



ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Е. С. Тверская

МГУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Метод Гаусса.

Прямой ход метода Гаусса.

Запишем систему $Ax = f$ в развернутом виде

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = f_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = f_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = f_m.$$

Идея метода: Последовательное исключение неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m из системы.

Пусть $a_{11} \neq 0$.

Тогда a_{11} называется **главным или ведущим элементом** первого шага.

Поделим первое уравнение системы на a_{11} , получим

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m = y_1,$$

где $c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 2, \dots, m, y_1 = \frac{f_1}{a_{11}}$.

Тогда

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m = y_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = f_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = f_m.$$

Структура матрицы полученной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (**главный элемент второго шага**), то из системы аналогично можно исключить неизвестное x_2 и перейти к системе, матрица которой имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Исключая аналогично неизвестные x_3, x_4, \dots, x_m придем к окончательной системе уравнений вида:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m = y_1,$$

$$x_2 + \dots + c_{2m}x_m = y_2,$$

.....

$$x_{m-1} + c_{m-1,m}x_m = y_{m-1},$$

$$x_m = y_m,$$

Обратный ход метода Гаусса заключается в нахождении неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m .

$$x_m = y_m, \quad x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m}x_m.$$

В общем виде формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij}x_j, \quad i = (m-1), \dots, 1, \quad x_m = y_m. \quad (1)$$

Подсчет числа действий.

Ограничимся вычислением количества операций умножения и деления.

- Для вычисления коэффициентов c_{ij} требуется делений:

$$(m-1) + (m-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

- Для вычисления коэффициентов $a_{ij}^{(k)}$, требуется умножений:

$$(m-1)^2 + (m-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}.$$

- Вычисление правых частей y_k требует m делений, а вычисление коэффициентов $f_i^{(k)}$ требует умножений:

$$(m-1) + (m-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Осуществление прямого хода требует действий:

$$\begin{aligned} \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} + m + \frac{m(m-1)}{2} &= \\ &= \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6}; \end{aligned}$$

Для реализации обратного хода требуется умножений:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (m - 1) = \frac{m(m - 1)}{2}$$

Итого, для реализации метода Гаусса требуется действий:

$$\frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} + \frac{m(m - 1)}{2} = \frac{m^3 + 3m^2 - m}{3}.$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента.

Может оказаться так, что система имеет единственное решение, даже если какой-либо из угловых миноров матрицы A равен нулю. В этом случае обычный метод Гаусса может оказаться непригодным и применяют метод Гаусса с **выбором главного элемента**.

Основная идея: на очередном шаге исключают не следующее по номеру неизвестное, а неизвестное, коэффициент при котором по модулю наибольший. Т.е. в качестве ведущего элемента выбирается наибольший по модулю элемент.

Проиллюстрируем на примере СЛАУ из 2-х уравнений.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2.$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента по строке. Тогда на первом шаге исключается переменное x_2

$$a_{12}x_2 + a_{11}x_1 = f_1;$$

$$a_{22}x_2 + a_{21}x_1 = f_2,$$

и к данной системе применяется первый шаг обычного метода Гаусса.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Тогда

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2;$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

и к новой системе применяют первый шаг обычного метода Гаусса.

Иногда применяют метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего элемента выбирают наибольший по модулю элемент матрицы системы.

LU-разложение матрицы.

Метод Гаусса преобразует систему в эквивалентную систему

$$Cx = y,$$

где C – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали.
Векторы правых частей f и y связаны соотношениями.

$$f_1 = y_1 a_{11},$$

$$f_2 = y_1 a_{21} + y_2 a_{22}^{(1)},$$

$$f_3 = y_1 a_{31} + y_2 a_{32}^{(1)} + y_3 a_{33}^{(2)}, \quad \text{или} \quad f = By,$$

.....

$$f_m = y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2}^{(1)} + y_3 a_{m3}^{(2)} + \dots + y_m a_{mm}^{(m-1)}.$$

где B - нижняя треугольная матрица с элементами $b_{ii} \neq 0$.

Так как

$$y = B^{-1}f \implies Cx = B^{-1}f \implies BCx = f.$$

Следовательно, получено разложение $A = BC$, где

B - **нижняя треугольная** матрица с ненулевыми элементами на главной

диагонали, а

C - **верхняя треугольная** матрица с единицами на главной диагонали.

В этом случае, метод Гаусса можно трактовать так:

- производится разложение матрицы $A = BC$,
- последовательно решаются две системы уравнений:

$$By = f, \quad Cx = y.$$

Теорема об LU -разложении. Пусть

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, \Delta_m = \det A.$$

Теорема. Пусть все угловые миноры матрицы A отличны от нуля, $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$. Тогда матрицу A можно представить, причем единственным образом, в виде произведения

$$A = LU, \tag{2}$$

где L - нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами и U - верхняя треугольная матрица с единичной диагональю.

Матрицы преобразований Гаусса. Построим матричное описание процесса обнуления Гаусса. Пусть $n = 3$, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tau_1 & 1 & 0 \\ -\tau_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\tau_1 = \alpha_2/\alpha_1$ и $\tau_2 = \alpha_3/\alpha_1$, $\alpha_1 \neq 0$.

Пример. Рассмотрим систему $Ax = f$ из 3-х уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = f_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = f_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = f_3,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

После 1-го шага по методу Гаусса преобразованная система примет вид $A_1x = f_1$:

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 &= \frac{f_1}{a_{11}}, \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 &= f_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}f_1, \\ \left(a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 &= f_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}f_1,\end{aligned}\tag{3}$$

где матрица полученной системы $A_1 = L_1A$ и вектор-столбец $f_1 = L_1f$ и

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после осуществления первого шага приходим к системе:

$$L_1Ax = L_1f.$$

Перепишем полученную систему (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= f_3^{(1)},\end{aligned}\tag{4}$$

и осуществим второй шаг метода Гаусса.

После этого приходим к системе в виде:

$$\begin{aligned}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= y_1, \\ x_2 + c_{23}x_3 &= y_2, \\ a_{33}^{(2)}x_3 &= f_3^{(2)},\end{aligned}\tag{5}$$

Переход от системы (4) к системе (5) осуществляется путем умножения матрицы системы (4) слева на матрицу L_2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после осуществления второго шага методом Гаусса приходим к системе:

$$L_2L_1Ax = L_2L_1f.$$

Далее, умножая матрицу системы (5) слева на матрицу L_3 получаем систему:

$$L_3L_2L_1Ax = L_3L_2L_1f,$$

где

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Построенные в примере матрица L_k , $k = 1, 2, 3$ называется **матрицей прообразования Гаусса**.

После применения прямого хода методом Гаусса получили эквивалентную систему, у которой матрица $U = L_3L_2L_1A$ является верхней треугольной с единичной диагональю. Выразим матрицу A :

$$A = LU,$$

где матрица $L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$ является нижней треугольной матрицей.

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом получили LU -разложение матрицы.

Определение. Матрица L_j называется элементарной нижней треугольной матрицей если она имеет вид

$$L_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{jj} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{j+1,j} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & l_{mj} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обратной к L_j является также элементарная нижняя треугольная матрица:

$$L_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{jj}^{-1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -l_{j+1,j}^{-1} l_{jj}^{-1} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -l_{mj}^{-1} l_{jj}^{-1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

В общем случае предположим, что $x \in \mathbb{R}^n$ и $x_k \neq 0$. Если

$$\tau = (0, \dots, 0, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n)^T, \quad \tau_i = \frac{x_i}{x_k}, \quad i = (k+1) : n,$$

то

$$L_k = E - \tau e_k^T,$$

и

$$L_k x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\tau_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -\tau_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица L_k - это **матрица преобразований Гаусса**, вектор τ - вектор Гаусса.

Обращение матрицы.

Нахождение матрицы, обратной к матрице A , эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = E, \quad (6)$$

где E - единичная матрица и X - искомая квадратная матрица.

Уравнение (6) можно записать в виде системы m^2 уравнений

$$\sum_{k=1}^m a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Система (7) распадается на m независимых систем уравнений с одной и той же матрицей A , но с различными правыми частями:

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$, а у вектора $\delta^{(j)}$ единице равна j -я компонента, а остальные равны нулю.

Пример. Для матрицы второго порядка система (7) распадается на две независимые системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1. \end{cases}$$

Системы (8) имеют одну и ту же матрицу $A \implies$ достаточно один раз совершить прямой ход методом Гаусса и запомнить матрицы L и U .

Обратный ход будет осуществляться путем решения систем уравнений.

$$Ly^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad y^{(j)} = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj})^T, \quad (9)$$

$$Ux^{(j)} = y^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Сокращение числа действий. Используем специфический вид правых частей системы (9).

Запишем первые $(j - 1)$ уравнение системы (9):

$$l_{11}y_{1j} = 0,$$

$$l_{21}y_{1j} + l_{22}y_{2j} = 0,$$

.....

$$l_{j-1,1}y_{1j} + l_{j-1,2}y_{2j} + \dots + l_{j-1,j-1}y_{j-1,j} = 0.$$

Так как матрица L - невырожденная, то получаем

$$y_{1j} = y_{2j} = \dots = y_{j-1,j} = 0.$$

При этом оставшиеся уравнения системы имеют вид:

$$l_{jj}y_{jj} = 1,$$

$$l_{ij}y_{jj} + l_{i,j+1}y_{j+1,j} + \dots + l_{ii}y_{ij} = 0, \quad i = j + 1, j + 2, \dots, m.$$

Отсюда последовательно находим неизвестные y_{ij} :

$$y_{ij} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}y_{kj}}{l_{ii}}, \quad i = j + 1, j + 2, \dots, m, \quad (11)$$

$$y_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}. \quad (12)$$

Метод прогонки.

Метод прогонки используется для решения СЛАУ $Ax = f$, где матрица A порядка N является трехдиагональной, т. е. матрица все элементы которой, кроме элементов лежащих на главной диагонали и 2-х побочных, равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $j > i + 1$ и $j < i - 1$).

В этом случае СЛАУ с трехдиагональной матрицей имеет вид:

$$\begin{aligned}c_1x_1 + b_1x_2 &= f_1, \\a_ix_{i-1} + c_ix_i + b_ix_{i+1} &= f_i, \quad i = 2, \dots, (N - 1), \\a_Nx_{N-1} + c_Nx_N &= f_N.\end{aligned}\tag{13}$$

Преобразуем первое уравнение системы (13) к виду

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1,$$

где $\alpha_1 = -b_1/c_1$, $\beta_1 = f_1/c_1$.

Подставим полученное для x_1 выражение во второе уравнение системы:

$$a_2(\alpha_1 x_2 + \beta_1) + c_2 x_2 + b_2 x_3 = f_2.$$

Данное уравнение можно преобразовать к виду

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

где

$$\alpha_2 = -\frac{b_2}{a_2 \alpha_1 + c_2}, \quad \beta_2 = \frac{f_2 - a_2 \beta_1}{a_2 \alpha_1 + c_2}.$$

На i -м шаге i -е уравнение системы преобразуется к виду

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = 1, \dots, (N-1), \quad (14)$$

где α_i и β_i - неизвестные коэффициенты.

Получим выражения для данных коэффициентов. Найдем x_{i-1} :

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1} = \alpha_{i-1} (\alpha_i x_{i+1} + \beta_i) + \beta_{i-1} = \\ &= \alpha_{i-1} \alpha_i x_{i+1} + (\alpha_{i-1} \beta_i + \beta_{i-1}). \end{aligned}$$

Подставим выражения x_i и x_{i-1} в (13) и придем к уравнению

$$x_{i+1} [\alpha_i (a_i \alpha_{i-1} + c_i) + b_i] + [\beta_i (a_i \alpha_{i-1} + c_i) + a_i \beta_{i-1} - f_i] = 0.$$

Данное уравнение равно нулю, если положить

$$\begin{aligned}\alpha_i (a_i \alpha_{i-1} + c_i) + b_i &= 0, \\ \beta_i (a_i \alpha_{i-1} + c_i) + a_i \beta_{i-1} - f_i &= 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{b_i}{a_i \alpha_{i-1} + c_i}, \quad i = 2, \dots, (N-1), \\ \beta_i &= \frac{f_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + c_i}, \quad i = 2, \dots, (N-1).\end{aligned}\tag{15}$$

Для вычислений, с использование выражений (15), необходимо задать начальные значения α_1 и β_1 , которые вычисляются из 1-го уравнения системы.

Нахождение таким образом коэффициентов α_i и β_i называется **прямой прогонкой**.

После нахождения прогоночных коэффициентов, решения системы находятся по рекуррентной формуле (14) начиная с $i = N - 1$.

Для начала счета по данной формуле требуется знать значение x_N , которое определяется из уравнений

$$x_N = -\frac{a_N}{c_N}x_{N-1} + \frac{f_N}{c_N}, \quad x_{N-1} = \alpha_{N-1}x_N + \beta_{N-1}.$$

Подставляя выражение для x_{N-1} в выражение для x_N получаем

$$x_N = \frac{f_N - a_N\beta_{N-1}}{c_N + a_N\alpha_{N-1}}.$$

Окончательно

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = (N - 1), (N - 2), \dots, 1,$$
$$x_N = \frac{f_N - a_N\beta_{N-1}}{c_N + a_N\alpha_{N-1}}.$$

Приведем условия на коэффициенты системы, при выполнении которых вычисления по формулам прямой прогонки можно довести до конца, т. е.

ни один из знаменателей $\gamma_i = a_i\alpha_{i-1} + c_i$ не обращается в ноль. Эти условия будут гарантировать существование решения системы и его единственность.

Теорема. Пусть коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям диагонального преобладания:

$$|c_k| \geq |a_k| + |b_k|, \quad |c_k| > |a_k|, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда $\gamma_i = a_i\alpha_{i-1} + c_i \neq 0$ и $|\alpha_i| \leq 1$ для всех $i = \overline{1, N}$.

◀ Воспользуемся принципом математической индукции.

По условию теоремы имеем $\gamma_1 = c_1$ и $|\alpha_1| = \frac{|b_1|}{|c_1|} \leq 1$.

Пусть $\gamma_{k-1} \neq 0$ и $|\alpha_{k-1}| \leq 1$ для некоторого $k > 1$. Тогда

$$|\gamma_k| = |a_k\alpha_{k-1} + c_k| \geq |c_k| - |a_k||\alpha_{k-1}| \geq |c_k| - |a_k|.$$

Из полученной оценки вытекает, что $|\gamma_k| > 0$ и одновременно $|\gamma_k| \geq |b_k|$. Следовательно $|\gamma_k| \neq 0$ и $|\alpha_k| = |b_k|/|\gamma_k| \leq 1$. ▶

Итерационные методы решения СЛАУ

Пусть дана система линейных уравнений

$$AX = f \quad (16)$$

Последовательность векторов $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}, \dots$ строится по рекуррентным формулам

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} + H^{(k)} \left(f - AX^{(k-1)} \right), \quad (17)$$

где $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots$ – некоторая последовательность матриц, $X^{(0)}$ – начальное приближение, в общем случае произвольное.

Различный выбор последовательности матриц $H^{(k)}$ приводит к различным итерационным процессам.

Точное решение X^* является неподвижной точкой для итерационных процессов протекающих по схеме (17). Следовательно, если за начальное приближение взять $X^{(0)} = X^*$, то все последующие приближения будут также равны X^* .

Покажем, что всякий итерационный процесс, для которого X^* является неподвижной точкой, протекающий по формуле

$$X^{(k)} = C^{(k)} X^{(k-1)} + Z^{(k)}, \quad (18)$$

где $C^{(k)}$ – последовательность матриц, $Z^{(k)}$ – последовательность векторов, может быть представлена в виде (17).

Пусть

$$X^* = C^{(k)} X^* + Z^{(k)},$$

откуда

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= C^{(k)} X^{(k-1)} + X^* - C^{(k)} X^* = \\ &= X^* + C^{(k)} \left(X^{(k-1)} - X^* \right) = X^* + C^{(k)} \left(X^{(k-1)} - X^* \right) - \\ &- E \left(X^{(k-1)} - X^* \right) + E \left(X^{(k-1)} - X^* \right) = \\ &= X^{(k-1)} + \left(C^{(k)} - E \right) \left(X^{(k-1)} - X^* \right) = \\ &= X^{(k-1)} + \left(E - C^{(k)} \right) A^{-1} A \left(X^* - X^{(k-1)} \right) = \\ &= X^{(k-1)} + H^{(k)} \left(f - AX^{(k-1)} \right), \end{aligned}$$

где $H^{(k)} = \left(E - C^{(k)} \right) A^{-1}$.

Стационарные итерационные процессы - процессы, в которых матрица $H^{(k)}$ не зависит от номера шага k . В частности, если $H^{(k)} = H = E$, то получаем **классический процесс последовательных приближений**.

Любой стационарный процесс при $H \neq E$ можно рассматривать как процесс последовательных приближений, применяемый к эквивалентной системе

$$HAX = Hf.$$

Если матрица $H^{(k)}$ повторяется через некоторое число p шагов, то такие итерационные процессы называются **циклическими**.

Из каждого циклического процесса можно получить равносильный ему стационарный процесс, принимая за один шаг результат применения полного цикла из p шагов.

Нестационарные итерационные процессы разделяют на два типа:

- Изменение матрицы $H^{(k)}$ осуществляется на каждом шаге.
- Проводят ускорение сходимости стационарного итерационного процесса заменой, время от времени, стационарной матрицы H на подобранную специальным образом матрицу $H^{(k)}$.

Метод последовательных приближений

Перепишем систему уравнений $AX = f$ в эквивалентном виде

$$X = BX + C, \quad (19)$$

где $B = E - A$, $C = f$. Тогда

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + C. \quad (20)$$

Если процесс последовательных приближений сходится, то он сходится к решению системы, т. е. если $X^{(k)} \rightarrow X^*$ то, при предельном переходе в равенстве (20) получаем $X^* = BX^* + C$.

Процесс последовательных приближений является частным случаем общего итерационного процесса (18) при $H = E$.

Действительно

$$X^{(k)} = (E - A)X^{(k-1)} + C = X^{(k-1)} + (f - AX^{(k-1)}).$$

Теорема. Для сходимости процесса последовательных приближений при любом начальном условии $X^{(0)}$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.

Подготовка системы линейных алгебраических уравнений к виду, удобному для применения метода последовательных приближений.

Условия сходимости метода последовательных приближений требуют, чтобы матрица коэффициентов системы $AX = f$ была в том или ином смысле близка к единичной матрице.

Если это условие не выполнены, то нужно предварительно подготовить систему для применения метода последовательных приближений.

Т. е. нужно перейти от системы $AX = f$ к эквивалентной системе $HAX = Hf$, где H – неособенная матрица, которая выбирается так, чтобы она была близка к A^{-1} .

Пример. Пусть матрица A положительно определена, тогда вычислив бесконечную норму μ матрицы A получаем, что все собственные значения матрицы A лежат в интервале $(0, \mu)$. Положим

$$H = \frac{2}{\mu}E.$$

Тогда систему $AX = f$ преобразуем к виду

$$X = \left(E - \frac{2}{\mu}A \right) X + \frac{2}{\mu}f = BX + C.$$

В этом случае собственные значения матрицы $B = E - \frac{2}{\mu}A$ будут заключены в интервале $(-1, 1)$. Следовательно метод последовательных приближений будет сходящимся.

Выберем начальное приближение

$$X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)} \right)^T.$$

Подставляя его в полученную систему, находим первое приближение

$$X^{(1)} = BX^{(0)} + c.$$

Аналогично находим второе приближение

$$X^{(2)} = BX^{(1)} + c.$$

Продолжая этот процесс далее получим последовательность приближений: $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}, \dots$, вычисляемых по формуле

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема. Пусть выполнено условие $\|B\| < 1$. Тогда

- Решение X^* системы $X = BX + c$ существует и единственно.
- При произвольном начальном приближении $X^{(0)}$ метод простой итерации сходится и справедлива оценка погрешности

$$\|X^{(n)} - X^*\| \leq \|B\|^n \|X^{(0)} - X^*\|.$$

Апостериорная оценка погрешности. Если выполнено условие $\|B\| < 1$, то справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\|X^{(n)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(n)} - X^{(n-1)}\|.$$

Если требуется найти решение с точностью ε , то следует вести итерации до выполнения неравенства

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(n)} - X^{(n-1)}\| < \varepsilon.$$

Тогда $\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \frac{1 - \|B\|}{\|B\|} \varepsilon$.

Рассмотренное преобразование системы (21) в систему (22) равносильно умножению системы (21) слева на матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $H = D^{-1}$, где $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Следовательно, необходимое и достаточное условие сходимости метода простой итерации состоит в том, что все собственные значения матрицы $B = E - D^{-1}A$ по модулю были меньше единицы. Пусть теперь задана система $Ax = f$, в которой преобладание главной диагонали не имеет места. Тогда, подбор вспомогательной матрицы H может быть осуществлен, например, грубым обращением матрицы A .

Часто, оказывается целесообразным, в качестве матрицы H взять матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обращение такой матрицы не составляет труда

$$H = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta_1} & -\frac{a_{12}}{\Delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{\Delta_1} & \frac{a_{11}}{\Delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{44}}{\Delta_2} & -\frac{a_{34}}{\Delta_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{43}}{\Delta_2} & \frac{a_{33}}{\Delta_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и $\Delta_2 = a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}$.

Введем матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде расчетные формулы примут вид:

$$X^{(k+1)} = B_1 X^{(k+1)} + B_2 X^{(k)} + C. \quad (25)$$

В этом случае точка X^* является неподвижной точкой отображения (25) и

$$X^* = B_1 X^* + B_2 X^* + C. \quad (26)$$

Запишем достаточные условия сходимости метода Зейделя.

Теорема. Пусть $\|B\| < 1$, где под нормой понимается либо $\|B\|_1$, либо $\|B\|_\infty$, тогда при любом выборе начального приближения $X^{(0)}$ метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q \leq \|B\|$.

Теорема. Пусть выполнено условие $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$. Тогда при любом выборе начального приближения $X^{(0)}$ метод Зейделя сходится и верна оценка погрешности

$$\|X^{(n)} - X^*\| \leq q^n \|X^{(0)} - X^*\|, \quad (27)$$

где $q = \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} < 1$.

Полученная оценка является трудно проверяемой при вычислениях, поэтому запишем апостериорную оценку погрешности.

Теорема. Если выполнено условие $\|B\| < 1$, то для метода Зейделя справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\|X^{(n)} - X^*\| \leq \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} \|X^{(n)} - X^{(n-1)}\|, \quad n \geq 1. \quad (28)$$

Полученная апостериорная оценка позволяет сформулировать критерий окончания итерационного процесса.

Если требуется найти решение с точностью $\varepsilon > 0$, то итерационный процесс следует вести до выполнения неравенства

$$\|X^{(n-1)} - X^{(n)}\| \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} < \varepsilon$$

данное неравенство эквивалентно

$$\|X^{(n-1)} - X^{(n)}\| < \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1 - \|B\|}{\|B_2\|} \varepsilon$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода Зейделя. Для этого рассмотрим систему из 2-х уравнений с двумя неизвестными.

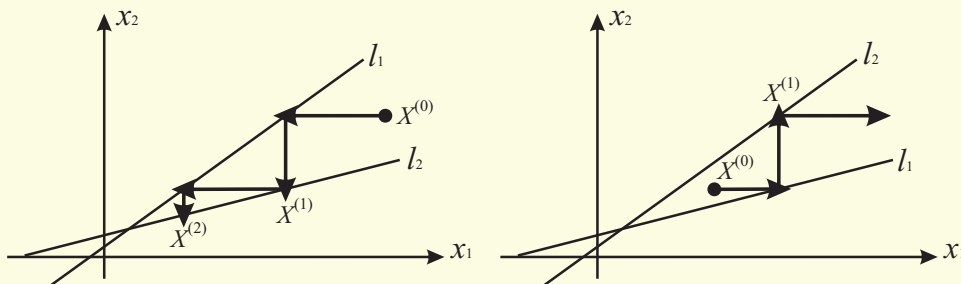
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2.$$

Оба уравнения системы задают на плоскости Ox_1x_2 прямые. Пусть первое уравнение задает прямую l_1 , а второе – l_2 . Тогда

$$x_1^{(k+1)} = b_{12}x_2^{(k)} + c_1,$$

$$x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + c_2.$$



На рисунках приведены примеры, отвечающие сходящемуся и расходящемуся итерационному процессу Зейделя.

Методы отыскания решения нелинейных уравнений

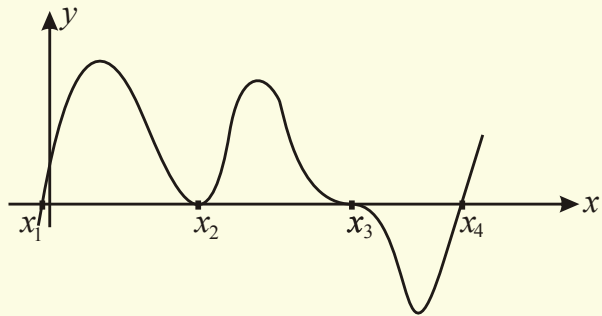
Постановка задачи. Задача отыскания решения нелинейного уравнения с одним неизвестным имеет вид:

$$f(x) = 0. \quad (29)$$

Определение. Корнем или решением характеристического уравнения (29) называется значение x^* , при котором $f(x^*) = 0$.

Определение. Корень x^* уравнения (29) называется **простым**, если $f'(x^*) \neq 0$, в противном случае корень называется **кратным**.

Число n называется **кратностью корня** x^* , если $f^{(k)}(x^*) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$ и $f^{(n)}(x^*) \neq 0$.



Геометрически, если корень x^* – простой, то график пересекает ось Ox под ненулевым углом и кратный, если пересечение происходит под нулевым углом. x_1 и x_4 – простые корни, x_2 и x_3 – кратные корни.

Локализация корней.

Определение Отрезок $[a, b]$, содержащий только один корень, называется **отрезком локализации** корня x^* .

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$. Тогда отрезок $[a, b]$ содержит хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

Замечание. Корень четной кратности не удастся локализовать с помощью данной теоремы, так как в окрестности такого корня функция $f(x)$ не меняет знак.

Итерационное уточнение корней.

На данном этапе для вычисления корня с точностью $\varepsilon > 0$ используют итерационный метод позволяющий построить итерационную последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$ приближений к корню x^* .

Определение. Итерационный метод называется **одношаговым**, если для вычисления приближения $x^{(n+1)}$ используют только одно предыдущее приближение $x^{(n)}$ и **k -шаговым**, если для вычисления $x^{(n+1)}$ используются k предыдущих приближений $x^{n-k+1}, x^{n-k+2}, \dots, x^n$.

Определение. Говорят, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q < 1$, если для всех n справедлива следующая оценка:

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq c_0 q^n. \quad (30)$$

Определение. Для одношагового итерационного метода существует $U_\sigma(x^*)$ такая, что если приближенное значение $x^{(n)}$ принадлежит этой окрестности, то справедлива оценка:

$$\left| x^{(n+1)} - x^* \right| \leq C \left| x^{(n)} - x^* \right|^p, \quad (31)$$

где $C > 0$ и $p \geq 1$ – постоянные. Величина p называется **порядком сходимости метода**. Если $p = 1$ и $C < 1$, то метод обладает **линейной скоростью сходимости** в указанной σ -окрестности. При $p = 2$ – **квадратичная сходимость**, а $p = 3$ – **кубическая**.

Теорема. Пусть одношаговый итерационный метод обладает линейной скоростью сходимости в некоторой $U_\sigma(x^*)$. Тогда при любом выборе начального приближения $x^{(0)} \in U_\sigma(x^*)$ итерационная последовательность не выходит за пределы этой окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии с знаменателем $q = C$ и имеет место следующая оценка погрешности:

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq q^n \left| x^{(0)} - x^* \right|, \quad n \geq 0. \quad (32)$$

Обусловленность задачи вычисления корня.

Пусть x^* – корень уравнения, подлежащий определению.

Будем предполагать, что в малой окрестности корня выполняется неравенство $|f(x) - f^*(x)| < \bar{\Delta}$, где $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(f^*)$ – граница абсолютной погрешности.

Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что существует такая малая окрестность корня $(x^* - \bar{\varepsilon}, x^* + \bar{\varepsilon})$, имеющая радиус $\bar{\varepsilon} > 0$, в которой выполняется

$$|f(x)| < \bar{\Delta}$$

Для $x \in (x^* - \bar{\varepsilon}, x^* + \bar{\varepsilon})$ знак вычисленного значения $f^*(x)$ может не совпадать со знаком $f(x)$.

Следовательно не возможно определить, какое $x \in (x^* - \bar{\varepsilon}, x^* + \bar{\varepsilon})$ обращает функцию в ноль (т.е. не удастся локализовать корень из-за погрешностей вычисления функции).

Определение. Интервал $(x^* - \bar{\varepsilon}, x^* + \bar{\varepsilon})$ называют **интервалом неопределенности корня** x^* .

Попробуем найти оценку $\bar{\varepsilon}$. Пусть x^* – простой корень. Тогда для значений x близких к x^* справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = f'(x^*)(x - x^*).$$

Следовательно неравенство $|f(x)| < \bar{\Delta}$ примет вид

$$|f'(x^*)(x - x^*)| \lesssim \bar{\Delta}.$$

Далее, раскрывая модуль, получаем оценку величины x :

$$x^* - \frac{\bar{\Delta}}{|f'(x^*)|} \lesssim x \lesssim x^* + \frac{\bar{\Delta}}{|f'(x^*)|}$$

Сравнивая вид интервала неопределенности и полученное неравенство, получаем, что

$$\bar{\varepsilon} \approx \nu_{\Delta} \bar{\Delta}(f^*), \quad (33)$$

где $\nu_{\Delta} = \frac{1}{|f'(x^*)|}$ – число, которое в данной задаче играет роль числа обусловленности.

Действительно, если \bar{x}^* – корень уравнения $f^*(x) = 0$, то $|f(\bar{x}^*)| < \bar{\Delta}$. И выполнено неравенство

$$|x^* - \bar{x}^*| \leq \bar{\Delta}(\bar{x}^*) \leq \bar{\varepsilon} \approx \nu_{\Delta} \bar{\Delta}(f^*).$$

Заметим, что $\bar{\varepsilon}$ возрастает с уменьшением $|f'(x^*)|$, т.е. с уменьшением тангенса угла наклона, под которым график пересекает ось Ox .

Пусть x^* – кратный корень, m - кратность корня.

Тогда можно записать приближенное равенство:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!}(x - x^*)^m.$$

Т. к.

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(m-2)}(x^*) = f^{(m-1)}(x^*) = 0,$$

то приближенное равенство $|f(x)| < \bar{\Delta}$ примет вид

$$\left| \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} (x - x^*)^m \right| \lesssim \bar{\Delta}.$$

Решив его, получаем оценку интервала неопределенности:

$$\bar{\varepsilon} \approx \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{1/m} \bar{\Delta}^{1/m}.$$

Замечание. Величина $\bar{\varepsilon}$ не может быть меньше величины $|x^*| \varepsilon_M$ – погрешности определения корня x^* на ЭВМ.

На практике, оценить радиус интервала неопределенности является достаточно сложной задачей. Однако, из факта его существования, можно сделать некоторые выводы:

- Не имеет смысл ставить задачу вычисления корня x^* с точностью $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$.
- Не разумно требовать от алгоритмов отыскания корня достоверных результатов после того, как очередное приближение корня попало в интервал неопределенности.

Вдали от интервала неопределенности величина

$$q^n = \frac{|x^{(n)} - x^{(n-1)}|}{|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}|} < 1.$$

Появление величины $q^n > 1$ свидетельствует о хаотическом поведении итерационной последовательности.

В этой ситуации вычисления следует прекратить, чтобы выяснить причину данного явления.

Метод бисекции.

Пусть с заданной точностью ε необходимо найти корень уравнения

$$f(x) = 0.$$

Пусть $[a, b]$ - отрезок локализации.

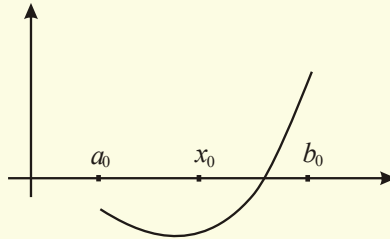
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке и на концах его принимает значения разных знаков:

$$f(a)f(b) < 0.$$

Переобозначим отрезок $[a, b]$ через $[a_0, b_0]$.

Примем за приближенное значение корня середину отрезка $[a_0, b_0]$

$$x^{(0)} = \frac{1}{2}(a_0 + b_0).$$



Так как положение корня x^* на отрезке $[a_0, b_0]$ не известно, то можно лишь утверждать, что погрешность этого приближения не превышает половину длины отрезка:

$$|x^{(0)} - x^*| \leq \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Уточним отрезок локализации. Заменяем отрезок $[a_0, b_0]$ на отрезок $[a_1, b_1]$. Согласно излагаемому методу в качестве отрезка $[a_1, b_1]$ берут тот из отрезков $[a_0, x^{(0)}]$ или $[x^{(0)}, b_0]$, на концах которого выполняется условие $f(a_1)f(b_1) \leq 0$.

Действительно, если $f(a_1)f(b_1) < 0$, то существование корня следует из теоремы о локализации корней, а если $f(a_1)f(b_1) = 0$, то корнем является один из концов отрезка.

Середина полученного отрезка

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$$

дает новое приближение к корню. Оценка погрешности данного приближения принимает вид

$$\left| x^{(1)} - x^* \right| \leq \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

За следующее уточнение отрезка локализации $[a_2, b_2]$ снова берут один из отрезков $[a_1, x^{(1)}]$ или $[x^{(1)}, b_1]$ на концах которого выполняется условие $f(a_2)f(b_2) \leq 0$.

На $(k + 1)$ итерации метода: пусть отрезок $[a_k, b_k]$ уже найден и вычислены значения $x^{(k)}$, $f(a_k)$, $f(b_k)$. Тогда производятся следующие действия:

- Вычисляется $f(x^{(k)})$.
- Если $f(x^{(k)})f(a_k) \leq 0$, то в качестве нового отрезка локализации $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ принимают отрезок $[a_k, x^{(k)}]$. В противном случае $f(x^{(k)})f(b_k) \leq 0$ и за $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ принимают отрезок $[x^{(k)}, b_k]$.
- Вычисляют $x^{(k+1)} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$.

При неограниченном продолжении данного процесса получаем систему вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots,$$

которая в силу принципу Кантора (существует хотя бы одна точка принадлежащая всем отрезкам этой системы) содержит искомым корень.

Скорость сходимости

Середина n -го отрезка – точка $x^{(n)} = \frac{a_n + b_n}{2}$ дает приближение к корню x^* , и имеет оценку погрешности:

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

Из данной оценки можно сделать вывод, что метод бисекции сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = 1/2$.

Забегая вперед, по сравнению с другими методами метод бисекции сходится довольно медленно. Но данный метод прост в исполнении и не притязателен, поэтому является привлекательным в использовании.

Критерий окончания

Итерации следует вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$b_n - a_n < 2\varepsilon.$$

При его выполнении, в качестве приближения к корню, можно взять $x^{(n)}$.

Метод простой итерации.

Необходимо преобразовать $f(x) = 0$ уравнение к виду удобному для итерации:

$$x = \varphi(x). \quad (34)$$

В этом случае функцию $\varphi(x)$ – называют **итерационной функцией**. Выберем в качестве начального приближения какую-то величину $x^{(0)}$. Из равенства (34) получаем

$$x^{(1)} = \varphi(x^{(0)}).$$

Далее, получив приближение $x^{(1)}$, можно получить следующее приближение

$$x^{(2)} = \varphi(x^{(1)}).$$

Продолжая этот процесс неограниченно получим итерационную последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ и т. д., вычисляемую по формуле:

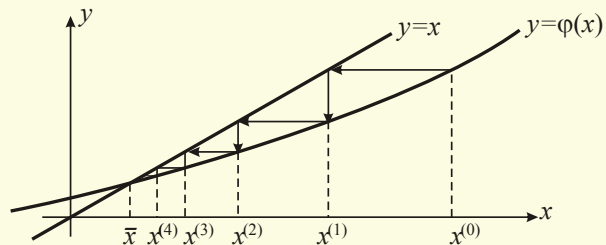
$$x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)}), \quad n \geq 0.$$

Из приведенных рассуждений можно сделать выводы

- метод простой итерации является одношаговым;
- если существует предел последовательности $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$, то метод простой итерации сходится и x^* – корень уравнения

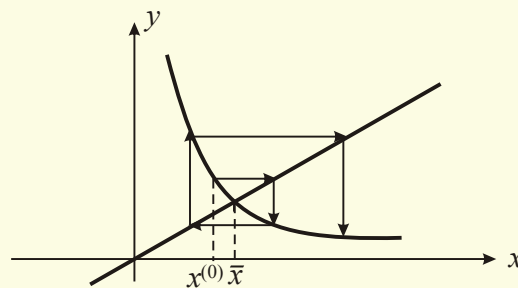
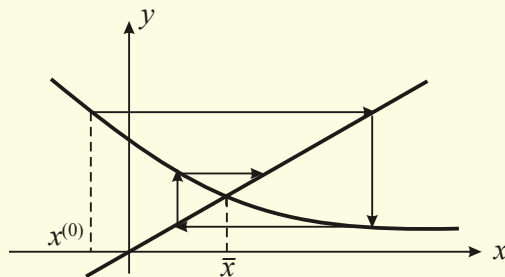
$$x^* = \varphi(x^*).$$

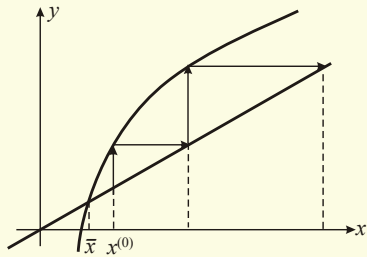
На приведенном ниже рисунке показана графическая иллюстрация последовательности приближений, полученных методом простой итерации.



Сходимость метода

На приведенных ниже рисунках представлены графические иллюстрации поведения итерационного процесса.





Заметим, что в зависимости от расположения функции $\varphi(x)$ метод может как сходиться так и расходиться.

Метод сходиться, если $|\varphi'(x)| < 1$ и расходиться, если $|\varphi'(x)| > 1$.

На основании выше сказанного можно записать следующую теорему.

Теорема. Пусть в некоторой σ -окрестности корня x^* функция $\varphi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$$|\varphi'(x)| \leq q,$$

где $0 < q < 1$ – постоянная.

Тогда независимо от выбора начального приближения $x^{(0)} \in U_\sigma(x^*)$ итерационная последовательность не выходит из этой окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии и справедлива оценка погрешности:

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq q^n \left| x^{(0)} - x^* \right|.$$

Критерий окончания

Теорема. Пусть в некоторой σ -окрестности корня x^* функция $\varphi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$$|\varphi'(x)| \leq q,$$

где $0 < q < 1$ – постоянная. И $x^{(0)} \in U_\sigma(x^*)$. Тогда верна следующая апостериорная оценка погрешности:

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq \frac{q}{1-q} \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right|, \quad n \geq 1. \quad (35)$$

При известной величине q можно сформулировать следующий критерий остановки итерационного процесса

$$\frac{q}{1-q} \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon.$$

Т. е. если данное условие выполнено, то можно считать, что $x^{(n)}$ является приближением к x^* с точностью ε .

Замечание 1.

• Для $0 < q \leq 1/2$ критерий окончания заменяют на более простой критерий:

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon.$$

Действительно, в этом случае $\frac{1-q}{q} \geq 1$ и потому неравенство

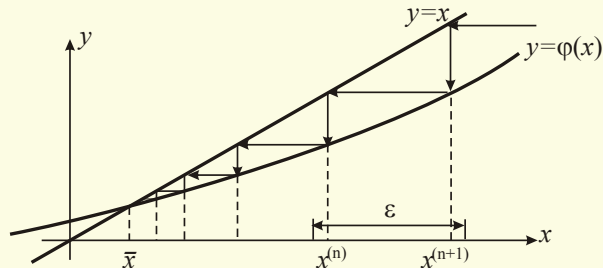
$$\frac{q}{1-q} \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon.$$

выполняется автоматически.

• Если же $1/2 < q < 1$, то использование критерия

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon$$

может привести к преждевременной остановке итерационного процесса, так как при близкой к 1 величине q итерационный процесс сходится очень медленно и расстояние между $x^{(n)}$ и $x^{(n+1)}$ не характеризует расстояние от $x^{(n)}$ до x^* .



Замечание 2. Для использования выше указанных критериев останова необходимо знать величину q .

В малой окрестности корня x^* : $\varphi'(x) \approx \varphi'(x^*)$. Следовательно, величина $\varphi'(\xi^{(n-1)}) \approx \varphi'(x^*)$.

Далее

$$\begin{aligned}x^{(n)} - x^{(n-1)} &= \varphi\left(x^{(n-1)}\right) - \varphi\left(x^{(n-2)}\right) = \\ &= \varphi'\left(\tilde{\xi}^{(n-1)}\right)\left(x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\right).\end{aligned}$$

Следовательно

$$\varphi'\left(\tilde{\xi}^{(n-1)}\right) = \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} \approx \varphi'(x^*).$$

Тогда можно использовать следующий критерий окончания:

$$\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| < \frac{1 - \varphi'\left(\tilde{\xi}^{(n-1)}\right)}{\varphi'\left(\tilde{\xi}^{(n-1)}\right)} \varepsilon.$$

Приведение уравнения к виду, удобному для итераций

Необходимо привести уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ при условии $|\varphi'(x)| \leq q$, где $0 \leq q < 1$.

Укажем один из способов такого преобразования.

Пусть $f'(x)$ на отрезке локализации $[a, b]$ непрерывна и положительна.

Тогда $f'(x)$ достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений: M и m , т.е. $0 < m \leq f'(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$.

Приведем уравнение $f(x) = 0$ к виду

$$x = x - \tau f(x),$$

где $\tau > 0$.

В этом случае итерационная функция имеет вид

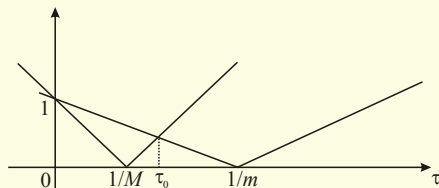
$$\varphi(x) = x - \tau f(x).$$

Необходимо выбрать параметр τ таким образом, чтобы выполнялось условие $|\varphi'(x)| \leq q$.

Так как

$$1 - \tau M \leq \varphi'(x) = 1 - \tau f'(x) \leq 1 - \tau m.$$

И, следовательно, $q = \max\{|1 - \tau m|, |1 - \tau M|\}$.



Для выполнения неравенства $q < 1$, достаточно взять $\tau \in (0, 2/M)$. Если известны обе величины M и m , то из равенства

$$\tau M - 1 = 1 - \tau m \quad \Longrightarrow \quad \tau = \tau_0 = \frac{2}{M + m}.$$

В этом случае $q = \frac{M - m}{M + m}$.

Метод Ньютона.

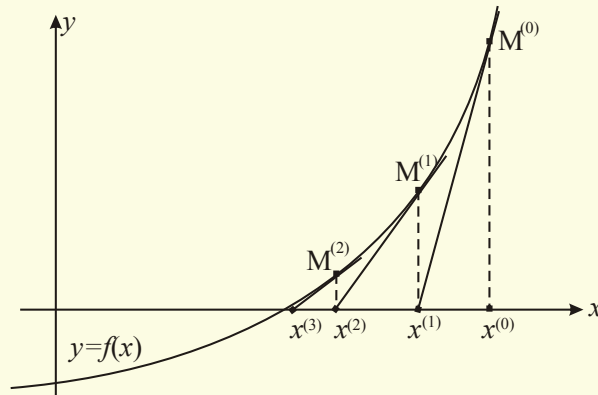
Рассмотрим два способа получения расчетной формулы.

Метод касательных.

Пусть $x^{(0)}$ – начальное приближение к корню x^* .

В точке $M^{(0)}(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ проведем касательную к графику функции $y = f(x)$. За новое приближение $x^{(1)}$ примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox .

Аналогично, за новое приближение $x^{(2)}$ примем абсциссу точки пересечения с осью Ox касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M^{(1)}(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$.



Продолжая этот процесс далее получаем последовательность $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ..., $x^{(n)}$, ... приближений к корню x^* .

Касательная к графику функции в точке $M^{(n)}(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$ имеет вид:

$$y - f(x^{(n)}) = f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}).$$

Абсцисса $x^{(n+1)}$ точки пересечения этой касательной и оси Ox удовлетворяет уравнению:

$$f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = 0.$$

Выражая из данного уравнения $x^{(n+1)}$ получаем расчетную формулу для метода Ньютона:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \quad n \geq 0.$$

Метод линеаризации.

Пусть $x^{(n)}$ – полученное приближение.

Запишем функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $x^{(n)}$.

$$f(x) = f\left(x^{(n)}\right) + f'\left(x^{(n)}\right)\left(x - x^{(n)}\right) + \frac{f''(c)}{2!}\left(x - x^{(n)}\right)^2,$$

где $c \in (x^{(n)}, x)$.

Заменяя в уравнении $f(x) = 0$ функцию $f(x)$ главной линейной частью разложения, получаем линейное уравнение:

$$f\left(x^{(n)}\right) + f'\left(x^{(n)}\right)\left(x - x^{(n)}\right) = 0.$$

Принимая решение $x^{(n+1)}$ полученного линейного уравнения за новое приближение, приходим к формуле:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}, \quad n \geq 0.$$

Теорема. Пусть x^* – простой корень уравнения $f(x) = 0$ и $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в

$$U_\sigma(x^*) = \{x, |x - x^*| < \sigma\}.$$

Пусть $f'(x) \neq 0$ в $U_\sigma(x^*)$, $f''(x)$ непрерывна в $U_\sigma(x^*)$ и

$$0 < m = \inf_{x \in U_\sigma(x^*)} |f'(x)|, \quad M = \sup_{x \in U_\sigma(x^*)} |f''(x)|,$$

причем $\frac{M|x^{(0)} - x^*|}{2m} < 1$.

Тогда если $x^{(0)} \in U_\sigma(x^*)$, то метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью сходимости и для погрешности справедлива оценка

$$|x^{(n)} - x^*| \leq q^{2^n - 1} |x^{(0)} - x^*|,$$

где $q = \frac{M|x^{(0)} - x^*|}{2m} < 1$.

Теорема 1. Пусть для всех $x \in [a, b]$ либо

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0$$

либо

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$$

Тогда последовательность $\{x^{(k)}\}$, определенная согласно методу Ньютона, с $x^{(0)} = b$ монотонно убывает и сходится к x^* .

Теорема 2. Пусть для всех $x \in [a, b]$ либо

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0$$

либо

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0.$$

Тогда последовательность $\{x^{(k)}\}$, определенная согласно методу Ньютона, с $x^{(0)} = a$ монотонно возрастает и сходится к x^* .

Критерий окончания.

На практике чаще всего используют апостериорные оценки.

Теорема. Пусть x^* – простой корень уравнения $f(x) = 0$ и $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в $U_\sigma(x^*)$. И $x^{(0)} \in U_{\sigma/2}(x^*)$. Тогда для всех $n \geq 1$ верна оценка

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right|.$$

Можно сформулировать следующий критерий окончания: при заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления следует вести до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon.$$

Связь метода Ньютона и метода простой итерации. Метод Ньютона можно рассматривать как один из вариантов метода простой итерации.

При этом

$$x = \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. И полученная итерционная формула совпадает с итерационной формулой метода простой итерации.

$$x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)}).$$

Замечание. Не следует делать ложный вывод о том, что при таком подходе метод Ньютона имеет линейную скорость сходимости. Так как

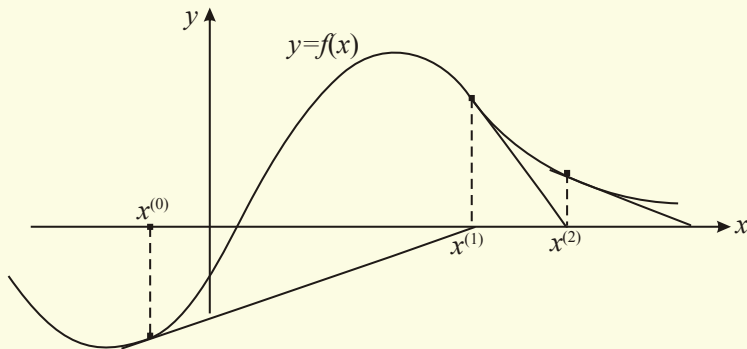
$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = f(x) \frac{f''(x)}{(f'(x))^2},$$

то при $f(x^*) = 0$ следует, что $\varphi'(x^*) = 0$ и величина $\alpha^{(n)} = \varphi'(\xi^{(n)})$, определяющая в методе простой итерации коэффициент сжатия ошибки, стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Скорость сходимости возрастает по мере приближения к корню. Следовательно, характер сходимости не является линейным.

Трудности использование метода Ньютона.

Для практического применения метода Ньютона необходимо преодолеть две трудности.

- Необходимость вычисления производной $f'(x)$. Часто бывает не возможно найти $f'(x)$, а иногда данная операция очень трудоемка.
- Метод Ньютона обладает только локальной сходимостью, т.е. неудачный выбор начального приближения может дать расходящуюся последовательность. Для преодоления такого рода трудностей метод Ньютона часто используют в сочетании с каким-либо другим методом (гарантированно сходящимся). Например, методом бисекции.



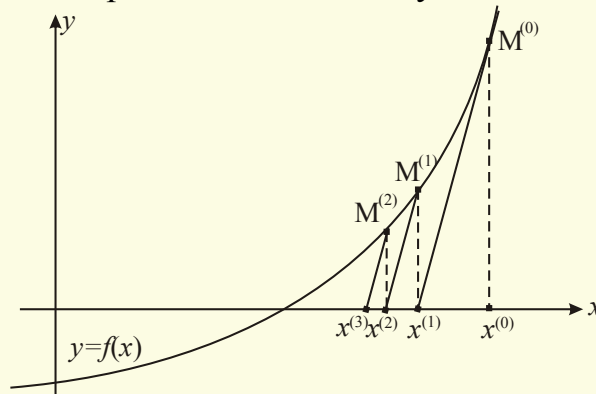
Модификации метода Ньютона.

Упрощенный метод Ньютона.

Если $f'(x)$ непрерывна, то ее значение вблизи простого корня x^* почти постоянно. Поэтому можно попытаться вычислить $f'(x)$ только один раз в точке $x^{(0)}$. И в итерационной формуле метода Ньютона $f'(x^{(n)})$ заменяют на $f'(x^{(0)})$. В результате

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(0)})}, \quad n \geq 0.$$

При таком подходе скорость сходимости будет линейной.



Данный метод можно рассматривать как метод простой итерации с итерационной функцией

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x^{(0)})}.$$

Так как $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x^{(0)})}$, то знаменатель

$$q \approx \left| 1 - \frac{f'(x^*)}{f'(x^{(0)})} \right|$$

Метод ложного положения

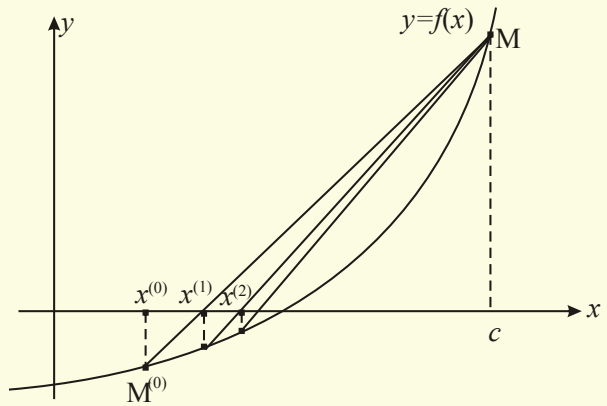
В основе этого метода лежит следующее приближенное равенство

$$f'(x^{(n)}) \approx \frac{f(z^{(n)}) - f(x^{(n)})}{z^{(n)} - x^{(n)}},$$

которое следует из определения производной.

Пусть c – фиксированная точка, расположенная в окрестности простого корня x^* . Заменим в расчетной формуле метода Ньютона производную $f'(x^{(n)})$ правой частью приближенного равенства и положим $z^{(n)} = c$. В результате получаем:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{c - x^{(n)}}{f(c) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)}), \quad n \geq 0.$$



Данный метод обладает также линейной скоростью сходимости. Его можно рассматривать как метод простой итерации с итерационной функцией

$$\varphi(x) = x - \frac{c - x}{f(c) - f(x)} f(x).$$

И знаменателем

$$q \approx |\varphi'(x^*)| = \left| 1 - \frac{(c - x^*)}{f(c)} f'(x^*) \right|.$$

Метод секущих.

В формуле Ньютона заменяют производную

$$f'(x^{(n)}) \approx \frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})}{x^{(n-1)} - x^{(n)}},$$

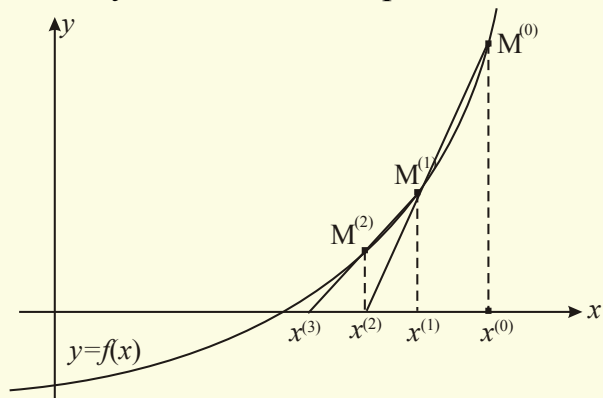
что приводит к расчетной формуле метода секущих

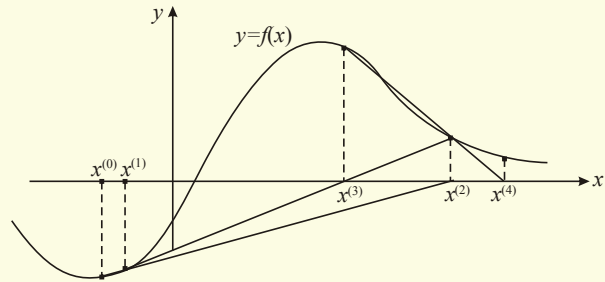
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)}), \quad n \geq 1.$$

В отличие от предыдущих методов, данный метод является двухшаговым. В частности, чтобы начать вычисления необходимо задать два начальных приближения $x^{(1)}$ и $x^{(0)}$.

Трудоёмкость данного метода меньше, чем у метода Ньютона, так как в методе секущих требуется на одной итерации только одно вычисление функции, а в методе Ньютона два f и f' .

Замечание. Данный метод обладает только локально сходимостью и требует двух близких к x^* начальных приближений $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Если эти приближения выбраны неудачно, то метод расходится.





Методы аппроксимации функции. Постановка задачи приближения функции.

Задачи, приводящие к задаче приближения функций.

- Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений:

x_1	x_2	x_3	\dots	x_k	\dots
y_1	y_2	y_3	\dots	y_k	\dots

а вычисления производятся в точках, не совпадающих с табличными.

- Вычисление значения функции $y = f(x)$ связано со значительными трудностями и приводит к большим затратам машинного времени.

В этом случае, рассматривается задача о наилучшем приближении в нормированном пространстве H , когда заданную функцию $y \in H$ требуется заменить линейной комбинацией $\varphi \in H$ так, чтобы отклонение $\|y - \varphi\|$ было минимальным.

Точечная аппроксимация

Условия близости функций $\varphi(x)$ и $y(x)$ формулируются на конечном множестве точек: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. При этом функции $y(x)$ и $\varphi(x)$ заменяют векторами их значений на данном множестве точек, т.е.

$$y(x) \longrightarrow (y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n))^T \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

(1) При таком подходе можно использовать стандартную метрику на \mathbb{R}^n :

$$\rho(\bar{y}, \bar{\varphi}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y(x_i) - \varphi(x_i))^2} \longrightarrow \min.$$

В этом случае говорят, что $\varphi(x)$ – наилучшее приближение $y(x)$ в среднеквадратичном при точечной аппроксимации.

(2) В некоторых случаях описанная выше задача вырождается в задачу простой **интерполяции**, т.е. требуется подобрать такую функцию $\varphi(x)$, чтобы

$$\varphi(x_i) = y(x_i).$$

Линейная интерполяция

Близость функции $y(x)$ и $\varphi(x)$ достигается введением в $\varphi(x)$ свободных параметров $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Основная задача – подбор удачного вида функциональной зависимости $\varphi(x, a)$.

Пусть функция $y(x)$ известна только в узлах некоторой сетки x_i , т. е. задана таблицей. Потребуем, чтобы $\varphi(x, a)$ совпадала с табличными значениями $y(x)$ в выбранных узлах сетки:

$$\varphi(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = y(x_i) \equiv y_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (36)$$

Получаем систему из $n + 1$ уравнений, из которой можно определить неизвестные коэффициенты a_i .

Полученный способ подбора параметров называется **интерполяцией** или **лагранжевой** интерполяцией.

Если $\varphi(x, a)$ нелинейно зависит от параметров, то интерполяцию называют **нелинейной**. В этом случае нахождение параметров $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ является очень трудоемкой задачей.

В нашем курсе будем рассматривать **линейную** интерполяцию, т.е.

$$\varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ - линейно-независимая система функций, $k = \overline{0, n}$.

Используя (36), получаем СЛАУ для определения параметров a_k :

$$\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (37)$$

Для того, чтобы поставленная задача интерполяции всегда имела единственное решение необходимо, чтобы определитель системы (37) был отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \det\{\varphi_k(x_i)\} = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (38)$$

Замечание. Для линейной интерполяции в качестве системы функций наиболее удобны алгебраические многочлены.

Интерполяционная формула Лагранжа

Теорема. Пусть $y(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_n(x): \|y(x) - P_n(x)\| < \varepsilon$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точки x_k - **узлы интерполирования**, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, в которых известны значения функции $y(x)$. Запишем задачу интерполирования алгебраическими многочленами:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Т.е. нужно построить многочлен степени n такой, чтобы

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_nx_i^n = y(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Данная задача имеет единственное решение, так как определитель полученной системы отличен от нуля (определитель Вандермонда), при условии, что нет совпадающих узлов.

Действительно

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Решение полученной системы можно записать различным образом, например в форме Лагранжа.

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x)y(x_k). \quad (39)$$

Найдем выражения для коэффициентов $c_k(x)$. Из условия

$$L_n(x_i) = y(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

получаем

$$\sum_{k=0}^n c_k(x_i)y(x_k) = y(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Эти соотношения будут выполнены, если на функцию $c_k(x)$ наложить условия:

$$c_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Данные условия означают, что каждая функция $c_k(x)$, $k = \overline{0, n}$ имеет не менее n нулей на $[a, b]$.

Так как $L_n(x)$ – многочлен степени n , то $c_k(x)$, $k = \overline{0, n}$ будем искать также в виде многочлена степени n , т. е. в виде:

$$c_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1}) \times \\ \times (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n).$$

Из условия $c_k(x_k) = 1$ найдем коэффициент λ_k :

$$\lambda_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Таким образом, коэффициенты $c_k(x)$ интерполяционного многочлена (39) находятся по формулам

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}. \quad (40)$$

Часто, данные коэффициенты представляют в несколько другом виде.

Введем в рассмотрение многочлен $\omega(x)$ степени $n + 1$:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1}) \times \\ &\quad \times (x - x_k)(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n).\end{aligned}$$

Вычислим производную данного многочлена в точке x_k :

$$\begin{aligned}\omega'(x_k) &= (x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1}) \times \\ &\quad \times (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n).\end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$c_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Итак, **интерполяционный многочлен Лагранжа** имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} y(x_k) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)} y(x_k).$$

О единственности решения задачи интерполяции

Теорема. Построенный полином является единственным решением задачи интерполяции.

Погрешность интерполирования. При замене функции $y(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$ допускается погрешность (погрешность интерполяционной формулы Лагранжа):

$$r_n(x) = y(x) - L_n(x).$$

Теорема. Пусть $y(x) \in C_{[a,b]}^{n+1}$ – $n + 1$ раз непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Тогда $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi \in [a, b]$ такая, что

$$y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x).$$

В частности, если $M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |y^{(n+1)}(x)|$, то $\forall x \in [a, b]$

$$|y(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$