СЕМИНАРЫ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Е. С. Тверская

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Правило Рунге практической оценки погрешности.

Пусть определенный интеграл вычислен с помощью квадратурной формулы F^h, тогда

$$F = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F^h + r(f).$$

где $r(f)$ - погрешность квадратурной формулы.

Например.

Для формулы трапеций

$$r(f) = -\frac{1}{12}h^2 \int\limits_a^b f''(x)\,dx + \mathrm{O}(h^3).$$

Для формулы центральных прямоугольников

$$r(f) = \frac{1}{24}h^2 \int\limits_a^b f''(x)\,dx + \mathrm{O}(h^3).$$

Для формулы Симпсона

$$r(f) = -\frac{1}{180} h^4 \int\limits_a^b f^{IV}(x)\,dx + \mathrm{O}(h^5).$$

Таким образом, можно записать

$$F = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F^h + ch^p + \mathrm{O}(h^{p+1}).$$

Правило Рунге позволяет оценить погрешность вычисления определенного интеграла не прибегая к фактическому вычислению главного члена погрешности, а опираясь лишь на факт существования такого главного члена.

Осуществим вычисление определенного интеграла с использование квадратурной формулы с постоянным шагом h и sh, где $s < 1$.

$$F = F^h + ch^p + \mathrm{O}_1(h^{p+1}), \tag{1}$$

$$F = F^{sh} + c(sh)^p + \mathrm{O}_2(h^{p+1}). \tag{2}$$

Тогда
$$F^h + ch^p + \mathrm{O}_1(h^{p+1}) = F^{sh} + c(sh)^p + \mathrm{O}_2(h^{p+1}).$$
Выразим отсюда ch^p.
$$ch^p = \frac{F^{sh} - F^h}{1 - s^p} + \mathrm{O}_3(h^{p+1}).$$
Подставим полученное выражение в формулу (2). Тогда получим правило Рунге оценки погрешности:
$$F = F^{sh} + \frac{s^p}{1 - s^p}\left(F^{sh} - F^h\right) + \mathrm{O}(h^{p+1}). \tag{3}$$

Пример. Рассмотрим квадратурную формулу трапеций. Порядок точности данной формулы $p = 2$.

Попробуем с помощью правила Рунге получить формулу более высокого порядка приближения к F - точному значению определенного интеграла.

Осуществим вычисление определенного интеграла с использование формулы трапеций с постоянным шагом h и $h/2$ ($s = 1/2$).

$$F_1 = \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) + \mathrm{O}_1(h^2),$$
$$F_{1/2} = \frac{h}{4}(f_{i-1} + f_{i-1/2}) + \frac{h}{4}(f_{i-1/2} + f_i) + \mathrm{O}_2(h^2).$$

Тогда, с использованием формулы (3) получаем

$$F = F_{1/2} + \frac{1}{3}\left(F_{1/2} - F_1\right) + \mathrm{O}(h^3) = \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i\right).$$