.$$

При взвешенном раздутии $(k, k, 1, 1)$ первой в качестве исключительного дивизора получаем бирационально-линейчатую поверхность над кривой рода $k-1$. На раздутом многообразии имеется единственная терминальная особая точка типа cA/k во второй карте.

При раздутии второй особенности исключительный дивизор распадается на две рациональные компоненты $\{x = iz^k\}$ и $\{x = -iz^k\}$. Раздутое многообразие имеет неизолированную каноническую особенность вдоль прямой. В общей точке этой прямой тип особенности cA_1, в начале координат второй карты — cA/k и в начале координат четвёртой аффинной карты особенность недювалевская:

$$\{x_4^2 + y_4^2 z_4 t_4 + z_4^{2k} + t_4^4 = 0\} \subset \mathbb{C}^4\,.$$

У данной особенности нерациональных дивизоров с дискрепантностью 1 нет.

3.2 Терминальные особенности типа cE

В этой части мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 2. *Пусть* (X, o) *— терминальная точка типа* cE*, изоморфная особенности в* $\mathbb{C}^4$*, определённой одним из стандартных уравнений* (2.1.4), (2.1.5) *или* (2.1.6)*. Кроме этого, предположим, что это уравнение невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда для любого разрешения* $\pi\colon Y \to X$ *существует не более одного нерационального исключительного дивизора* $E \subset Y$ *с дискрепантностью* $a(E, X) = 1$ *и* $\operatorname{center}_X(E) = o$.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 предположим, что* E *— нерациональный дивизор над* X *с* $a(E, X) = 1$ *и* $\operatorname{center}_X(E) = o$*. Тогда* E *бирационально изоморфен исключительному дивизору взвешенного раздутия* σ_w*, где все возможные веса* w *перечислены ниже.*

(i) *Если* X *имеет тип* cE_6*, то вес* w *— один из следующих:*
1) $w = (2, 2, 1, 1)$*;*
2) $w = (3, 2, 2, 1)$*;*
3) $w = (4, 3, 2, 1)$*.*
Во всех случаях $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$*, где* C *— кривая рода* 1.

(ii) *Если* X *имеет тип* cE_7*, то вес* w *— один из следующих:*
1) $w = (3, 2, 2, 1)$*; 2)* $w = (4, 3, 2, 1)$*;*
3) $w = (5, 3, 2, 1)$*; 4)* $w = (6, 4, 3, 1)$*.*
В случаях 1), 2), 4) поверхность $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$*, где* C *— кривая рода* 1.
В случае 3) род $g(C) \leq 3$ *и* C *может быть негиперэллиптической.*

(iii) *Если* X *имеет тип* cE_8*, то вес* w *— один из следующих:*
1) $w = (3, 2, 2, 1)$*; 2)* $w = (4, 3, 2, 1)$*; 3)* $w = (5, 3, 2, 1)$*;*
4) $w = (6, 4, 3, 1)$*; 5)* $w = (7, 5, 3, 1)$*; 6)* $w = (8, 5, 3, 1)$*;*
7) $w = (9, 6, 4, 1)$*; 8)* $w = (12, 8, 5, 1)$*.*
В случае 6) поверхность $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$*, где* $g(C) \leq 4$ *и* C *может быть негиперэллиптической. В остальных случаях* $g(C) = 1$.

Для доказательства рассмотрим вложенное торическое разрешение $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ данной невырожденной терминальной cE-точки $0 \in X \subset \mathbb{C}^4$, $X = \{f = 0\}$. Обозначим через Σ соответствующее разбиение октанта $\mathbb{R}^4_{\geqslant 0}$ и возьмём примитивный вектор $w \in \mathbb{Z}^4_{>0}$ вдоль одномерного конуса τ из Σ. Как в лемме 2.3.2, положим $E_\tau \cap \widetilde{X} = \cup_j E_j$. Так как у любых двух разбиений октанта $\mathbb{R}^4_{\geqslant 0}$ есть общее подразбиение, дивизоры E_j находятся во взаимно-однозначном соответствии с исключительными дивизорами взвешенного раздутия σ_w. Если $E'_j \subset \operatorname{Exc}(\sigma_w)$ соответствует E_j, то E'_j и E_j бирационально изоморфны.

Дивизор $\operatorname{Exc}\sigma_w$ задаётся в $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ уравнением

$$f_{\rho(w)}(x, y, z, t) = 0\,,$$

где $f_{\rho(w)}$ — часть ряда f, соответствующая грани

$$\rho(w) = \{v \in \Gamma(f) \,|\, \langle w, v\rangle = w(f)\}\,.$$

Теперь разберём случаи cE_6, cE_7, cE_8 по отдельности.

3.2.1 cE_6

Пусть особенность $0 \in X$ имеет тип cE_6. Тогда она определена в $\mathbb{C}^4$ уравнением (2.1.4)

$$\begin{gathered} f = x^2 + y^3 + z^4 + a_1t^{b_1} + a_2zt^{b_2} + a_3z^2t^{b_3} + \\ + a_4yt^{b_4} + a_5yzt^{b_5} + a_6yz^2t^{b_6} + (\dots) = 0\,. \end{gathered}$$

По нашему предположению, ряд f невырожден. Пример диаграммы Ньютона для $f(0, y, z, t)$ приведён на рис. 3.1. Заметим, что (2.1.4) содержит только один моном с переменной x (x^2), поэтому $\Gamma(f)$ полностью определяется диаграммой Ньютона для $f(0, y, z, t)$.

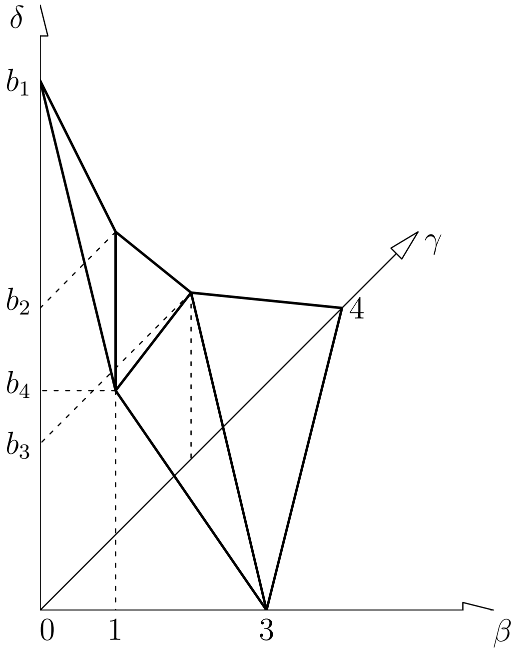

Рис. 3.1: Диаграмма Ньютона cE_6-особенности

Допустим, что E — нерациональный дивизор над X с дискрепантностью $a(E, X) = 1$ и $\operatorname{center}_X(E) = 0$. Тогда мы можем рассматривать E как исключительный дивизор некоторого взвешенного раздутия σ_w; обозначим через

ρ соответствующую грань $\Gamma(f)$ (т. е. $E = \{f_\rho = 0\}$). Ясно, что 0-мерные грани дают только рациональные дивизоры. Если ρ — 1-мерная грань, то f_ρ представляет собой либо квазиоднородный полином от z и t, либо полином, содержащий только два монома. В обоих случаях f_ρ определяет рациональные поверхности. Нам остаётся рассмотреть только случаи $\dim\rho = 2$ и $\dim\rho = 3$.

Если грань ρ не содержит ни одного из мономов x^2, y^3, z^4, то она содержит хотя бы один из мономов yt^{b_4}, yzt^{b_5}, $yz^2t^{b_6}$, поэтому E рационален.

Пусть $L \subset (\mathbb{R}^4)^*$ — такая гиперплоскость, что $L \supset \rho$ и w нормален к L. Ясно, что диаграмма $\Gamma(f)$ лежит над L. Запишем уравнение L в отрезках на осях:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1\,,$$

где α, β, γ, δ — координаты в $(\mathbb{R}^4)^*$. Если $m = \text{НОК}(a, b, c, d)$, то $m = w(f)$ и $w_1 = m/a$, $w_2 = m/b$, $w_3 = m/c$, $w_4 = m/d$. В нашем случае
(i) ($a = 2$, $b \leqslant 3$, $c \leqslant 4$) или ($a < 2$, $b = 3$, $c \leqslant 4$) или ($a < 2$, $b < 3$, $c = 4$).
Из условия $a(E, X) = 1$, по следствию 2.3.4 мы получаем
(ii) $m(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) - 1 - m = 1$.

Лемма 3.2.1. *Пусть a, b, c, $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяют условиям (i) и (ii). Тогда четвёрка (a, b, c, d) может быть только одной из следующих:*
1) $(2, 2, 4, 4)$*;*
2) $(2, 3, 3, 6)$*;*
3) $(2, 8/3, 4, 8)$*;*
4) $(2, 3, 4, 12)$.

Доказательство. Случай 1: $a = 2$. Здесь $m = 2k$. Имеем:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12},.$$

Поэтому $m(1/a + 1/b + 1/c + 1/d) - 1 - m \geqslant m(\frac{1}{12} + \frac{1}{d}) - 1$. Из (ii) следует, что

$$\frac{m}{12} + \frac{m}{d} \leqslant 2\,.$$

Так как $m/d \in \mathbb{Z}_{>0}$, получаем $m/d = 1$, $m \leqslant 12$. С другой стороны, ясно, что $m \geqslant 4$.

Пусть $m = d = 4$. Тогда из (ii) получаем:

$$4(\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{4} - 1) = 2\,,$$

$$\frac{4}{b} + \frac{4}{c} = 3\,.$$

Но $4/b$ и $4/c$ — целые числа. Учитывая ещё условие (i), получаем единственную возможность $b = 2$, $c = 4$. Это даёт случай 1).

Пусть $m = d = 6$. Здесь мы получаем $6/b + 6/c = 4$. Единственная возможность — $b = 3$, $c = 3$. Это даёт случай 2).

Пусть $m = d = 8$. Здесь мы находим: $b = 8/3$, $c = 4$. Это случай 3).

Пусть $m = d = 10$. Получаем $10/b + 10/c = 6$. Так как $b \leqslant 3$, имеем $10/b \geqslant 4$; но так как $c \leqslant 4$, должно быть $10/c \geqslant 3$, противоречие.

Пусть $m = d = 12$. Единственная возможность — $b = 3$, $c = 4$, т. е. случай 4).

Случай 2: $a < 2$. В этом случае

$$m(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) - 1 - m > m(\frac{1}{12} + \frac{1}{d}) - 1\,.$$

Следовательно, $\frac{m}{12} + \frac{m}{d} < 2$, $m < 12$, $d = m$.

Случай 2.1: $b = 3$. Здесь $m = 3k$, т. е. $m = 6$ или 9.

Пусть $m = d = 6$. Получаем

$$6(\frac{1}{a} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} + \frac{1}{6} - 1) = 2\,,$$

$$\frac{6}{a} + \frac{6}{c} = 5\,.$$

Так как $6/a \in \mathbb{Z}$ и $a < 2$, имеем $6/a = 4$, а значит $c = 6$. Это противоречит (i).

Пусть $m = d = 9$. Здесь $9/a + 9/c = 7$. Как и выше, получаем противоречие.

Случай 2.2: $b < 3$, $c = 4$. В этом случае $m = 4k$, т. е. $m = 4$ или 8. В обоих случаях мы легко приходим к противоречию. □

Случаи 1), 2), 3) леммы 3.2.1 отвечают раздутиям (i) 1), 2), 3) теоремы 3 соответственно. Случай 4) даёт раздутие $\sigma = (6, 4, 3, 1)$. Это plt-раздутие ([15], предложение 3.2) и его исключительный дивизор рационален (лемма 2.3.5).

Теперь покажем, что если нерациональный дивизор E с $a(E, X) = 1$ существует, то он единствен. Действительно, допустим, что E — исключительный дивизор раздутия $(2, 2, 1, 1)$. Тогда E задан в $\mathbb{P}(2, 2, 1, 1)$ уравнением

$$x^2 + z^4 + a_1t^4 + a_2zt^3 + a_3z^2t^2 = 0\,,$$

где $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$ (иначе E рационален). Легко видеть, что в этом случае исключительные дивизоры раздутий $(3, 2, 2, 1)$ и $(4, 3, 2, 1)$ заданы уравнениями $t^4 = 0$ или $zt^3 = 0$ и, следовательно, они рациональны.

Теперь допустим, что раздутие $\sigma = (3,2,2,1)$ имеет нерациональный исключительный дивизор E. Это означает, что диаграмма Ньютона $\Gamma(f)$ лежит над гиперплоскостью

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{4}+\frac{\delta}{6}=1$$

и E определён в $\mathbb{P}(3,2,2,1)$ уравнением

$$x^2+y^3+a_1t^6+a_2zt^4+a_3z^2t^2+a_4yt^4+a_5yzt^2=0\,,$$

но так как E нерационален, должно быть $a_2=a_3=a_5=0$ (иначе σ было бы plt-раздутием, см. ниже), но $a_1\neq 0$ или $a_4\neq 0$. Очевидно, исключительный дивизор раздутия $(4,3,2,1)$ рационален.

Допустим, например, что $a_2\neq 0$ и покажем, что в этом случае σ действительно является plt-раздутием. По предложению 3.2 работы [15] мы должны проверить, что точка $\mathbf{1}=(1,1,1,1)$ лежит строго внутри полиэдра $\rho+\mathbb{R}^4_{\geqslant 0}$. По нашему условию, грань ρ содержит мономы x^2, y^3, zt^4. Обозначим через ρ_1 выпуклую оболочку соответствующих точек $P_1=(2,0,0,0)$, $P_2=(0,3,0,0)$, $P_3=(0,0,1,4)$. Достаточно показать, что

$$\mathbf{1}\in\ \text{внутренность}\ \rho_1+\mathbb{R}^4_{\geqslant 0}\,.$$

Для этого рассмотрим аффинное подмногообразие V в $\mathbb{R}^4$, порождённое точками P_i. Выбрав точку P_1 за начальную, а векторы $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_1P_3}$ за направляющие, его можно задать параметрическими уравнениями

$$\alpha=2-2t_1-2t_2\ ,\beta=3t_1\ ,\gamma=t_2\ ,\delta=4t_2\,.$$

Ясно, что $\mathbf{1}\in\rho_1+\mathbb{R}^4_{\geqslant 0}$ тогда и только тогда, когда треугольник $\rho_1 = P_1P_2P_3$ имеет непустое пересечение со внутренностью множества $V_1=(\mathbf{1}-\mathbb{R}^4_{\geqslant 0})\cap V$. Это множество V_1 задаётся системой неравенств

$$2-2t_1-2t_2\leqslant 1\ ,3t_1\leqslant 1\ ,t_2\leqslant 1\ ,4t_2\leqslant 1\,,$$

а точки $P_1=(0,0)$, $P_2=(1,0)$, $P_3=(0,1)$ в координатах t_1, t_2 на V. Теперь уже легко проверить, что действительно $\rho_1\cap V_1\neq\varnothing$.

Во всех случаях нерациональный дивизор E представляет собой конус над кривой рода 1. Это легко усмотреть из его уравнения во взвешенном проективном пространстве. Для раздутия $(4,3,2,1)$

$$E=\{x^2+z^4+a_1t^8+a_2zt^6+a_3z^2t^4=0\}\subset\mathbb{P}(4,3,2,1)\,.$$

Этим завершается доказательство теорем 2 и 3 для cE_6-особенностей.

3.2.2 cE_7

Пусть особенность $0 \in X$ имеет тип cE_7. Тогда она определена в $\mathbb{C}^4$ уравнением (2.1.5)

$$f = x^2 + y^3 + yz^3 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + \dots + a_k z^{k-1} t^{b_k} + a_{k+1} z^k +$$

$$+ a_{k+2} y t^{b_{k+1}} + a_{k+3} yz t^{b_{k+2}} + (\dots) = 0\,.$$

Мы предполагаем, что ряд f невырожден. Схематически диаграмма Ньютона для $f(0, y, z, t)$ изображена на рисунке 3.2. Как и выше, $\Gamma(f)$ полносью определена диаграммой Ньютона для $f(0, y, z, t)$.

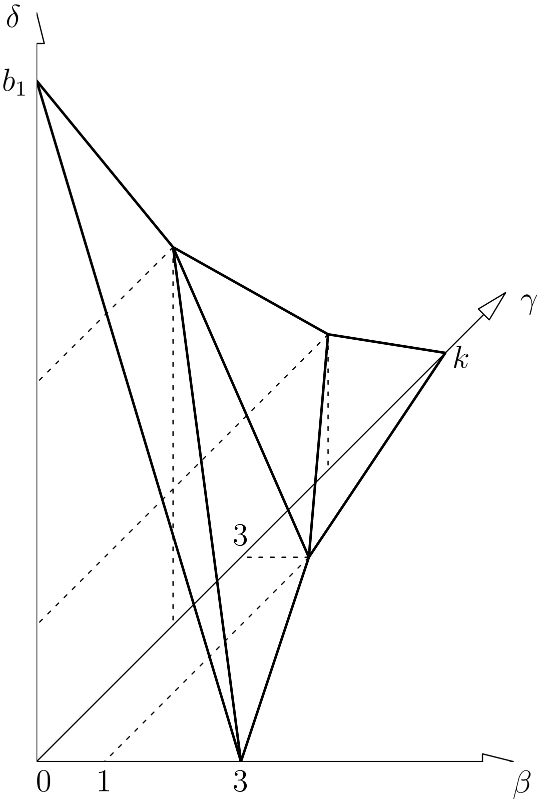

Рис. 3.2: Диаграмма Ньютона cE_7-особенности

Допустим, что взвешенное раздутие σ_w особенности X имеет нерациональный исключительный дивизор E с дискрепантностью 1 и обозначим ρ соответствующую грань диаграммы $\Gamma(f)$. Мы можем ограничиться случаями $\dim \rho = 2$ и $\dim \rho = 3$.

Если ρ не содержит ни одного из мономов x^2, y^3, то она должна содержать моном $yt^{b_{k+2}}$, и, значит, E рационален.

Используя обозначения и рассуждения из предыдущей части, мы находим 4 рациональных числа a, b, c, d со следующими свойствами.
(i) ($a = 2$, $b \leqslant 3$, $1/b + 3/c \geqslant 1$) или ($a < 2$, $b = 3$, $c \leqslant 9/2$);
(ii) $m(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) - 1 - m = 1$ ($m = \text{НОК}(a, b, c, d)$).

Лемма 3.2.2. *Пусть* a, b, c, $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ *удовлетворяют условиям (i) и (ii). Тогда четвёрка* (a, b, c, d) *может быть только одной из следующих:*
1) $(2, 2, 6, 6)$*; 2)* $(2, 3, 3, 6)$*; 3)* $(2, 8/3, 4, 8)$*;*
4) $(9/5, 3, 9/2, 9)$*; 5)* $(2, 5/2, 5, 10)$*; 6)* $(2, 3, 4, 12)$*;*
7) $(2, 14/5, 14/3, 14)$*; 8)* $(2, 3, 9/2, 18)$*.*

Доказательство. Случай 1: $a = 2$. Здесь $m = 2k$.

Используя условие $1/b + 3/c \geqslant 1$, из (ii) мы получаем:

$$\frac{4k}{3b} + \frac{2k}{3} + \frac{2k}{d} - k \leqslant 2\,.$$

Так как $b \leqslant 3$, имеем:

$$\frac{4k}{9} + \frac{2k}{3} + \frac{2k}{d} - k \leqslant 2\,,$$

$$\frac{k}{9} + \frac{2k}{d} \leqslant 2\,.$$

Но $2k/d \in \mathbb{Z}$, так что $d = 2k$, $2k \leqslant 18$. В остальном доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.1. □

Случаи 2), 3), 4), 6) леммы 3.2.2 отвечают раздутиям (ii) 1), 2), 3), 4) теоремы 3 соответственно. Остальные случаи дают раздутия с рациональными исключительными дивизорами. Например, четвёрке $(2, 14/5, 14/3, 14)$ соответствует раздутие $(7, 5, 3, 1)$. Его исключительный дивизор

$$E = \{x^2 + yz^3 + \cdots = 0\} \subset \mathbb{P}(7, 5, 3, 1)$$

рационален, ибо переменная y входит в его уравнение в степени 1. По этой же причине рациональны исключительные дивизоры раздутий $(3, 3, 1, 1)$ и $(5, 4, 2, 1)$. Раздутие $(9, 6, 4, 1)$ является plt-раздутием.

С помощью тех же рассуждений, что и для cE_6-особенностей, можно доказать, что если E нерационален и получен как исключительный дивизор одного из раздутий (ii) 1), 2), 3), 4) (теорема 3), то остальные раздутия имеют только рациональные исключительные дивизоры. Например, пусть исключительный дивизор

$$E = \{x^2 + y^3 + a_1t^6 + a_2zt^4 + a_3yt^4 + a_4yzt^2 = 0\} \subset \mathbb{P}(3, 2, 2, 1)$$

раздутия $(3, 2, 2, 1)$ ((ii) 1) теоремы 3) нерационален. Тогда $a_2 = a_4 = 0$, $a_1 \neq 0$ или $a_3 \neq 0$. В этом случае исключительные дивизоры раздутий 2), 3), 4) теоремы 3 (ii) заданы уравнениями $t^6 = 0$ или $yt^4 = 0$, и, очевидно, рациональны. Поэтому нерациональный дивизор единствен. Во всех случаях он оказывается конусом над некоторой кривой C. Прямым вычислением несложно проверить, что род $g(C)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, (ii).

3.2.3 cE_8

Пусть особенность $0 \in X$ имеет тип cE_8. Тогда она определена в $\mathbb{C}^4$ уравнением (2.1.6)

$$f = x^2 + y^3 + z^5 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + a_4 z^3 t^{b_4} +$$
$$+ a_5 y t^{b_5} + a_6 y z t^{b_6} + a_7 y z^2 t^{b_7} + a_8 y z^3 t^{b_8} + (\dots) = 0\,.$$

Мы предполагаем, что ряд f невырожден. Как и выше, $\Gamma(f)$ полностью определена диаграммой Ньютона для $f(0, y, z, t)$. Используя обозначения и рассуждения части 3.2.1, мы находим 4 рациональных числа a, b, c, d, удовлетворяющие условиям:
(i) ($a = 2$, $b \leqslant 3$, $c \leqslant 5$) или ($a < 2$, $b = 3$, $c \leqslant 5$) или ($a < 2$, $b < 3$, $c = 5$);
(ii) $m(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) - 1 - m = 1$ ($m = \text{НОК}(a, b, c, d)$).

Лемма 3.2.3. *Пусть a, b, c, $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяют условиям (i) и (ii). Тогда четвёрка (a, b, c, d) может быть только одной из следующих:*
1) $(2, 3, 3, 6)$*; 2)* $(2, 8/3, 4, 8)$*; 3)* $(9/5, 3, 9/2, 9)$*;*
4) $(2, 3, 4, 12)$*; 5)* $(2, 14/5, 14/3, 14)$*; 6)* $(15/8, 3, 5, 15)$*;*
7) $(2, 3, 9/2, 18)$*; 8)* $(2, 3, 24/5, 24)$*; 9)* $(2, 3, 5, 30)$.

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 3.2.1.

Случаи 1)–8) леммы 3.2.3 отвечают раздутиям (iii) 1)–8) теоремы 3 соответственно. 9-й случай даёт раздутие $(15, 10, 6, 1)$. Это plt-раздутие и его исключительный дивизор рационален.

С помощью тех же аргументов, что и в предыдущих частях, можно показать, что если нерациональный дивизор E существует, то он единствен. Во всех случаях он оказывается конусом над кривой во взвешенной проективной плоскости и прямое вычисление доказывает все остальные утверждения теоремы 3.

3.2.4 Примеры

Пример 3.2.4. Пусть особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ задана уравнением

$$x^2 + y^3 + z^4 + t^4 = 0\,.$$

Это особенность типа cE_6. Рассмотрим её взвешенное раздутие $\sigma = (2, 2, 1, 1)$ (теорема 3 (i) 1)). Его исключительный дивизор E задан в $\mathbb{P}(2, 2, 1, 1)$ уравнением $x^2 + z^4 + t^4 = 0$. Поверхность E — конус над эллиптической кривой

$$\{x^2 + z^4 + t^4 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 1, 1)\,,$$

дискрепантность $a(E, X) = 2 + 2 + 1 + 1 - 1 - 4 = 1$.

Пример 3.2.5. Пусть особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ задана уравнением

$$x^2 + y^3 + yz^3 + t^9 = 0\,.$$

Это cE_7-особенность. Рассмотрим взвешенное раздутие $\sigma = (5, 3, 2, 1)$ (теорема 3 (ii) 3)). Его исключительный дивизор

$$E = \{y^3 + yz^3 + t^9 = 0\} \subset \mathbb{P}(5, 3, 2, 1)$$

— конус над гладкой кривой рода 3. Нетрудно показать, что эта кривая негиперэллиптична. Действительно, во-первых заметим, что она тригональна. Если бы она была гиперэллиптической, то мы могли бы вложить её в квадрику $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ как дивизор бистепени $(3, 2)$. Но тогда её род был бы $g \leqslant 2$.

Пример 3.2.6. Пусть особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ определена уравнением

$$x^2 + y^3 + z^5 + t^{15} = 0\,.$$

Очевидно, X имеет тип cE_8. Раздуем её с весом $(8, 5, 3, 1)$ (см. теорему 3, (iii) 6)). Тогда мы получаем исключительный дивизор

$$\{y^3 + z^5 + t^{15} = 0\} \subset \mathbb{P}(8, 5, 3, 1)\,.$$

Это конус над негиперэллиптической кривой рода 4.

Пример 3.2.7. Рассмотрим ещё особенность

$$x^2 + y^3 + z^5 + t^{14} + z^3t^5 = 0$$

типа cE_8 и её взвешенное раздутие $(7, 5, 3, 1)$ (теорема 3 (iii), раздутие 5)). Соответствующий исключительный дивизор

$$\{x^2 + t^{14} + z^3t^5 = 0\} \subset \mathbb{P}(7, 5, 3, 1)$$

— конус над особой кривой $C = \{x^2 + t^{14} + z^3t^5 = 0\}$ во взвешенной проективной плоскости $\mathbb{P}(7, 3, 1)$. Аффинный кусок этой кривой, лежащий в карте $t \neq 0$, изоморфен кривой

$$\{x^2 + 1 + z^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^2\,.$$

Очевидно, это гладкая кубика. Поэтому $g(C) = 1$.

Легко подобрать примеры нерациональных раздутий и для остальных пунктов теоремы 3. Ниже мы приводим список таких примеров, опуская вычисления.

cE_6, $\sigma = (3, 2, 2, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^4 + t^6 = 0\} \subset \mathbb{C}^4\,.$$

cE_6, $\sigma = (4, 3, 2, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^4 + t^8 = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_7, $\sigma = (3, 2, 2, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + yz^3 + t^6 = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_7, $\sigma = (4, 3, 2, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + yz^3 + z^3t^2 + t^8 = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_7, $\sigma = (6, 4, 3, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + yz^3 + t^{12} = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_8, $\sigma = (3, 2, 2, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^5 + t^6 = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_8, $\sigma = (4, 3, 2, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^5 + z^3t^2 + t^8 = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_8, $\sigma = (5, 3, 2, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^5 + z^3t^3 + t^9 = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_8, $\sigma = (6, 4, 3, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^5 + t^{12} = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_8, $\sigma = (9, 6, 4, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^5 + t^{18} = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

cE_8, $\sigma = (12, 8, 5, 1)$:

$$\{x^2 + y^3 + z^5 + t^{24} = 0\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

Глава 4

Негоренштейновы терминальные особенности

Напомним, что особенность $(X.o)$ называется *негоренштейновой*, если канонический дивизор K_X не является дивизором Картье. В то же время определение 2.1.1 терминальных особенностей предполагает, что K_X — $\mathbb{Q}$-Картье дивизор, т. е., существует такое число m, что mK_X — дивизор Картье. Над негоренштейновыми терминальными особенностями типа cA/m нет нерациональных дивизоров малой дискрепантности (Ю. Г. Прохоров, [8]), так что нам нужно рассмотреть остальные типы особенностей из теоремы 2.1.4.

Эта глава посвящена доказательству следующих результатов.

Теорема 4. *Пусть $\pi\colon Y \to X$ — разрешение 3-мерной негоренштейновой терминальной особенности (X, o). Если (X, o) имеет тип $cAx/4$, $cD/3-3$, $cD/2-2$ или $cE/2$, то дополнительно предположим, что стандартное уравнение особенности (X, o) (см. теорему 2.1.4) невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда на Y существует не более двух нерациональных дивизоров E_i со свойствами $\pi(E_i) = o$ и $a(E_i, X) \leqslant 1$.*

Теорема 5. *Пусть E — нерациональный дивизор из теоремы 4. Тогда E реализуется как исключительный дивизор одного из взвешенных раздутий или псевдораздутий (см. определение 2.2.1), перечисленных ниже. Во всех случаях поверхность E бирационально изоморфна поверхности $C \times \mathbb{P}^1$. В следующем списке для каждого типа негоренштейновых терминальных особенностей (отличного от cA/m) мы приводим все возможные нерациональные раздутия ν, соответствующие дискрепантности $a = a(E, X)$ и оценки для рода g кривой C.*

(cAx/4) *Пусть (X, o) имеет тип $cA_{2n}x/4$ (см. часть 4.1).*

1) $\nu = \frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 1/4$; $g \leqslant 2k$;

2) $\nu = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+5, 3, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 3/4$;

$$g \leqslant \begin{cases} 2m-1, & k = 3m\,, \\ 2m+1, & k = 3m+1\,, \\ 2m+2, & k = 3m+2\,. \end{cases}$$

3) $\nu = \frac{1}{4}(4k+5, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 1/4$; $g \leqslant 2k+1$;
4) $\nu = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+1, 3, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$; $a = 3/4$;

$$g \leqslant \begin{cases} 2m, & k = 3m\,, \\ 2m+1, & k = 3m+1 \text{ или } k = 3m+2\,. \end{cases}$$

Для всех раздутий кривая C гиперэллиптическая.
(cAx/2) *Пусть особенность (X, o) имеет тип $cA_{2k}x/2$ (см. часть 4.2). Тогда если k чётное, то*
$\nu = \frac{1}{2}(k, k+1, 1, 1)$; $a = 1/2$; $g \leqslant k-1$;
если k нечётное, то
$\nu = \frac{1}{2}(k+1, k, 1, 1)$; $a = 1/2$; $g \leqslant k-1$.
В обоих случаях кривая C гиперэллиптическая. Если нерациональный дивизор E существует, то он единствен.
(cD/3-1) *В этом случае нерациональных дивизоров с $a \leqslant 1$ и* $\mathrm{center}_X(E) = o$ *нет.*
(cD/3-2)
$\nu = \frac{1}{3}(2, 1, 4, 3)$; $a = 1/3$; $g = 1$.
В данном случае если нерациональный дивизор E существует, то он единствен.
(cD/3-3)
1) $\nu = \frac{1}{3}(5, 4, 1, 6)$; $a = 1/3$; $g = 1$;
2) $\nu = \frac{1}{3}(2, 4, 1, 3)$; $a = 1/3$; $g = 1$;
3) $\nu = \frac{1}{3}(4, 5, 2, 6)$; $a = 2/3$; $g = 1$.
(cD/2-1) *В этом случае нерациональных дивизоров с $a \leqslant 1$ и* $\mathrm{center}_X(E) = o$ *нет.*
(cD/2-2) *Пусть особенность (X, o) имеет тип $cD_n/2{-}2$ (см. часть 4.4.2).*
1) $\nu = \frac{1}{2}(1, m, 2, m)$, $m = 2k-1$, $m \leqslant n-1$; $a = 1/2$; $g \leqslant k-1$;
2) $\nu = \frac{1}{2}(1, m-1, 2, m+1)$, $m = 2k$, $m \leqslant n-1$; $a = 1/2$; $g \leqslant k$;
3) $\nu = (1, k, 2, k)$, $k \leqslant (n-1)/2$; $a = 1$;

$$g \leqslant \begin{cases} k/2\,, & k \text{ — чётное}\,, \\ (k-1)/2\,, & k \text{ — нечётное}\,; \end{cases}$$

4) $\nu = (1, k-1, 1, k)$, $k \leqslant n/2$; $a = 1$;

$$g \leqslant \begin{cases} (k-2)/2\,, & k \text{ — чётное}\,, \\ (k-1)/2\,, & k \text{ — нечётное}\,. \end{cases}$$

Во всех случаях кривая C *гиперэллиптическая.*

(cE/2)

1) $\nu = \frac{1}{2}(2,3,1,3)$; $a = 1/2$; $g = 1$;
2) $\nu = \frac{1}{2}(2,1,3,3)$; $a = 1/2$; $g = 1$;
3) $\nu = \frac{1}{2}(4,3,1,5)$; $a = 1/2$; $g = 1$;
4) $\nu = \frac{1}{2}(4,3,1,7)$; $a = 1/2$; $g \leqslant 3$;
5) $\nu = \frac{1}{2}(6,5,1,9)$; $a = 1/2$; $g = 1$;
6) $\nu = (2,2,1,3)$; $a = 1$; $g = 1$;
7) $\nu = (3,2,1,4)$; $a = 1$; $g = 1$.

В случае 4) кривая C *может быть негиперэллиптической.*

4.1 Терминальные особенности типа $cAx/4$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cAx/4$, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = x^2 + y^2 + f(z,u) = 0\} \subset \frac{1}{4}(1,3,1,2)\,,$$

где $f(z,u) \in \mathbb{C}\{z,u\}$ — полуинвариант группы $\mathbb{Z}_4$ и $u \notin f(z,u)$. Далее мы будем предполагать, что определяющий ряд φ невырожден. Тогда у особенности (X, o) есть вложенное торическое разрешение $\pi\colon Y \to X$. Дивизоры с центром в o и дискрепантностью $a \leqslant 1$ входят в любое дивизориальное разрешение X, поэтому если над (X, o) есть нерациональный дивизор E, $\operatorname{center}_X(E) = o$, $a(E, X) \leqslant 1$, то E присутствует и в разрешении π. Как мы видели в части 2.3, E бирационально изоморфен исключительному дивизору (или его неприводимой компоненте) некоторого взвешенного раздутия или псевдораздутия ν_w, который задаётся в $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ (или в $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)/G$) частью φ_w ряда φ. Очевидно, что для того, чтобы E был нерациональным, многочлен φ_w должен содержать хотя бы один из мономов x^2 или y^2. Но если он содержит их оба, т. е. $\varphi_w = x^2 + y^2 + f_w(z,u)$, то в аффинной карте $u \neq 0$ поверхность E_w представляется как

$$\{x^2 + y^2 + f_w(z,1) = 0\} \subset \mathbb{C}^4/G_1\,,$$

а в карте $z \neq 0$ как

$$\{x^2 + y^2 + f_w(1,u) = 0\} \subset \mathbb{C}^4/G_2\,,$$

где G_1, G_2 — конечные циклические подгруппы в $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(3)$. Из этих уравнений видно, что E_w имеет только рациональные особенности, а значит, по лемме 2.3.5, E_w рациональна. Следовательно, мы можем предполагать, что $\varphi_w = x^2 + f_w(z,u)$ или $\varphi_w = y^2 + f_w(z,u)$.

Так как φ — полуинвариант группы $\mathbb{Z}_4(1,3,1,2)$, ряд f должен содержать моном u^{2n+1}. Если n — наименьшее число со свойством $u^{2n+1} \in f$, то будем говорить, что (X,o) имеет тип $cA_{2n}x/4$. Выясним теперь, какие раздутия и псевдораздутия особенности (X,o) типа $cA_{2n}x/4$ могут иметь нерациональные исключительные дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

Учитывая вышесказанное, а также условие $a(E_w) \leqslant 1$ и следствие 2.3.4, приходим к следующей задаче. Нам нужно найти такие примитивные векторы $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{4}(1,3,1,2)\mathbb{Z}$, что
или (i) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_1 \leqslant 1$, $w_2 > w_1$, $(2n+1)w_4 \geqslant 2w_1$,
или (ii) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_2 \leqslant 1$, $w_1 > w_2$, $(2n+1)w_4 \geqslant 2w_2$.

Предложение 4.1.1. *Пусть примитивный вектор* $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{4}(1,3,1,2)\mathbb{Z}$ *удовлетворяет группе условий (i) или (ii). Тогда* w *может быть только одним из следующих:*
1) $\frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
2) $\frac{1}{4}(4k+3, 4k+5, 3, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
3) $\frac{1}{4}(4k+5, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant (n-1)/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
4) $\frac{1}{4}(4k+3, 4k+1, 3, 2)$, $k \leqslant n/2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Доказательство. Простая арифметическая проверка. Например, пусть выполнено (i). Благодаря неравенству $w_2 > w_1$, неравенство для дискрепантности принимает вид $w_3 + w_4 < 2$. Учитывая, что $w_3 \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$, $w_4 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ и $2w_3 \equiv w_4 \mod \mathbb{Z}$, получаем следующие возможности:
$w_4 = 1/2, \quad w_3 = 1/4,\ 3/4,\ 5/4\,;$
$w_4 = 1, \quad w_3 = 1/2\,;$
$w_4 = 3/2, \quad w_3 = 1/4\,.$
Пусть $(w_3, w_4) = (1/4, 1/2)$. Тогда имеем $w_2 - w_1 + 3/4 - 1 \leqslant 1$, т. е. $w_2 - w_1 \leqslant 5/4$. С другой стороны, $w_1 \leqslant (2n+1)w_4 = n/2 + 1/4$. Из этих неравенств, учитывая также, что $w_1 \equiv w_3 \mod \mathbb{Z}$, получаем $w_1 = \frac{1}{4}(4k+1)$, $w_2 = \frac{1}{4}(4k+3)$, $k \leqslant n/2$, т. е. случай 1).

Пусть теперь $(w_3, w_4) = (3/4, 1/2)$. Тогда $w_2 - w_1 + 5/4 - 1 \leqslant 1$, т. е. $w_2 - w_1 \leqslant 3/4$. Аналогично предыдущему случаю получаем $w_1 = \frac{1}{4}(4k+3)$, $w_2 = \frac{1}{4}(4k+5)$, $k \leqslant (n-1)/2$, т. е., случай 2).

Если же $(w_3, w_4) = (5/4, 1/2)$, то $w_2 - w_1 \leqslant 1/4$. Но этого не может быть, ибо разность $w_2 - w_1$ всегда кратна $1/2$.

Аналогично рассматриваются и все остальные случаи. Впредь подобные вычисления мы будем опускать. □

Заметим, что все векторы 1)–4) задают настоящие взвешенные раздутия, а не псевдораздутия.

Исключительный дивизор E_1 раздутия $\nu_1 = \frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$ (так мы коротко обозначаем взвешенное раздутие с весом $\frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$) определяется уравнением

$$\{x^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z, u) = 0\} \subset \mathbb{P}(4k+1, 4k+3, 1, 2)\,.$$

Чтобы E_1 был нерациональным, он должен быть неприводим и приведён. Тогда дискрепантность

$$a(E_1, X) = (1/4)(4k+1+4k+3+1+2) - 1 - 2k - 1/2 = 1/4\,.$$

Очевидно, E_1 представляет собой конус над гиперэллиптической кривой

$$C = \{x^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z, u) = 0\} \subset \mathbb{P}(4k+1, 1, 2)\,.$$

Её род $g(C) \leqslant 2k$ (способ вычисления рода кривой во взвешенной проективной плоскости см. в части 2.4).

Исключительный дивизор E_2 раздутия $\nu_2 = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+5, 3, 2)$ определяется уравнением

$$\{x^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z, u) = 0\} \subset \mathbb{P}(4k+3, 4k+5, 3, 2)\,.$$

Если он неприводим и приведён, то дискрепаность $a(E_2) = 3/4$. Дивизор E_2 является конусом над гиперэллиптической кривой рода

$$g \leqslant \begin{cases} 2m-1, & k = 3m\,, \\ 2m+1, & k = 3m+1\,, \\ 2m+2, & k = 3m+2\,. \end{cases}$$

Действительно, наша кривая имеет степень $8k+6$ во взвешенной проективной плоскости $\mathbb{P}(4k+3, 3, 2)$. В общем случае эта кривая гладкая. Чтобы найти её род, в соответствии с формулой (2.4.1) мы должны найти коэффициент при t^{4k-2} в формальном ряде

$$\frac{1 - t^{8k+6}}{(1-t^{4k+3})(1-t^3)(1-t^2)}\,.$$

Этот коэффициент равен коэффициенту при t^{4k-2} в ряде

$$(1 + t^2 + t^4 + \dots)(1 + t^3 + t^6 + \dots)\,.$$

Теперь уже легко проверить, что при $k = 3m$ род $g = 2m-1$, при $k = 3m+1$ $g = 2m+1$ и при $k = 3m+2$ $g = 2m+2$.

Исключительный дивизор E_3 раздутия $\nu_3 = \frac{1}{4}(4k+5, 4k+3, 1, 2)$ определяется уравнением

$$\{y^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z,u) = 0\} \subset \mathbb{P}(4k+5, 4k+3, 1, 2)\,.$$

Если E_3 неприводим и приведён, то дискрепантность $a(E_3) = 1/4$. Как поверхность E_3 представляет собой конус над гиперэллиптической кривой рода $g \leqslant 2k+1$.

Исключительный дивизор E_4 раздутия $\nu_4 = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+1, 3, 2)$ определяется уравнением

$$\{y^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z,u) = 0\} \subset \mathbb{P}(4k+3, 4k+1, 3, 2)\,.$$

Если E_4 неприводим и приведён, то $a(E_4) = 3/4$. Дивизор E_4 является конусом над гиперэллиптической кривой рода

$$g \leqslant \begin{cases} 2m, \quad k = 3m\,, \\ 2m+1, \quad k = 3m+1 \text{ или } k = 3m+2\,. \end{cases}$$

Ясно, что для фиксированной особенности (X, o) раздутия ν_1 и ν_3, ν_2 и ν_4 не могут одновременно иметь нерациональные исключительные дивизоры. Действительно, допустим, что ν_1 нерационально. Тогда при весах $w(z) = 1$, $w(u) = 2$ функция f имеет вес $w(f) = 8k_1 + 2$. Но если ν_3 тоже нерационально, то $w(f) = 8k_2 + 6$, противоречие. Остальные пары раздутий могут быть одновременно нерациональными.

Пример 4.1.2. Рассмотрим особенность

$$\{x^2 + y^2 + z^{18} + z^6u^6 + u^{15} = 0\} \subset \frac{1}{4}(1,3,1,2)$$

типа $cA_{14}x/4$. Сделаем раздутия $\nu_1 = \frac{1}{4}(9,11,1,2)$ и $\nu_2 = \frac{1}{4}(15,17,3,2)$. Исключительный дивизор первого

$$E_1\colon \{x^2 + z^{18} + z^6u^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(9,11,1,2)$$

является конусом над особой кривой рода $g = 2$. Действительно, это кривая степени 18 во взвешенной проективной плоскости $\mathbb{P}(9,1,2)$. Если бы кривая была квазигладкой, то её род был бы равен $g = 4$. Но она имеет единственную особую точку $(0:0:1)$. Взвешенная проективная плоскость сама особа в этой точке, поэтому мы не можем напрямую применить лемму 2.4.1. Но в аффинном куске $z \neq 0$ наша кривая изоморфна кривой

$$x^2 + 1 + u^6 = 0 \subset \mathbb{C}^2\,.$$

Переходя к проективному замыканию, получаем кривую

$$x^2y^4 + y^6 + t^6 = 0 \subset \mathbb{P}^2$$

степени 6 и с единственной особой точкой $(1 : 0 : 0)$ аналитического типа $y^4 = t^6$. Теперь можно применить лемму 2.4.1 и убедиться, что $g = 2$.

Исключительный дивизор второго раздутия

$$E_2\colon \{x^2 + z^6u^6 + u^{15} = 0\} \subset \mathbb{P}(15, 17, 3, 2)$$

является конусом над особой кривой рода $g = 1$.

Пример 4.1.3. Примером нерационального раздутия типа 3) предложения 4.1.1 может служить взвешенное раздутие $\frac{1}{4}(5, 3, 1, 2)$ особенности

$$x^2 + y^2 + z^6 + u^3 = 0 \subset \frac{1}{4}(1, 3, 1, 2)\,.$$

Его исключительный дивизор — конус над эллиптической кривой.

Пример 4.1.4. Примером к случаю 4) предложения 4.1.1 может служить раздутие $\frac{1}{4}(11, 9, 3, 2)$ особенности

$$x^2 + y^2 + z^6 + u^9 = 0 \subset \frac{1}{4}(1, 3, 1, 2)\,.$$

Его исключительный дивизор — тоже конус над эллиптической кривой.

Таким образом, мы видим, что над невырожденной особенностью типа $cAx/4$ может быть не более двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

4.2 Терминальные особенности типа $cAx/2$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cAx/2$, т. е.

$$X \simeq \{x^2 + y^2 + f(z, u) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1)\,, \qquad (4.2.1)$$

где $f(z, u) \in (z, u)^4\mathbb{C}\{z, u\}$ — инвариант группы $\mathbb{Z}_2$. Здесь наше рассуждение не зависит от того, вырожденна данная особенность или нет. Следуя [12], §8, допустим, что при весах $w(z) = w(u) = 1/2$ вес $w(f)$ ряда f равен k (и будем говорить при этом, что особенность (X, o) имеет тип $cA_{2k}x/2$). При чётном k сделаем взвешенное раздутие $\nu_0 = \frac{1}{2}(k, k + 1, 1, 1)$, а при нечётном — $\nu_1 = \frac{1}{2}(k + 1, k, 1, 1)$. Далее мы рассматрим только ν_0, раздутие ν_1 рассматривается аналогично.

Имеем: $\nu_0\colon \widetilde{\mathbb{C}^4} \to \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_2(0,1,1,1)$ и многообразие $\widetilde{\mathbb{C}^4}$ покрывается четырьмя аффинными картами. В первой карте $U_1 \simeq \frac{1}{k}(1,-1,-1,-1)$ собственный прообраз $\tilde{X}$ особенности X задан уравнением

$$1 + xy^2 + f_k(z,u) + x(\dots) = 0\,,$$

где переменные x, y, z, u теперь имеют смысл координат в U_1. Легко видеть, что в U_1 многообразие $\tilde{X}$ неособо.

Во второй карте $U_2 \simeq \frac{1}{k+1}(1,1,-1,-1)$

$$\tilde{X} \cap U_2\colon x^2 + y + f_k(z,u) + y(\dots) = 0\,.$$

Здесь $\tilde{X}$ негоренштейново только в начале координат, где имеет циклическую терминальную факторособенность типа $\frac{1}{k+1}(1,-1,-1)$. Третья и четвёртая карты изоморфны $\mathbb{C}^4$. Например, в третьей $\tilde{X} \cap U_3$ задано уравнением

$$x^2 + y^2 z + f_k(1,u) + z(\dots) = 0\,.$$

Так как (X, o) — изолированная особенность, здесь особенности могут лежать только на исключительном дивизоре $\{z = 0\}$. Ясно, что все они — изолированные cDV-точки. Аналогично и в четвёртой карте многообразие $\tilde{X}$ может иметь только изолированные cDV-особенности.

Пусть E — исключительный дивизор раздутия ν_0 особенности (X, o). Имеем:

$$E \simeq \{x^2 + f_k(z,u) = 0\} \subset \mathbb{P}(k, k+1, 1, 1)\,.$$

Если он нерационален, то он неприводим и приведён, дискрепантность

$$a(E, X) = (1/2)(k + k + 1 + 1 + 1) - 1 - k = 1/2\,,$$

и как поверхность E представляет собой конус над гиперэллиптической кривой рода $g \leqslant k - 1$.

Возьмём произвольное разрешение $\pi\colon Y \to \tilde{X} \overset{\nu_0}{\to} X$. Все нерациональные дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$ должны присутствовать в π. Но cDV-особенности многообразия $\tilde{X}$ дают дивизоры с дискрепантностями $a(E_i, \tilde{X}) \geqslant$ $\geqslant 1$, а следовательно $a(E_i, X) > 1$. Разрешение циклической факторособенности из второй карты многообразия $\tilde{X}$ содержит с дискрепантностями $\leqslant 1$ только рациональные дивизоры. Значит, E — единственный нерациональный дивизор с $a \leqslant 1$ над особенностью (X, o). Мы доказали следующее

Предложение 4.2.1. *Произвольное разрешение особенности (X, o) типа $cAx/2$ содержит не более одного нерационального дивизора E с дискрепантностью $a(E, X) \leqslant 1$ и $\operatorname{center}_X(E) = o$. Пусть (X, o) задана уравнением (4.2.1) и имеет тип $cA_{2k}x/2$. Тогда если k — чётно, то нерациональный дивизор E является исключительным дивизором раздутия $\nu_0 =$*

$= \frac{1}{2}(k, k+1, 1, 1)$, *а если* k *— нечётно, то раздутия* $\nu_1 = \frac{1}{2}(k+1, k, 1, 1)$. *В обоих случаях* E *представляет собой конус над гиперэллиптической кривой рода* $g \leqslant k-1$.

Пример 4.2.2. Рассмотрим особенность

$$\{x^2 + y^2 + z^6 + u^6 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1)$$

и её взвешенное раздутие $\frac{1}{2}(4, 3, 1, 1)$. Его исключительный дивизор

$$E \simeq \{y^2 + z^6 + u^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(4, 3, 1, 1)$$

— конус над кривой рода 2.

4.3 Терминальные особенности типа $cD/3$

4.3.1 $cD/3 - 1$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/3 - 1$, т. е.

$$X \simeq \{u^2 + x^3 + yz(y+z) = 0\} \subset \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)\,.$$

Это совершенно конкретная особенность и для неё можно явно построить разрешение. Нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$ над (X, o) нет.

4.3.2 $cD/3 - 2$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/3 - 2$, т. е.

$$X \simeq \{u^2 + x^3 + yz^2 + xy^4\lambda(y^3) + y^6\mu(y^3) = 0\} \subset \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)\,, \qquad (4.3.1)$$

где $\lambda(y^3)$, $\mu(y^3) \in \mathbb{C}\{y^3\}$ и $4\lambda^3 + 27\mu^2 \neq 0$. Заметим, что последнее условие обеспечивает невырожденность особенности (X, o). Однако мы не будем использовать вложенное торическое разрешение, а поступим, как при исследовании случая $cAx/2$ в части 4.2.

Рассмотрим взвешенное раздутие $\nu = \frac{1}{3}(2, 1, 4, 3)$ (см. [12], §9) данной особенности. Легко проверить, что в первой, второй и четвёртой аффинных картах раздутое многообразие $\tilde{X}$ неособо, а в третьей карте $U_3 \simeq \frac{1}{4}(2, 3, 3, 1)$

$$\tilde{X}_3 = \tilde{X} \cap U_3 \simeq \{u^2 + x^3 + yz + \lambda_0 xy^4 + \mu_0 y^6 + z(\dots) = 0\}\,.$$

В начале координат $\tilde{X}_3$ имеет особенность, аналитически изоморфную

$$\{u^2 + y^2 + z^2 + x^3 = 0\} \subset \frac{1}{4}(2, 3, 3, 1)\,.$$

Она, очевидно, имеет тип $cAx/4$ и невырожденна. Все раздутия $cAx/4$-особенностей с нерациональными дивизорами малых дискрепантностей описаны нами в части 4.1. Проверив их все поочерёдно, можно убедиться, что в данном случае их исключительные дивизоры рациональны. Отсюда следует, что для исходной особенности (X, o) нерациональным может быть только раздутие ν. Его исключительный дивизор имеет вид

$$E = \{u^2 + x^3 + \lambda_0 xy^4 + \mu_0 y^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 1, 4, 3)\,.$$

Это конус над кривой рода $g \leqslant 1$. Дискрепантность

$$a(E, X) = (1/3)(2 + 1 + 4 + 3) - 1 - 2 = 1/3\,.$$

Нами доказано

Предложение 4.3.1. *Над терминальной особенностью (X, o) типа $cD/3{-}2$ может быть не более одного нерационального дивизора E с дискрепантностью $a \leqslant 1$. Если X задана уравнением* (4.3.1)*, то нерациональный дивизор E бирационален исключительному дивизору раздутия $\frac{1}{3}(2, 1, 4, 3)$ и является конусом над кривой рода 1.*

4.3.3 $cD/3 - 3$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/3 - 3$, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + x^3 + y^3 + xyz^3\alpha(z^3) + xz^4\beta(z^3) + yz^5\gamma(z^3) + z^6\delta(z^3)\} \subset$$
$$\subset \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)\,,$$

где $\alpha(z^3)$, $\beta(z^3)$, $\gamma(z^3)$, $\delta(z^3) \in \mathbb{C}\{z^3\}$. Здесь мы дополнительно предположим, что определяющий ряд φ невырожден. Если E — нерациональный дивизор с $a(E, X) \leqslant 1$ и $\mathrm{center}_X(E) = o$, то, как и в части 4.1, мы можем рассматривать его как исключительный дивизор некоторого взвешенного раздутия или псевдораздутия. Пусть w — вес этого раздутия. Диаграмма Ньютона $\Gamma(f)$ натянута на мономы u^2, x^3, y^3, xyz^{3b_1}, xz^{4+3b_2}, yz^{5+3b_3}, z^{6+3b_4}, где $b_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Поэтому если E нерационален, то его уравнение φ_w содержит мономы u^2 и x^3, u^2 и y^3 или x^2 и y^3. Воспользовавшись ещё условием $a(E) \leqslant 1$, мы приходим к следующей задаче: найти такие примитивные векторы $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)\mathbb{Z}$, что

или (i) $w_1+w_2+w_3+w_4-1-2w_4 \leqslant 1$, $2w_4=3w_1$, $3w_2 \geqslant 2w_4$;
или (ii) $w_1+w_2+w_3+w_4-1-2w_4 \leqslant 1$, $2w_4<3w_1$, $3w_2=2w_4$;
или (iii) $w_1+w_2+w_3+w_4-1-2w_1 \leqslant 1$, $w_1=w_2$, $2w_4>w_1$.

Предложение 4.3.2. *Пусть примитивный вектор* $w \in \mathbb{Z}^4+\frac{1}{3}(1,2,2,0)\mathbb{Z}$ *удовлетворяет одной из групп условий (i), (ii) или (iii). Тогда* w *может быть только одним из слудующих:*
1) $\frac{1}{3}(5,4,1,6)$*;*
2) $\frac{1}{3}(2,4,1,3)$*;*
3) $\frac{1}{3}(4,5,2,6)$*;*
4) $(2,2,1,3)$.

Доказательство. Простая арифметическая проверка. Пусть, например, выполнено (i). Тогда $-w_1/2+w_2+w_3 \leqslant 2$. Так как $w_2 \geqslant w_1$, имеем $w_2-w_1/2>0$, $w_3<2$. Но $w_3 \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}$. Поэтому можно перебрать все возможные значения w_3. Пусть $w_3=1/3$. Тогда $w_2-w_1/2 \leqslant 5/3$. Если учесть, что $w_1+w_2 \in \mathbb{Z}$, $w_1+w_3 \in \mathbb{Z}$, $w_4 \in \mathbb{Z}$, то остаётся единственная возможность $w_1=2/3$, $w_2=4/3$, $w_4=1$, т. е., раздутие 2). Аналогично проверяются и все остальные случаи. □

Заметим, что вес 4) соответствует псевдораздутию, остальные — обычным взвешенным раздутиям.

Исключительный дивизор E_1 раздутия $\nu_1=\frac{1}{3}(5,4,1,6)$ определяется в $\mathbb{P}(5,4,1,6)$ уравнением

$$u^2+y^3+\gamma_1 yz^8+\delta_2 z^{12}=0\,.$$

(Напомним, мы предполагаем, что E_1 нерационален. Отсюда следует, что $\alpha_0=\beta_0=\beta_1=\gamma_0=\delta_0=\delta_1=0$). Дискрепантность $a(E)=1/3$. Дивизор E представляет собой конус над кривой рода 1.

Исключительный дивизор E_2 раздутия $\nu_2=\frac{1}{3}(2,4,1,3)$ определяется в $\mathbb{P}(2,4,1,3)$ уравнением

$$u^2+x^3+\beta_0 xz^4+\delta_0 z^6=0\,.$$

Дискрепантность $a(E_2)=1/3$ и E_2 снова оказывается конусом над кривой рода 1.

Исключительный дивизор E_3 раздутия $\nu_3=\frac{1}{3}(4,5,2,6)$ определяется в $\mathbb{P}(4,5,2,6)$ уравнением

$$u^2+x^3+\beta_0 xz^4+\delta_0 z^6=0\,.$$

Следовательно, $E_3 \simeq \{u^2+x^3+\beta_0 xz^4+\delta_0 z^6=0\} \subset \mathbb{P}(2,5,1,3)$. Это снова конус над кривой рода 1. Дискрепантность $a(E_3)=2/3$.

Исключительный дивизор E_4 раздутия $\nu_4 = (2, 2, 1, 3)$ определяется как

$$E_4 \simeq \{u^2 + x^3 + y^3 + \beta_0 x z^4 + \delta_0 z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 2, 1, 3)/G\,,$$

где G — некоторая циклическая группа. Но поверхность

$$\{u^2 + x^3 + y^3 + \beta_0 x z^4 + \delta_0 z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 2, 1, 3)$$

имеет лишь рациональные особенности. По лемме 2.3.5 поверхность E_4 рациональна.

Ясно, что раздутия ν_1 и ν_2, ν_1 и ν_3 не могут быть одновременно нерациональными. Например, если ν_1 нерационально, то $\alpha_0 = \beta_0 = \beta_1 = \gamma_0 = \delta_0 = \delta_1 = 0$. Но тогда исключительные дивизоры раздутий ν_2 и ν_3 заданы уравнением $u^2 + x^3 = 0$, и, очевидно, рациональны. Раздутия ν_2 и ν_3 могут быть одновременно нерациональными, и более того, если одно из них нерационально, то и другое тоже.

Пример 4.3.3. Рассмотрим особенность

$$\{u^2 + x^3 + y^3 + z^6 = 0\} \subset \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)$$

типа $cD/3 - 3$ и её раздутия ν_2 и ν_3. Их исключительные дивизоры

$$E_2 = \{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 4, 1, 3)$$

$$\text{и } E_3 = \{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 5, 1, 3)$$

— конусы над эллиптическими кривыми. Интересно, что они заданы одинаковыми уравнениями. Но раздутия ν_2 и ν_3 не изоморфны, например, потому, что их дискрепантности различны: $a(E_2) = 1/3$, $a(E_3) = 2/3$.

Таким образом, над особенностью типа $cD/3 - 3$ может быть не более двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

4.4 Терминальные особенности типа $cD/2$

4.4.1 $cD/2 - 1$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/2 - 1$, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c = 0\} \subset \frac{1}{2}(1, 1, 0, 1)\,,$$

где a, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$. Эта особенность невырожденна. Значит, все дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$ соответствуют граням диаграммы Ньютона $\Gamma(\varphi)$.

Простым перебором всех граней можно убедиться, что нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$ над данной особенностью нет. Например, рассмотрим грань, порождённую мономами u^2, xyz, x^{2a}, y^{2b}. Соответстсвующий исключительный дивизор задан уравнением

$$u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} = 0$$

в некотором взвешенном проективном пространстве или его факторе. Очевидно, он рационален, ибо переменная z входит в данное уравнение линейно.

4.4.2 $cD/2-2$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/2-2$, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + y^2 z + \lambda y x^{2a+1} + g(x,z) = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,0,1)\,.$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \geqslant 1$, $g(x,z) \in (x^4, x^2z^2, z^3)\mathbb{C}\{x,z\}$. Здесь мы будем предполагать, что ряд φ невырожден. Так как особенность (X, o) изолирована и функция g $\mathbb{Z}_2$-инвариантна, в g входит моном вида z^{n-1}. Если n — наименьшее натуральное число с таким свойством, то будем говорить, что (X, o) имеет тип $cD_n/2-2$.

Дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$ над (X, o) соответствуют граням диаграммы Ньютона $\Gamma(\varphi)$. Аналогично тому, как это делалось в частях 4.1 и 4.3.3, мы приходим к следующей задаче: найти такие примитивные векторы $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, что
или (i) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_4 \leqslant 1$, $2w_2 + w_3 \geqslant 2w_4$, $(n-1)w_3 \geqslant 2w_4$;
или (ii) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_2 - w_3 \leqslant 1$, $2w_4 > 2w_2 + w_3$, $(n-1)w_3 \geqslant 2w_4$.
Ответ даёт следующее

Предложение 4.4.1. *Пусть примитивный вектор $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{2}(1,1,0,1)\mathbb{Z}$ удовлетворяет одной из групп условий (i) или (ii). Тогда w может быть только одним из следующих:*
1) $\frac{1}{2}(1, m, 2, m)$, $m = 2k-1$, $m \leqslant n-1$;
2) $\frac{1}{2}(1, m-2, 4, m)$, $m = 2k-1$, $m \leqslant 2(n-1)$;
3) $\frac{1}{2}(1, m-1, 2, m+1)$, $m = 2k$, $m \leqslant n-1$;
4) $(1, k, 2, k)$, $k \leqslant (n-1)/2$;
5) $(1, k-1, 2, k)$, $k \leqslant n-1$;
6) $(1, k-1, 1, k)$, $k \leqslant n/2$.

Доказательство. Простая арифметическая проверка. □

Раздутия $\nu_1 = \frac{1}{2}(1, m, 2, m)$, $\nu_2 = \frac{1}{2}(1, m-2, 4, m)$, $\nu_3 = \frac{1}{2}(1, m-1, 2, m+1)$ являются взвешенными, а $\nu_4 = (1, k, 2, k)$, $\nu_5 = (1, k-1, 2, k)$ и $\nu_6 = (1, k-$

$-1,1,k)$ — псевдораздутиями. Можно проверить, что на самом деле только раздутия ν_1, ν_3 (с дискрепантностью $a = 1/2$) и ν_4, ν_6 (с дискрепантностью $a = 1$) могут быть нерациональными. Рассмотрим, например, раздутие ν_2. Его исключительный дивизор E_2 имеет вид

$$u^2 + y^2 z + \lambda\delta_{k,a} y x^{2a+1} + g_{w=2k-1}(x,z) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2k-3, 4, 2k-1)\,,$$

где $\delta_{k,a}$ — символ Кронекера. Ограничимся аффинным куском поверхности E_2, лежащим в карте $U_z = \{z \neq 0\}$:

$$u^2 + y^2 + \lambda\delta_{k,a} y x^{2a+1} + g_{w=2k-1}(x,1) = 0 \subset \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_4\,.$$

Можно считать, что $g_{w=2k-1}(x,z) \neq 0$, ибо в противном случае E_2, очевидно, рациональна. В таком случае из уравнения видно, что $E_2 \cap U_z$ имеет особенности не хуже, чем факторы дювалевских точек. А такие особенности рациональны.

Исследуем теперь особенности на гиперплоскости $z = 0$. Если ещё $x = 0$, то никаких особенностей мы не получаем. Рассмотрев карту $x \neq 0$ легко убедиться, что и в ней поверхность E_2 имеет только рациональные особенности. Поэтому по лемме 2.3.5 она рациональна.

Пример 4.4.2. Рассмотрим особенность

$$\{u^2 + y^2 z + z^{2k} + x^{2k} = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,0,1)$$

типа $cD_{2k+1}/2$ и её псевдораздутие $\nu_4 = (1,k,1,k)$. Допустим, что k — чётное. Тогда аффинная карта $U_1 = X(\sigma_1, N')$ раздутого многообразия $\widetilde{\mathbb{C}^4}_{(1,k,1,k)}$ (обозначения см. в части 2.2) изоморфна $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_2(1, 1-k, -1, 1-k) = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$.

$$\tilde{X} \cap U_1 = \{y_4^2 + y_1 y_2^2 y_3 + y_3^{2k} + 1 = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,1,1)\,,$$

где y_i — координаты в U_1. Исключительный дивизор $(y_1 = 0)$

$$E \simeq \{y_4^2 + y_3^{2k} + 1 = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,1)$$

— конус над кривой $= \{y_4^2 + y_3^{2k} + 1 = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1)$. Рациональное отображение $(y_3, y_4) \to y_3$ из C в $\mathbb{C}^1/\mathbb{Z}_2$ имеет в общей точке степень 2, поэтому C — гиперэллиптическая кривая. В замыкании $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2/\mathbb{Z}_2$ она имеет одну особую точку. Эту точку можно эквивариантно разрешить, а затем по формуле Гурвица легко вычислить род $g(C) = k/2$.

Методами части 2.4 легко проверить, что для всех раздутий ν_1, ν_3, ν_4, ν_6 исключительный дивизор — конус над гиперэллиптической кривой рода

$g \leqslant k-1$ для ν_1; $g \leqslant k$ для ν_3; $g \leqslant k/2$ при чётном k и $g \leqslant (k-1)/2$ при нечётном k для ν_4; $g \leqslant (k-1)/2$ при нечётном k и $g \leqslant (k-2)/2$ при чётном k для ν_6. В последнем случае исключительный дивизор E_6 распадается на две компоненты, одна из которых рациональна.

Пример 4.4.3. Примером такой ситуации может служить особенность

$$\{u^2 + y^2z + z^7 + zx^6 + x^8 = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,0,1)$$

типа $cD_8/2-2$ и её псевдораздутие $\nu = (1,3,1,4)$ (здесь $k=4$). Соответствующий исключительный дивизор — это конус

$$E = \{y^2z + z^7 + zx^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(1,3,1,4)/\mathbb{Z}_2(1,1,0,1)\,.$$

Очевидно, он распадается на две компоненты — рациональную $\{z=0\}$ и ещё один конус $E_1 = \{y^2 + z^6 + x^6 = 0\}$. В аффинном куске $z \neq 0$ конус E_1 — это конус над кривой

$$\{y^2 + 1 + x^6 = 0\} \subset \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2(1,1)$$

(см. формулы из части 2.2). С помощью методов части 2.4 и формулы Гурвица легко вычислить, что род этой кривой равен 1 ($=(k-2)/2$).

Пары раздутий ν_1 и ν_3, ν_4 и ν_6 не могут, а остальные могут быть одновременно нерациональными.

Пример 4.4.4. Рассмотрим особенность

$$\{u^2 + y^2z + z^{12} + z^6x^6 + x^{18} = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,0,1)$$

типа $cD_{13}/2-2$ и её взвешенное раздутие $\nu_1 = \frac{1}{2}(1,9,2,9)$ и псевдораздутие $\nu_4 = (1,6,1,6)$.

Для исключительных дивизоров имеем

$$E_1 = \{u^2 + z^6x^6 + x^{18} = 0\} \subset \mathbb{P}(1,9,2,9)$$

— конус над особой кривой рода 2;

$$E_4 = \{u^2 + z^{12} + z^6x^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(1,6,1,6)/\mathbb{Z}_2$$

— конус над особой кривой рода 1.

Таким образом, над особенностью типа $cD/2-2$ может быть не больше двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

4.5 Терминальные особенности типа $cE/2$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cE/2$, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + x^3 + g(y,z)x + h(y,z) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,,$$

где $g(y,z) \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\}$, $h(y,z) \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\} \setminus (y,z)^5\mathbb{C}\{y,z\}$. Мы будем предполагать, что ряд φ невырожден. Кроме этого, переставляя, если нужно, y и z, можно считать, что либо y^4, либо y^3z, либо $y^2z^2 \in h(y,z)$. Рассуждения в этом случае полностью аналогичны частям 4.1, 4.3.3 и 4.4.2, поэтому мы ограничимся приведением окончательных результатов.

Для $cE/2$-особенностей, как и для других, нерациональные дивизоры реализуются некоторыми взвешенными раздутиями и псевдораздутиями и оказываются конусами. В следующем предложении мы перечислим все возможные нерациональные раздутия и для каждого из них укажем дискрепантность исключительного дивизора и род соответствующей кривой.

Предложение 4.5.1. *(ср. [12], §10) Пусть E — такой нерациональный дивизор над особенностью (X, o), что $\operatorname{center}_X(E) = o$ и $a(E, X) \leqslant 1$. Тогда E бирационально изоморфен исключительному дивизору одного из следующих раздутий.*

1) $\nu_1 = \frac{1}{2}(2,3,1,3)$, $a = 1/2$, $g = 1$;
2) $\nu_2 = \frac{1}{2}(2,1,3,3)$, $a = 1/2$, $g = 1$;
3) $\nu_3 = \frac{1}{2}(4,3,1,5)$, $a = 1/2$, $g = 1$;
4) $\nu_4 = \frac{1}{2}(4,3,1,7)$, $a = 1/2$, $g \leqslant 3$;
5) $\nu_5 = \frac{1}{2}(6,5,1,9)$, $a = 1/2$, $g = 1$;
6) $\nu_6 = (2,2,1,3)$, $a = 1$, $g = 1$;
7) $\nu_7 = (3,2,1,4)$, $a = 1$, $g = 1$.

Заметим, что кривая для раздутия ν_4 не обязательно гиперэллиптическая.

Пример 4.5.2.

$$\{u^2 + x^3 + y^3 + z^{12} = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,.$$

Исключительный дивизор псевдораздутия ν_4 задаётся уравнением

$$\{x^3 + y^4 + z^{12} = 0\} \subset \mathbb{P}(4,3,1,7)\,.$$

Он представляет собой конус над негиперэллиптической кривой рода 3.

Одновременно нерациональными могут быть только следующие пары раздутий: ν_1 и ν_2, ν_1 и ν_6.

Пример 4.5.3.

$$\{u^2 + x^3 + y^2z^2 + y^6 + z^6 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,.$$

Исключительный дивизор раздутия ν_1:

$$\{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,3,1,3)\,,$$

раздутия ν_2:

$$\{u^2 + x^3 + y^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,1,3,3)\,.$$

Они оба являются конусами над эллиптическими кривыми.

Пример 4.5.4.

$$\{u^2 + x^3 + y^4 + z^6 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,.$$

Исключительный дивизор взвешенного раздутия ν_1:

$$\{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,3,1,3)$$

— конус над эллиптической кривой.

Исключительный дивизор псевдораздутия ν_6:

$$E_6 = \{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,2,1,3)/\mathbb{Z}_2(0,1,1,1)\,.$$

С помощью формул части 2.2 находим, что в аффинной карте $z \neq 0$ это конус над кривой

$$\{u^2 + x^3 + 1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2\,.$$

Таким образом, E_6 — тоже конус над эллиптической кривой.

Покажем ещё для примера, что если раздутие ν_1 нерационально, то ν_3 рационально. Действительно, тогда исключительный дивизор E_1 имеет вид

$$\{u^2 + x^3 + axz^4 + bz^6 = 0\}\,,$$

где одно из чисел a и b отлично от нуля. Но тогда исключительный дивизор раздутия ν_2 задан уравнением $axz^4 + bz^6 = 0$ и, очевидно, рационален. Аналогично рассматриваются и остальные пары раздутий. Несколько более сложной является пара ν_4, ν_5.

Допустим, что исключительный дивизор E_4 взвешенного раздутия $\nu_4 = \frac{1}{2}(4,3,1,7)$ нерационален. Он задан уравнением

$$x^3 + a_1y^2z^2x + a_2yz^7x + a_3z^8x + y^4 + a_4y^3z^3 = 0$$

во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(4,3,1,7)$. Если взвешенное раздутие $\nu_5 = \frac{1}{2}(6,5,1,9)$ тоже нерационально, то $a_3 = 0$. Но так как дивизор E_4 нерационален, хотя бы один из остальных коэффициентов отличен от нуля.

Исключительный дивизор E_5 раздутия ν_5 задан в $\mathbb{P}(6,5,1,7)$ уравнением

$$u^2 + x^3 + a_1y^2z^2x + a_2yz^7x + a_4y^3z^3 + a_5z^{12}x + a_6y^2z^8 + a_7yz^{13} + a_8z^{18} = 0\,.$$

Мы рассматриваем только невырожденные особенности. Отсюда легко следует, что E_5 может быть неквазигладким только в точках $(0:1:0:0)$ и $(0:0:1:0)$. Если $a_4 \neq 0$, то, очевидно, эти особенности рациональны и поверхность E_5 рациональна по лемме 2.3.5. Пусть дальше $a_4 = 0$. Тогда в аффинной карте $z \neq 0$ сечение дивизора E_5 общей плоскостью $x = \mathrm{const}$ — неприводимая коника (у нас $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$, поэтому переменная y нетривиальным образом входит в уравнение для E_5). Следовательно, поверхность E_5 снова рациональна.

В заключение приведём ещё пример нерационального псевдораздутия $cE/2$-особенности.

Пример 4.5.5. Рассмотрим особенность

$$\{u^2 + x^3 + y^4 + z^8 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)$$

и её псевдораздутие $\nu_7 = (3,2,1,4)$. Его исключительный дивизор

$$\{u^2 + y^4 + z^8 = 0\} \subset \mathbb{P}(3,2,1,4)/\mathbb{Z}_2(0,1,1,1)$$

(см. часть 2.2) — конус над эллиптической кривой.

В следующем списке мы приводим примеры нерациональных раздутий к остальным пунктам предложения 4.5.1.

$$\nu_3\colon \{u^2 + x^3 + z^{10} + zy^3 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,.$$

$$\nu_5\colon \{u^2 + x^3 + y^4 + z^{18} = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,.$$

$$\nu_6\colon \{u^2 + x^3 + y^4 + z^6 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)\,.$$

Следовательно, над невырожденной особенностью типа $cE/2$ существует не более двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

Публикации автора по теме диссертации

[a1] Степанов, Д. А. О разрешении 3-мерных терминальных особенностей // Матем. заметки 77 вып. 1 (2005). С. 127–140.

[a2] Степанов, Д. А. О нерациональных дивизорах над невырожденными cDV-точками // ВИНИТИ РАН. 2004. №1528-В2004 Деп. Сдана в Матем. сборник.

[a3] Степанов, Д. А. О нерациональных дивизорах над негоренштейновыми терминальными особенностями // ВИНИТИ РАН. 2004. №1529-В2004. Деп. Сдана в труды Международной алгебраической конференции, посвящённой 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры.

[a4] Stepanov, D. A. On resolution of terminal singularities // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры. Тезисы докладов. М.: 2004. С. 284.

[a5] Степанов, Д. А. О разрешениях терминальных особенностей // XXVI Конференция молодых учёных механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Тезисы докладов. М.: 2004. С. 118.

Литература

[1] Арнольд, В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, I. М.: Наука. 1982.

[2] Данилов, В. И. Геометрия торических многообразий // Успехи матем. наук 33 (1978). С. 97–154.

[3] Данилов, В. И. Бирациональная геометрия торических 3-мерных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 46 (1982), С. 972–981.

[4] Исковских, В. А. Особенности на минимальных моделях алгебраических многообразий // Труды семинара под рук. И. Р. Шафаревича, 1996–1998. Отдел алгебры МИРАН. М. 1998. С. 41–61.

[5] Кокс, Д., Литтл, Дж., О'Ши, Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.

[6] Кудрявцев, С. А. О чисто логтерминальных раздутиях // Метем. заметки 69 (2001). С. 814–819.

[7] Маркушевич, Д. Г. Канонические особенности трехмерных гиперповерхностей // Изв. АН СССР, сер. матем. 49 (1985). С. 334–368.

[8] Прохоров, Ю. Г. Замечание о разрешении трехмерных терминальных особенностей // Успехи мат. наук. 57 (2002). №4. С. 187–188.

[9] Artin, M. On the Solutions of Analytic Equations // Inventiones math. 5 (1968). С. 277–291.

[10] Du Val, P. On the singularities which do not affect the condition of adjunction // Proc. Camb. Phil. Soc 30 (1934). С. 453–491.

[11] Dolgachev, I. Weighted projective spaces // Group Actions and Vector Fields. Lecture Notes in Math., vol. 956. Springer-Verlag. 1982. С. 34–71.

[12] Hayakawa, T. Blowing ups of 3-dimensional Terminal Singularities // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 35 (1999). С. 515–570.

[13] Hayakawa, T. Blowing ups of 3-dimensional Terminal Singularities, II // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 36 (2000). C. 423–456.

[14] Hironaka, H. Formal line bundles along exceptional loci // Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968). London: Oxford Univ. Press. 1969. C. 201–218.

[15] Ishii, S., Prokhorov, Yu. G. Hypersurface exceptional singularities // International J. of Math. 12 (2001). №6. C. 661–687.

[16] Kawakita, M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points // Invent. Math. 145 (2001). C. 105–119.

[17] Kawakita, M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound A_1 points // Compositio Math. 133 (2002). C. 95–116.

[18] Kawakita, M. Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices // e-print: arXiv:math.AG/0306065.

[19] Kawamata, Y. Appendix to V. V. Shokurov "3-fold log flips" // Изв. РАН. Сер. матем. 56 (1992) №1. C. 105–201.

[20] Kollár, J., Shepard-Barron, N. Threefolds and deformations of surface singularities // Inv. Math. 91 (1988). C. 299–338.

[21] Kollár, J. (ed.) Flips and abundance for algebraic threefolds // Astérisque no. 211, Soc. Math. France, Paris 1992.

[22] Markushevich, D. Minimal Discrepancy for a Terminal cDV Singularity is 1 // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 3 (1996). C. 445–456.

[23] Matsuki, K. Introduction to Mori's Program, Springer-Verlag.

[24] Mori, S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. of Math. 116 (1982), C. 133–176.

[25] Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 98 (1985). C. 43–66.

[26] Nash, J. F. Arc structure of singularities // Duke Math. J. 81 (1995). C. 31–38.

[27] Prokhorov, Yu. G. Blow-ups of canonical singularities // Proceedings of the International Algebraic conference on the Occasion of the 90th birthday of A. G. Kurosh. Moscow, Russia, May 25–30, 1998. (2000). C. 301–317.

[28] Prokhorov, Yu. G. $\mathbb{E}1$-blowing ups of terminal singularities // J. Math. Sci. 115 (2003). N. 3. C. 2395–2427.

[29] Reid M. Canonical 3-folds // Jornées de Géométrie Algébrique d'Angers, A. Beauville, editor. Sijthoff and Noordhoff, Alpen aan den Rijn. 1980, C. 273–310.

[30] Reid, M. Minimal Models of Canonical 3-folds // Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Adv. Studies in Pure Math. Kinokuniya and North-Holland. 1983. V. 1. C. 131–180.

[31] Reid, M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Symp. Pure Math. 46(1) (1987). C. 345–414.

[32] Shokurov, V. V. Complements on surfaces // J. Math. Sci. 102:2 (2000). C. 3876–3932.

[33] Shokurov, V. V. Semi-stable 3-fold flips // Изв. РАН Сер. матем. 57(2) (1993). C. 165–222.

[34] Varchenko, A. N. Zeta-function of monodromy and Newton's diagram // Invent. Math. 37 (1976). C. 253–262.

[35] Zariski, O. Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties // Ann. of Math. 45 (1944). C. 472–542.