

ТПиР, 3с, РЛ1
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

1. Дать определение числового ряда. Доказать необходимый признак сходимости числового ряда. Ряды с неотрицательными членами. Доказать необходимое и достаточное условие сходимости таких рядов.
2. Ряды с неотрицательными членами. Доказать предельный признак сравнения сходимости числовых рядов. Доказать интегральный признак Коши сходимости ряд.
3. Ряды с неотрицательными членами. Доказать предельный признак Даламбера сходимости числовых рядов. Доказать предельный радикальный признак Коши сходимости числовых рядов.
4. Знакопередающиеся числовые ряды. Дать определение ряда Лейбница. Доказать признак Лейбница. Доказать теорему об оценке остаточного члена ряда Лейбница.
5. Дать определение равномерно сходящегося функционального ряда. Доказать необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда. Доказать теорему о предельном переходе для функциональных рядов.
6. Дать определение равномерно сходящегося функционального ряда. Доказать теорему о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда.
7. Дать определение степенного ряда. Доказать теорему Абеля. Доказать теорему о равномерной сходимости степенного ряда.
8. Дать определение степенного ряда. Доказать теорему об интегрируемости и дифференцируемости суммы степенного ряда. Ряд Тейлора. Доказать теорему о выражении коэффициентов степенного ряда через значения его производных в точке разложения.
9. Дать определение двойного интеграла. Сформулировать свойства двойных интегралов. Доказать теорему о сведении двойного интеграла к повторному (случай прямоугольника). Сформулировать данную теорему в общем случае.
10. Дать определение двойного интеграла. Вывести формулу замены переменных в двойном интеграле (случай линейной замены).
11. Дать определение тройного интеграла. Вычисление тройных интегралов. Формула замены переменных в тройном интеграле при переходе к цилиндрической и сферической системам координат (получить Якобиан преобразования).
12. Геометрические приложения двойных и тройных интегралов. Вычисление объемов и площадей с помощью двойных и тройных интегралов. Вывести формулу площади поверхности.
13. Дать определение криволинейного интеграла 1-го рода. Сведение криволинейного интеграла 1-го рода к интегралу Римана. Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода.
14. Дать определение криволинейного интеграла 2-го рода. Вывести формулу вычисления криволинейного интеграла 2-го рода. Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода.
15. Доказать формулу Грина для односвязной области. Обобщить данную формулу на случай многосвязной области.
16. Вывести формулу Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла 2-го рода, не зависящего от пути интегрирования. Доказать равносильность условий независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в односвязной области ($dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, $\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ и $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$).

17. Дать определение поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода. Доказать формулу Остроградского-Гаусса. Сформулировать теорему Остроградского — Гаусса в векторной форме.

18. Дать определение поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода. Доказать формулу Стокса. Сформулировать теорему Стокса в векторной форме.

19. Дать определение однозначной функции комплексной переменной. Доказать необходимое условие дифференцируемости функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.

20. Дать определение однозначной функции комплексной переменной. Доказать достаточное условие дифференцируемости функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.

21. Дать определение аналитической функции. Сформулировать и доказать свойства аналитических функций.

22. Ввести понятие интеграла по комплексной переменной. Доказать теорему Коши.

23. Вести понятие неопределенного интеграла. Доказать теорему об аналитичности первообразной.

24. Вывести интегральную формулу Коши. Доказать теорему о производных высших порядков для аналитических функций.

25. Ряд Лорана. Правильная и главные части ряда Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Доказать теорему о разложении аналитической функции в ряд Лорана.

26. Дать определение правильной, особой и изолированной особой точки функции $f(z)$. Дать два эквивалентных определения устранимой особой точки. Доказать эквивалентность этих определений.

27. Дать определение правильной, особой и изолированной особой точки функции $f(z)$. Дать два эквивалентных определения полюса. Доказать эквивалентность этих определений.

28. Дать определение правильной, особой и изолированной особой точки функции $f(z)$. Дать два эквивалентных определения существенно особой точки. Доказать теорему Сохоцкого-Вейерштрасса.

29. Дать определение вычета аналитической функции. Доказать основную теорему о вычетах. Доказать теорему о сумме вычетов.

30. Дать определение изолированной бесконечно удаленной точки. Классификация бесконечно удаленных особых точек. Вычисление вычета в бесконечно удаленной особой точке.

Примеры задач

1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x+1)^{n+1}}{3^{n-1} \sqrt{n^2+1}}$. Исследовать ряд на сходимости на концах интервала сходимости.

2. Разложить функцию $f(x) = (x+4) \cdot e^{x/2}$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$. Указать область сходимости ряда.

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (3x - 5x^2y^2) dx + \left(3y^2 - \frac{10}{3}x^3y \right) dy.$$

5. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{1 - \cos z}{(z^2 + \pi^2)z^2}$ (включая бесконечно удаленную точку), определить их характер (пояснить). Найти вычеты в этих точках.

6. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$$

с помощью интегральной формулы Коши и ее следствий.

7. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} dz$$

с помощью теории вычетов.

8. Найти разложение функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

в ряд Лорана по степеням $(z - 2)$ в кольце $1 < |z - 2| < +\infty$.