

Задача 1

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре. (3 балла)

1.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = 3 \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = 6 \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos \vartheta + \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \sin^2 \vartheta (1 + 3 \sin 2\varphi). \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = \sin 2\vartheta \sin \varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 4 \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \cos^2 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 4 \sin^3 \vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \sin^2 \vartheta (1 + \cos \vartheta \sin 2\varphi). \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos^3 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = 2 \cos \vartheta + 3 \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 3 \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 2 \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = \sin^2 \vartheta (\cos \vartheta + \cos 2\varphi). \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^2 \vartheta (1 + \sin 2\varphi). \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^3 \vartheta + \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = \sin^2 \vartheta (2 \cos \vartheta + 3 \sin 2\varphi). \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \sin \vartheta (\sin \vartheta + \cos \varphi). \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^2 \vartheta (3 + \cos 2\varphi). \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 4 \sin^3 \vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 2 \cos^3 \vartheta + \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Задача 2

Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре. (3 балла)

1.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = 3 \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = 6 \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos \vartheta + \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \sin^2 \vartheta (1 + 3 \sin 2\varphi). \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = \sin 2\vartheta \sin \varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 4 \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \cos^2 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 4 \sin^3 \vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \sin^2 \vartheta (1 + \cos \vartheta \sin 2\varphi). \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos^3 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = 2 \cos \vartheta + 3 \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 3 \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 2 \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = \sin^2 \vartheta (\cos \vartheta + \cos 2\varphi). \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^2 \vartheta (1 + \sin 2\varphi). \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^3 \vartheta + \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = \sin^2 \vartheta (2 \cos \vartheta + 3 \sin 2\varphi). \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \sin \vartheta (\sin \vartheta + \cos \varphi). \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^2 \vartheta (3 + \cos 2\varphi). \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 4 \sin^3 \vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 2 \cos^3 \vartheta + \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Задача 3

Найти функцию Грина заданной краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области $\Omega = \{(r, \varphi): r > 0, \alpha < \varphi < \beta\}$ с граничными условиями соответствующего типа. С помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи. (4 балла)

Вар.	α	β	Типы гран. усл.		f
			$\varphi = \alpha$	$\varphi = \beta$	
1	π	$3\pi/2$	II	I	$\frac{1}{r^4+3}$
2	$3\pi/4$	$5\pi/4$	I	I	$\frac{1}{r^2+1}$
3	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	II	II	e^{-r^2+2}
4	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{1}{r^2+5}$
5	$\pi/2$	π	I	II	re^{-r^2}
6	π	$3\pi/2$	I	I	$\frac{1}{r^4+3}$
7	$-\pi/2$	0	II	II	$\frac{3}{r^2+1}$
8	$-\pi$	$-\pi/2$	II	I	$e^{-r^2} \sin r$
9	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	I	$e^{-r^2} \cos r$
10	$3\pi/4$	$5\pi/4$	II	II	$\frac{1}{r^2+1}$
11	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	I	II	e^{-r^2+2}
12	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{\sin r}{r^2+1}$
13	$\pi/2$	π	I	I	$r^2 e^{-r^2}$
14	π	$3\pi/2$	II	II	$\frac{1}{r^4+3}$
15	$-\pi/2$	0	II	I	$\frac{1}{r^2+1}$
16	$-\pi$	$-\pi/2$	I	II	$(r^2+1)e^{-r^2}$
17	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	I	$(r^3+r)e^{-r^2}$
18	$3\pi/4$	$5\pi/4$	II	II	$\frac{1}{r^2+1}e^{-r^2}$
19	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	I	II	$(r^2-2)e^{-r^2+2}$
20	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{\sin r}{r^2+1}$
21	$\pi/2$	π	I	I	$2re^{-r^2}$
22	π	$3\pi/2$	II	II	$\frac{r^3 e^{-r^4}}{r^4+3}$
23	$-\pi/2$	0	I	II	$\frac{3}{r^2+1}$
24	$-\pi$	$-\pi/2$	II	I	re^{-r^2}
25	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	II	$e^{-r^2} \sin r$
26	$3\pi/4$	$5\pi/4$	I	I	$\frac{1}{r^2+1}$
27	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	II	II	e^{-r^2+2}
28	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{1}{r^2+5}$
29	$\pi/2$	π	I	II	e^{-r^2}
30	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	II	e^{-r^2}