

3-й семестр, РЛ1 (2020)
Уравнения матем. физики и преобр. Фурье
модуль 3, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Теоретический вопрос (№1)

1. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать и доказать теорему о среднем значении для гармонической функции. (2 балла)
2. Какую функцию называют гармонической в области? Вывести первую формулу Грина. (2 балла)
3. Какую функцию называют гармонической в области? Вывести вторую формулу Грина. (2 балла)
4. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать и доказать принцип максимума. (2 балла)
5. Какую функцию называют гармонической в области? Доказать единственность решения задачи Дирихле. Доказать необходимое условие разрешимости задачи Неймана. (2 балла)
6. Метод функций Грина. Получить фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном и трехмерном случаях. (2 балла)
7. Метод функций Грина. Получить интегральное представление решения краевой задачи для уравнения Лапласа. (2 балла)

Теоретический вопрос (№2)

1. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать теорему о среднем значении для гармонической функции. (4 балла)
2. Какую функцию называют гармонической в области? Записать первую формулу Грина. (4 балла)
3. Какую функцию называют гармонической в области? Записать вторую формулу Грина. (4 балла)
4. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать принцип максимума. (4 балла)
5. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать свойство единственности решения задачи Дирихле. (4 балла)
6. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать необходимое условие разрешимости задачи Неймана. (4 балла)

Теоретический вопрос (№3)

1. Дать определение преобразования Лапласа. Дать определение функции-оригинала. Сформулировать условия существования оригинала. Функция Хевисайда. Вывести изображения элементарных функций. (4 балла)
2. Дать определение преобразования Лапласа. Доказать свойство линейности и теорему подобия. (4 балла)
3. Дать определение преобразования Лапласа. Доказать теорему смещения и теорему запаздывания. (4 балла)
4. Дать определение преобразования Лапласа. Доказать теоремы об интегрировании и дифференцировании изображения. (4 балла)
5. Дать определение преобразования Лапласа. Доказать теоремы об интегрировании и дифференцировании оригинала. (4 балла)
6. Дать определение преобразования Лапласа. Вывести формулу для вычисления периодических оригиналов. (4 балла)

7. Дать определение свертки 2-х оригиналов. Сформулировать и доказать теорему об изображении свертки. (4 балла)

8. Приложение операционного исчисления для решения задачи Коши. Дать определение предаточной функции. Вывести формулу Дюамеля. Формула Меллина. (4 балла)

9. Приложение операционного исчисления для решения задачи Коши. Дать определение предаточной функции. Вывести формулу Дюамеля. Сформулировать 1-ю теорему разложения. (4 балла)

10. Приложение операционного исчисления для решения задачи Коши. Дать определение предаточной функции. Вывести формулу Дюамеля. Сформулировать 2-ю теорему разложения. (4 балла)

11. Приложение операционного исчисления для решения задачи Коши. Дать определение предаточной функции. Вывести формулу Дюамеля. Сформулировать 3-ю теорему разложения. (4 балла)

Типовой вариант билета (задачи), min - 6 баллов, max - 10 балла

1. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$
$$u|_{r=1} = 1 + \sin^2 \varphi, \quad u'_r|_{r=2} = \cos \varphi.$$

2. Методами операционного исчисления решить следующую задачу Коши:

$$x'' + 9x = \cos 3t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -2.$$

(2 балла)

3. Проверить, является ли функция $u(x, y, z) = \frac{(x^2 - y^2)z}{(x^2 + y^2)^2}$ гармонической. Если является, то указать, в какой области. (3 балла)

4. Найдите изображение следующей функции:

$$\int_0^t \exp(2\tau) \cos(t - \tau) d\tau.$$

(3 балла)

Типовой вариант билета (теория), min - 6 баллов, max - 10 баллов

1. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать и доказать теорему о среднем значении для гармонической функции. (2 балла)

2. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать необходимое условие разрешимости задачи Неймана. (4 балла)

3. Дать определение преобразования Лапласа. Дать определение функции-оригинала. Сформулировать условия существования оригинала. Функция Хевисайда. Вывести изображения элементарных функций. (4 балла)