УМФиПФ, 3с, РЛ1
Вопросы для подготовки

1. Классификация дифференциальных уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными. Вывести формулу преобразования квадратичной формы дифференциального уравнения линейного относительно старших производных.

2. Вывести уравнение характеристик в дифференциалах для дифференциального уравнения от двух переменных.

3. Что такое канонический вид дифференциального уравнения 2-го порядка линейного относительно старших прозводных? Описать процедуру приведения к каноническому виду для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.

4. Найти общее решение одномерного волнового уравнения. Дать геометрическую интерпретацию общего решения. Доказать формулу Даламбера для одномерного волнового уравнения.

5. Дать определение преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулировать достаточные условия существования обратного преобразования Фурье. Доказать теорему подобия для преобразования Фурье. Доказать теоремы смещения и запаздывания для преобразования Фурье.

6. Дать определение преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулировать достаточные условия существования обратного преобразования Фурье. Доказать свойство преобразования Фурье, связанное со сверткой.

7. Дать определение преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулировать достаточные условия существования обратного преобразования Фурье. Доказать свойства преобразования Фурье, связанные с дифференцированием.

8. Дать определение преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулировать достаточные условия существования обратного преобразования Фурье. Доказать свойство преобразования Фурье о связи гладкости и скорости убывания на бесконечности.

9. Дать определение преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье.

10. Рассмотреть задачу о наилучшем приближении функции. Доказать, что если элемент представлен суммой ряда по ортогональной системе, то коэффициенты ряда вычисляются по формулам Эйлера — Фурье.

11. Дать определение ряда Фурье. Доказать неравенство Бесселя.

12. Дать определения ряда Фурье. Доказать, что элемент евклидова пространства есть сумма своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда верно равенство Парсеваля.

13. Доказать, что замкнутая ортогональная система является полной. Доказать теорему о связи равенства Парсеваля и замкнутости ортонормированной системы.

14. Дать определение Гильбертового пространства. Дать определение пространства $L_2[a, b]$. Доказать, что оператор Штурма — Лиувилля в случае однородных граничных условий является самосопряженным.

15. Дать определение Гильбертового пространства. Дать определение пространства $L_2[a, b]$. Доказать, что оператор Штурма — Лиувилля в случае однородных граничных условий является неотрицательно определенным.

16. Сформулировать задачу Штурма — Лиувилля. Сколько существует вариантов задачи в одномерном случае? Доказать, свойства собственных функкий и собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля.

17. Дать определение цилиндрической функции. Записать уравнение Бесселя. Найти решение данного уравнения в виде степенного ряда. Сколько функций содержит фундаментальная система решений этого уравнения?

18. Дать определение функции Бесселя. Доказать, что $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Получить фурмулы их дифференцирования.

19. Дать определение функции Бесселя. Доказать теорему об ортогональности функций Бесселя и вычислить квадрат нормы.

20. Найти собственные функции оператора Лапласа для прямоугольника. Найти квадраты норм собственных функцй для различных типах граничных условий. Найти собственные функции оператора Лапласа для круга. Найти квадраты норм собственных функцй для различных типах граничных условий.

21. Найти собственные функции оператора Лапласа для кольца. Найти квадраты норм собственных функцй при граничных условиях 1-го и 2-го рода.

22. Дать определение Гамма-функции Эйлера. Доказать основные свойства Гамма-функции Эйлера.

23. Записать уравнение Лежандра. Показать, что при $\mu = m(m+1)$ уравнение Лежандра имеет ограниченное решение, являющееся полиномом. Выписать решение уравнения Лежандра (полином Лежандра) в форме Родриго.

24. Записать уравнение Лежандра. Выписать решение уравнения Лежандра (полином Лежандра) в форме Родриго. Доказать, что многочлены Лежандра обладают свойством ортогональности. Вычислить квадрат нормы полиномов Лежандра.

25. Записать присоединенное уравнение Лежандра. Получить решение данного уравнения (присоединенные функции Лежандра).

26. Записать присоединенное уравнение Лежандра. Доказать, что присоединенные функции Лежандра образуют полную систему в $L_2[-1, 1]$.

27. Решить задачу на собственные функции уравнения Лапласа для шара. Дать определение сферических функций.

28. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулировать и доказать теорему о среднем значении для гармонической функции.

29. Какую функцию называют гармонической в области? Вывести первую и вторую формулы Грина.

30. Какую функцию называют гармонической в области? Принцип максимума. Единственность решения задачи Дирихле. Условие разрешимости задачи Неймана.

Пример типового билета. Каждый номер оценивается в 6 баллов. (18 баллов - min, 30 баллов - max)

1. Теоретический вопрос (1-30).

2. Задачи на приведение уравнения к каноническому виду.

Для дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 10u_{yy} + 4u_x - 2u_y = 0$$

определить тип, привести к каноническому виду

3. Задачи на преобразование Фурье кусочно линейных функций.

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 6]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,\ 1)$, $B(1,\ 2)$, $C(2,\ 1)$, $D(4,\ -1)$, $E(6,\ 1)$.

4. Задачи на решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике.

Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$u\Big|_{x=0} = \cos\frac{\pi y}{2b}, \quad u\Big|_{x=a} = \cos\frac{7\pi y}{2b}, \quad u'_y\Big|_{y=0} = \sin\frac{5\pi x}{a}, \quad u\Big|_{y=b} = \sin\frac{3\pi x}{a}.$$

5. Задачи на решение краевой задачи для уравнения Лапласа в кольце.

Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце:

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$
$$u\Big|_{r=1} = 1 + \sin^2 \varphi, \quad u'_r\Big|_{r=2} = \cos \varphi.$$