



СЕМИНАРЫ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Е. С. Тверская

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Интерполяция функции одного переменного с помощью кубических сплайнов.

Задачи, приводящие к задаче приближения функций.

- Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений:

x_1	x_2	x_3	\dots	x_k	\dots
y_1	y_2	y_3	\dots	y_k	\dots

а вычисления производятся в точках, не совпадающих с табличными.

- Вычисление значения функции $y = f(x)$ связано со значительными трудностями и приводит к большим затратам машинного времени.

Решение проблемы: Функцию $f(x)$ приближенно заменяют функцией $g(x)$, значение которой в точках x_k принимают за приближенное значение функции $f(x)$.

Постановка задачи интерполяции. Пусть в точках $x_k \in [a, b]$, $k = 1, n$ попарно различных задана таблица значений функции $f(x)$.

Задача интерполяции - задача построения функции $g(x)$, удовлетворяющей условию

$$g(x_k) = y_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где x_k - узлы интерполяции.

Интерполирование сплайнами.

Для избежания больших погрешностей, весь отрезок $[a, b]$ разбивают на частичные отрезки, на каждом из которых приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленом невысокой степени - **кусочно-полиномиальная интерполяция**.

Определение. Сплайном или сплайн-функцией называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке $[a, b]$ и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Рассмотрим частный случай, когда сплайн определяется с помощью многочлена третьей степени - **кубический сплайн**.

Построение кубического сплайна. (I способ.) Введем разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сплайном, соответствующим функции $f(x)$ и узлам x_k , $k = \overline{0, n}$ называется функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям:

а. На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{0, n}$ функция $g(x)$ является многочленом третьей степени, т. е. на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ будем искать $g(x) = g_i(x)$ в виде

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (1)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

б. Функция $g(x)$, а также ее первая и вторая производные ($g'(x)$ и $g''(x)$) непрерывны на отрезке $[a, b]$.

в. $g(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Из условия интерполирования $g_i(x_i) = f(x_i)$ получаем, что

$$g_i(x_{i-1}) = a_i = f(x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Из требования непрерывности функции $g(x)$ и условия интерполяции приходим к условиям

$$g_i(x_i) = g_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1} \quad \text{и} \quad g_n(x_n) = f(x_n).$$

Отсюда, с учетом (2) получаем

$$f_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $f_i = f(x_i)$ и $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Из равенства (1) получаем

$$g'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2.$$
$$g'_{i+1}(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2.$$

Тогда, опираясь на условие непрерывности первой производной

$$g'_i(x_i) = g'_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

приходим к уравнениям

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (4)$$

Из условия непрерывности второй производной

$$g''_i(x_i) = g''_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

где

$$g''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$
$$g''_{i+1}(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i).$$

получаем уравнения

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (5)$$

Объединяя (3)-(5) получаем систему из $3n - 2$ уравнений с $3n$ неизвестными b_i, c_i и $d_i, i = \overline{1, n}$.

Два недостающих уравнения получаем задавая граничные условия для $g(x)$.

Полагая $f''(a) = f''(b) = 0$ (независимо от того, выполнены ли эти условия для интерполируемой функции) получаем

$$g_1''(x_0) = g_n''(x_n) = 0,$$

Т. е.

$$c_1 = 0, \quad \text{и} \quad c_n + 3d_n h_n = 0. \quad (6)$$

Заметим, что условие $c_n + 3d_n h_n = 0$ совпадает с условием (5) при $i = n$, положив $c_{n+1} = 0$.

Решим систему (3)-(5).

Выразим d_i из уравнения (5)

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

и подставим в уравнения (3) и (4). Получим

1.

$$b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{(c_{i+1} - c_i) h_i^2}{3} = f_i - f_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

Откуда

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3} (2c_i + c_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (7)$$

2.

$$b_i + c_i h_i + c_{i+1} h_i = b_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (8)$$

С учетом условий (7) и (8) получаем равенство

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3} (2c_i + c_{i+1}) + c_i h_i + c_{i+1} h_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3} (2c_{i+1} + c_{i+2}).$$

Группируя подобные слагаемые приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} h_{i-1} c_{i-1} + 2c_i (h_{i-1} + h_i) + h_i c_{i+1} &= \\ &= 3 \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right), \quad i = \overline{2, n}; \quad (9) \end{aligned}$$

$$c_1 = c_{n+1} = 0.$$

Полученная система имеет единственное решение. Следовательно, существует единственный кубический сплайн, определяемый уравнением (1), условиями (а)-(в) и граничными условиями $g_1''(a) = g_n''(b) = 0$.

Матрица полученной системы является трехдиагональной со строгим диагональным преобладанием, поэтому решить данную систему можно, например, методом прогонки.

Если положить, что разбиение отрезка $[a, b]$ является равномерным, т. е. $h_i = h = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$ то система (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} &= \frac{3}{h^2} (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}), \quad i = \overline{2, n}; \\ c_1 &= c_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Построение кубического сплайна. (II способ.)

Задачу кусочно-кубической интерполяции поставим следующим образом: на отрезке $[a, b]$ необходимо найти функцию $g(x)$, удовлетворяющую следующим требованиям.

а. Функция $g(x)$, а также ее первая и вторая производные ($g'(x)$ и $g''(x)$) непрерывны на отрезке $[a, b]$.

б. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $g(x)$ является кубическим многочленом вида

$$g_i(x) = \sum_{k=0}^3 a_k^i (x_i - x)^k, \quad k = \overline{1, n}.$$

в. В узлах разбиения $x_i, i = \overline{1, n}$ выполняются равенства

$$g(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad k = \overline{1, n}.$$

г. $g''(x)$ удовлетворяет граничным условиям $g''(a) = g''(b) = 0$.

Так как вторая производная функции $f(x)$ непрерывна и линейна на каждом частичном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, можно записать

$$g''(x) = m_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + m_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad (11)$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ и $m_i = g''(x_i)$

Проинтегрировав обе части равенства (11) дважды получим

$$g(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i \frac{x_i - x}{h_i} + B_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (12)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

где A_i и B_i константы интегрирования.

Подставляя $x = x_i$ и $x = x_{i-1}$ в (12), получим

$$m_i \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i,$$

$$m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1},$$

Окончательно имеем

$$g(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} +$$

$$+ \left(f_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - m_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (13)$$

$$g'(x) = -m_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{m_{i-1} - m_i}{6} h_i. \quad (14)$$

Из (14) находим односторонние пределы производной в точках x_i , $i = \overline{1, n-1}$:

$$g'(x_i - 0) = m_{i-1} \frac{h_i}{6} + m_i \frac{h_i}{3} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$

$$g'(x_i + 0) = -m_i \frac{h_{i+1}}{3} - m_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}.$$

Так как функции $g'(x)$ и $g''(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то получим систему

$$m_{i-1} \frac{h_i}{6} + m_i \frac{h_{i+1} + h_i}{3} + m_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} =$$

$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (15)$$

Дополняя эти уравнения равенствами $m_0 = m_n = 0$ получаем линейную алгебраическую систему для нахождения неизвестных m_i , $i = \overline{1, n-1}$, матрица которой выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3 + h_4}{3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_n + h_{n-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Матрица полученной системы является трехдиагональной симметричной со строгим диагональным преобладанием, поэтому решить данную систему можно, например, методом прогонки.

Следовательно, коэффициенты $m_i, i = \overline{1, n-1}$ определяются из системы (15) однозначно и задачи о нахождении кусочно-кубической функции $g(x)$ имеет единственное решение.

Кубические сплайн-функции обладают очень важным свойством, которое обуславливает высокую эффективность сплайн-интерполяции.

Рассмотрим на $[a, b]$ класс функций, имеющих интегрируемые с квадратом вторые производные $W_2^2[a, b]$.

Постановка задачи: отыскать интеполяционную функцию

$$u \in W_2^2[a, b], \quad u(x_k) = f_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (16)$$

которая минимизирует функционал

$$\Phi(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 dx \quad (17)$$

на классе $W_2^2[a, b]$.

Покажем, что минимум такого функционала достигается на кусочно-кубической сплайн функции $g(x)$, которая была построена.

$$\Phi(u - g) = \int_a^b [u''(x) - g''(x)]^2 dx. \quad (18)$$

Интегрируя по частям, используя свойства функций $g(x)$ и $u(x)$, получим

$$\begin{aligned}
\Phi(u - g) &= \int_a^b [u''(x) - g''(x)]^2 dx = \\
&= \int_a^b [[u''(x)]^2 - [g''(x)]^2 + 2[g''(x)]^2 - 2u''(x)g''(x)] dx = \\
&= \Phi(u) - \Phi(g) + 2 \int_a^b [g''(x) - u''(x)]g''(x) dx = \\
&= \Phi(u) - \Phi(g) + 2 (g'(x) - u'(x))g''(x)|_{x=a}^{x=b} - 2 \int_a^b [g'(x) - u'(x)]g'''(x) dx = \\
&= \Phi(u) - \Phi(g) - 2 \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [g'(x) - u'(x)]g'''(x) dx
\end{aligned}$$

Но $g'''(x) = c_k = \text{const}$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, поэтому

$$\begin{aligned}\Phi(u - g) &= \Phi(u) - \Phi(g) - 2 \sum_{k=1}^n c_k (g(x) - u(x)) \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} = \\ &= \Phi(u) - \Phi(g).\end{aligned}$$

отсюда и из (18) вытекает, что

$$\Phi(g) = \Phi(u) - \Phi(u - g) \leq \Phi(u), \quad (19)$$

для любой функции

$$u \in W_2^2[a, b], \quad u(x_k) = f_k, \quad k = \overline{0, n}.$$

Таким образом на кусочно-кубической функции реализуется минимум функционала (17) и других точек минимума у функционала нет.

Второе определение кусочно-кубической сплайн-функции.

Определение. Сплайном или сплайн-функцией называют такую функцию из класса $W_2^2[a, b]$, которая принимает в узлах сетки заданные значения и минимизирует функционал (17).