



**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
УПРАВЛЕНИЯ**
Е. С. Тверская

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва
E-mail: e_tverskaya@bmstu.ru

1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

К гиперболическим уравнениям приводят задачи колебания струны, распространение возмущений электромагнитных полей, движение сжимаемого газа и многие другие задачи.

Рассмотрим задачу малых колебаний однородной струны длины l , для которой заданы начальное положение и начальные скорости, а также законы движения концов струны. В рамках математической физики такая задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0; \\u|_{t=0} &= \varphi(x), & u_t|_{t=0} &= \psi(x), \\u|_{t=0} &= \mu(t), & u|_{x=l} &= \nu(t).\end{aligned}$$

Для решения этой задачи сеточным методом выберем равномерную прямоугольную сетку с узлами $(x_n; t_m)$, $n = \overline{0, N}$, $m = \overline{0, M}$, где $x_n = nh$, $t_m = m\tau$, $h = \frac{l}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$. Частные производные заменим соответствующими конечными разностями. В результате дифференциальное уравнение заменится разностным уравнением

$$\frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{h^2}, \quad n = \overline{1, N-1}, m = \overline{1, M-1},$$

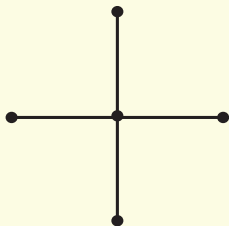
а начальное условие $u_t|_{t=0} = \psi(x)$ — разностным соотношением

$$\frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi_n, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

Другое начальное условие и граничные условия в разностной задаче реализуются точно:

$$u_n^0 = \varphi_n, \quad i = \overline{0, N}; \quad u_0^m = \mu^m, \quad m = \overline{0, M}.$$

Получена полная система уравнений, связывающая значения сеточной функции u_n^m в узлах выбранной сетки. Эта система, как и в случае уравнения теплопроводности может решаться послойно. По начальному положению струны определяются значения сеточной функции на нулевом слое, т.е. при $m = 0$. По начальным скоростям определяются значения сеточной функции на первом слое. Наконец, по разностному уравнению можно вычислить значения сеточной функции во внутренних узлах $(m + 1)$ -го слоя по уже известным значениям двух предыдущих слоев. Значения в граничных узлах $(m + 1)$ -го слоя находятся из граничных условий.



Учитывая вид разностного уравнения, заключаем, что полученная разностная схема явная. Разностное уравнение связывает пять узлов сетки: узел (x_n, t_m) и четыре прилегающих узла. Соответствующий шаблон называется «крест». Как и в случае уравнения теплопроводности, явная разностная схема оказывается условно устойчивой, т.е. она устойчива только при определенных соотношениях шагов h и τ сетки.

1.1. Аппроксимация

Разложим точное решение по формуле Тейлора в точке $(x_n; t_m)$

$$u_{n\pm 1}^m = u \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} + o(h^4);$$
$$u_n^{m\pm 1} = u \pm \tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} \pm \frac{\tau^3}{6}u_{ttt} + \frac{\tau^4}{24}u_{tttt} + o(\tau^4).$$

Вычислим невязку системы (вычислить самостоятельно)

$$\psi = u_{tt} - a^2u_{xx} - \frac{1}{\tau^2}(u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}) + \frac{a^2}{h^2}(u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m) = O(\tau^2 + h^2).$$

Таким образом, аппроксимация производных конечными разностями дает порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ для дифференциального уравнения и $O(h^2 + \tau)$ для второго начального условия (начальных скоростей). Чтобы повысить порядок аппроксимации начального условия до такого же, как и порядок аппроксимации дифференциального уравнения, можно использовать два примыкающих узла сетки. В соответствии с формулой Тейлора

$$\frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi_n + \frac{\tau}{2}u_{tt}(x_n, t_m) + O(\tau^2).$$

Заменяя неизвестное значение u_{tt} с помощью дифференциального уравнения на a^2u_{xx} , а затем частную производную по x — второй конечной разностью, получим следующий вариант аппроксимации второго начального условия с порядком $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi_n + \frac{\tau}{2} \frac{u_{n-1}^0 - 2u_n^0 + u_{n+1}^0}{h^2}.$$

1.2. Устойчивость разностной схемы «крест»

Для исследования полученной разностной схемы модифицируем ее так, чтобы граничные условия были однородными. Это равносильно замене в разностном уравнении граничных узлов известными значениями. После этого в разностном уравнении граничные узлы будут отсутствовать, что равносильно нулевым значениям сеточной функции в них. Но при этом разностное уравнение станет неоднородным:

$$\frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{h^2} + f_n^m, \quad i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M-1},$$

где

$$f_n^m = \begin{cases} \frac{a^2 \mu^m}{h^2}, & n = 1; \\ 0, & 1 < n < N - 1; \\ \frac{a^2 \nu^m}{h^2}, & n = N - 1. \end{cases}$$

Далее, введем обозначение u^m для m -го временного слоя. Тогда разностное уравнение примет вид

$$\frac{u^{m+1} - 2u^m + u^{m-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{h^2} \Lambda u^m + f^m,$$

где $(\Lambda u)_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}$, а f^m — временной слой сеточной функции f_n^m .

Поскольку разностное уравнение линейное, задача оценки погрешности решения разностной задачи распадается на две: задачу учета погрешности начальных условий, которые можно представить как ошибки δu^0 и δu^1 на первых двух слоях, вычисляемых с помощью начальных условий, и задачу учета ошибок δf^m сеточной функции f^m , вытекающих из ошибок граничных условий. Рассмотрим первую из этих задач. Считаем, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ФН12, весна 2020.

что сеточная функция задана точно, а начальные условия имеют ошибки δu^0 и δu^1 . Тогда ошибки δu^m связаны однородным разностным уравнением

$$\frac{\delta u^{m+1} - 2\delta u^m + \delta u^{m-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{h^2} \Lambda \delta u^m, \quad j = \overline{1, M-1}. \quad (1.1)$$

Для решения поставленной задачи выберем такой базис e^i в линейном пространстве сеточных функций u^m с нулевыми значениями в граничных узлах, в котором оператор Λ имеет диагональную матрицу. Если ввести скалярное произведение

$$(u, v)_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h,$$

то оператор Λ будет самосопряженным, а выбранный базис e^i — ортогональным. При обсуждении уравнения теплопроводности было показано, как найти собственные векторы e^k . В данном случае мы можем считать, что

$$(e^k)_j = \sin \frac{k\pi j}{N}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$|e^k|^2 = h \sum_{j=1}^{N-1} \sin^2 \frac{k\pi j}{N} = \frac{Nh}{2} = \frac{l}{2},$$

где l — длина струны. При этом векторам e^k , $k = \overline{1, N-1}$, соответствуют собственные значения $\lambda_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}$.

Разностное уравнение в силу диагональности матрицы оператора Λ распадается на независимые одномерные уравнения

$$\frac{v_i^{(m+1)} - 2v_i^{(m)} + v_i^{(m-1)}}{\tau^2} = \frac{a^2}{h^2} \lambda_n v_n^{(m)}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (1.2)$$

в которых $v_n^{(m)}$, $n = \overline{1, N-1}$, — координаты сеточной функции δu^m в базисе e^i . Решение одномерного разностного уравнения (1.2) ищем в виде сеточной функции q^m (степенная функция — по аналогии с линейным дифференциальным уравнением второго порядка). Подставив q^m вместо $v_n^{(m)}$, получим

$$\frac{q^{m+1} - 2q^m + q^{m-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{h^2} \lambda_n q^m,$$

или после сокращения на q^{m-1}

$$q^2 - \left(2 + \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \lambda_n\right) q + 1 = 0. \quad (1.3)$$

Полученное уравнение имеет два корня, дающее два независимых решения разностного уравнения второго порядка. Общее решение разностного уравнения получается в виде линейной комбинации $C_1 q_1^m + C_2 q_2^m$, где q_1 , q_2 — корни квадратного уравнения (1.3).

Постоянные C_1 и C_2 определяются по первым двум известным значениям функции $v_n^{(m)}$

(т.е. при $m = 0$ и $m = 1$). Поскольку $v_n^{(m)}$ — координаты сеточной функции m -го слоя в ортогональном базисе, норма сеточной функции δu^m определяется по формуле

$$\|\delta u^m\|^2 = \sum_{n=1}^{N-1} |v_n^m|^2 |e^n|^2 = \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{N-1} |v_n^m|^2.$$

Нетрудно заметить, что последовательность $\|\delta u^m\|$ остается ограниченной при возрастании m в том и лишь в том случае, когда q_{n1} и q_{n2} для любого n по модулю не превышают единицы. Однако из квадратного уравнения (1.3) вытекает, что $q_1 q_2 = 1$. Оба условия будут выполняться тогда, когда корни q_{n1} и q_{n2} являются комплексными, т.е. при

$$-2 \leq 2 + a^2 \frac{\tau^2}{h^2} \lambda_n \leq 2.$$

Правое неравенство выполняется, поскольку линейный оператор Λ имеет только отрицательные собственные значения. А левое неравенство означает, что

$$\frac{a^2 \tau^2}{h^2} \leq \frac{4}{|\lambda_n|}$$

для каждого собственного значения λ_n оператора Λ . Чтобы это имело место, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\frac{a^2 \tau^2}{h^2} \leq \frac{4}{|\lambda_{\max}|},$$

где λ_{\max} — максимальное по модулю собственное значение оператора Λ . Из анализа этого оператора, следует, что $|\lambda_{\max}| = 4 \cos^2 \frac{\pi}{2N}$ близко к 4 и при росте N стремится к 4. Поэтому рассматриваемая разностная схема устойчива, если

$$\frac{a^2 \tau^2}{h^2} \leq 1.$$

Найденное условие означает, что для любого собственного значения λ_n оба корня q_{n1} q_{n2} по модулю не превышают единицы. Это необходимое условие устойчивости: если оно не выполняется, то некоторые координаты, а следовательно, и норма, неограниченно возрастают от слоя к слою. Убедимся в том, что это условие является и достаточным.

Используя решения q_{n1} и q_{n2} уравнения (1.3), заключаем, что

$$v_n^m = C_{n1} q_{n1}^m + C_{n2} q_{n2}^m,$$

где постоянные C_{n1} и C_{n2} определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_{n1} + C_{n2} = v_n^0, \\ C_{n1} q_{n1} + C_{n2} q_{n2} = v_n^1. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$C_{n1} = \frac{q_{n2} v_n^{(0)} - v_n^{(1)}}{q_{n2} - q_{n1}}, \quad C_{n2} = -\frac{q_{n1} v_n^{(0)} - v_n^{(1)}}{q_{n2} - q_{n1}}.$$

Следовательно,

$$v_n^{(m)} = v^{(1)} \frac{q_{n2}^m - q_{n1}^m}{q_{n2} - q_{n1}} - v^{(0)} \frac{q_{n2}^{m-1} - q_{n1}^{m-1}}{q_{n2} - q_{n1}}.$$

При большом количестве временных слоев величины $|q_{n2}^m - q_{n1}^m|$ и $|q_{n2}^{m-1} - q_{n1}^{m-1}|$ могут принимать практически любое значение от 0 до 2. Наилучшей оценкой в данном случае является

$$|v_n^{(m)}| \leq 2 \frac{|v_n^{(1)}| + |v_n^{(0)}|}{|q_{n2} - q_{n1}|} = \frac{|v_n^{(1)}| + |v_n^{(0)}|}{\frac{2a\tau}{h} \sin \frac{n\pi}{2N} \sqrt{1 - \frac{a^2\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2N}}} \leq \frac{|v_n^{(1)}| + |v_n^{(0)}|}{\frac{2a\tau}{h} \sin \frac{n\pi}{2N} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{n\pi}{2N}}} \leq \frac{|v_n^{(1)}| + |v_n^{(0)}|}{\frac{a\tau}{h} \sin \frac{\pi}{N}}.$$

Суммируя с учетом неравенства $(x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$, заключаем, что

$$\|\delta u^m\|^2 \leq \frac{2h^2 (\|\delta u^0\|^2 + \|\delta u^1\|^2)}{a^2\tau^2 \sin^2 \frac{\pi}{N}}.$$

Если $\|\delta u^0\| < \varepsilon$ и $\|\delta u^1\| < \varepsilon$, то

$$\|\delta u^m\| \leq \frac{2h\varepsilon}{a\tau \sin \frac{\pi}{N}}.$$

Мы видим, что с уменьшением шага сетки (увеличением N) погрешность, связанная с погрешностями начальных данных растет, хотя и не так быстро, как геометрическая прогрессия: рост составляет порядка N , или порядка $1/h$. С учетом порядка невязки $O(h^2 + \tau^2)$ приходим к выводу, что с измельчением сетки погрешность приближенного решения стремится к нулю. Отметим также, что занижение величины $\frac{a\tau}{h}$ приводит к увеличению погрешности. Оптимальный вариант — значение, равное единице или чуть меньше единицы. В этом случае можно пользоваться приближенной формулой

$$\|\delta u^m\| \approx \frac{2\varepsilon}{\sin \frac{\pi}{N}} \approx \frac{2l\varepsilon}{\pi h}.$$

Теперь помимо погрешностей начальных условий учтем погрешности в граничных условиях. Уравнение на погрешности будет иметь вид

$$\frac{\delta u^{m+1} - 2\delta u^m + \delta u^{m-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{h^2} \Lambda \delta u^m + \delta f^m.$$

Из этого уравнения находим

$$\delta u^{m+1} = \left(2E + \frac{\tau^2 a^2}{h^2} \Lambda \right) \delta u^m - \delta u^{m-1} + \tau^2 \delta f^m.$$

Это уравнение отличается от (1.1) лишь дополнительным слагаемым, которое можно рассматривать как часть ошибки, имеющейся в сеточной функции на $(m - 1)$ -м слое. Используя сеточные функции δu^m и $\delta u^{m-1} + \tau^2 \delta f^m$ как начальные условия для разностной задачи, заключаем, что на k -м слое погрешность $\tau^2 \delta f^m$ приведет к дополнительной погрешности порядка $\frac{h\tau \|\delta f^m\|}{a \sin(\pi/N)} \approx \frac{\tau}{\pi} \|\delta f^m\|$. На этом слое складываются погрешности, возникающие на всех предыдущих слоях, что (при условии $\|\delta f^m\| < \varepsilon$) приводит к дополнительной суммарной погрешности порядка $\frac{T}{\pi} \varepsilon$ (T — период времени, на котором рассматривается разностная аппроксимация).

Все проведенные подсчеты показывают, что, несмотря на фактическое отсутствие устойчивости разностной схемы, при $N \rightarrow \infty$ решение разностной задачи в узлах сетки стремится к решению краевой задачи, т.е. разностная схема обладает свойством сходимости.

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{y^2} + f(x, y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u|_{x=0} = \mu(y), \quad u|_{x=a} = \nu(y),$$

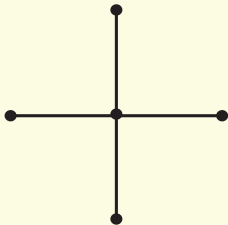
$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=b} = \psi(x).$$

Выберем сетку $(x_i; y_j)$, где $x_n = ih_x$, $i = \overline{0, N}$, $y_m = jh_y$, $j = \overline{0, N}$. Разностную схему построим, аппроксимируя частные производные 2-го порядка вторыми разностями. Пусть $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $f_{ij} = f(x_i, y_j)$. Тогда

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2} + f_{ij} = 0,$$

$$u_{0j} = \mu_j, \quad u_{Nj} = \nu_j, \quad u_{i0} = \varphi_i, \quad u_{iN} = \psi_i.$$

Здесь неизвестными являются значения сеточной функции во внутренних узлах, т.е. при $i, j = \overline{1, N-1}$, поскольку в граничных узлах значения сеточной функции даны. Порядок аппроксимации в данном случае равен $O(h_x^2 + h_y^2)$.



Каждое из уравнений разностной задачи связывает текущий узел (i, j) сетки с четырьмя ближайшими узлами. Шаблон разностной схемы, называемой **разностной схемой «крест»**, показан на рисунке.

Этот шаблон совпадает с шаблоном разностной схемы для волнового уравнения, но эти разностные схемы различаются принципиально: в случае волнового уравнения решение можно было проводить послойно, в то время как в случае уравнения Пуассона это невозможно.

2.1. Анализ разностной схемы

Как и в других случаях, проведем анализ разностной схемы на устойчивость. Заключение о сходимости разностной схемы можно будет сделать исходя из ее устойчивости и порядка аппроксимации.

Так как аппроксимация привела к системе линейных уравнений, то анализ на устойчивость сводится к анализу свойств линейного оператора $L = \Lambda_x + \Lambda_y$, где

$$(\Lambda_x u)_{ij} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2}, \quad (\Lambda_y u)_{ij} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2}.$$

Из системы линейных уравнений удалим граничные условия, подставив их непосредственно в уравнения для приграничных узлов (т.е. когда один из индексов 1 или $N - 1$). В результате получим систему уравнений, соответствующую однородной разностной задаче. В этом случае ищется сеточная функция, принимающая в граничных узлах нулевые

значения. Множество таких функций есть линейное пространство размерности $(N - 1)^2$. На этом линейном пространстве введем скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} u_{ij} v_{ij} h_x h_y.$$

В этом случае стандартный базис (т.е. система сеточных функций, которые в одном узле имеют значение 1, а в остальных 0). будет представлять собой ортогональный базис, причем квадрат нормы любой базисной функции будет равен $h_x h_y$.

Можно показать, что в рассматриваемом евклидовом пространстве линейный оператор L является самосопряженным, непосредственно используя определение самосопряженного оператора. Проще однако записать матрицу этого оператора в стандартном базисе, установив порядок среди векторов базиса. Обозначим через e^{ij} базисную функцию, принимающую значение 1 в узле (i, j) . Установим следующий порядок базисных функций:

$$e^{11}, e^{12}, \dots, e^{1,N-1}, e^{21}, \dots, e^{N-1,N-1}.$$

В матрице оператора в строке, соответствующей узлу (i, j) , т.е. в строке с номером $(i - 1)(N - 1) + j$ диагональным элементом будет коэффициент, который в уравнении (2) соответствует узловому значению u_{ij} , коэффициенты при $u_{i,j-1}$ и $u_{i,j+1}$ будут расположены рядом с диагональным левее и правее, а коэффициенты при $u_{i-1,j}$ и $u_{i+1,j}$ будут отстоять от диагонального влево и вправо на $N - 1$ мест. Такую матрицу удобно

записать как блочно-трехдиагональную, состоящую из квадратных блоков порядка $N - 1$:

$$[L] = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{h_x^2} E & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_x^2} E & A & \frac{1}{h_x^2} E & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_x^2} E & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} & \frac{1}{h_y^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_y^2} & -\frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} & \frac{1}{h_y^2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y^2} & -\frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} \end{pmatrix},$$

а E — единичная матрица порядка $N - 1$.

Поскольку полученная матрица линейного оператора в ортогональном базисе симметрична, этот оператор является самосопряженным

Собственные функции рассматриваемого линейного оператора можно найти, проведя аналогию с непрерывным случаем. В данном случае собственные функции можно искать

в виде $g_{ij} = \sin \omega_x i \sin \omega_y j$. Учет однородных граничных условий позволяет найти частоты ω_x и ω_y . В результате получаем систему функций g^{kl} , $k, l = \overline{1, N-1}$, со значениями

$$g_{ij}^{kl} = \sin \frac{k\pi i}{N} \sin \frac{l\pi j}{N}.$$

Все эти функции попарно ортогональны, как собственные функции, отвечающие различным собственным значениям. Они имеют одинаковые нормы:

$$\|g^{kl}\|^2 = h_x h_y \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sin^2 \frac{k\pi i}{N} \sin^2 \frac{l\pi j}{N} = h_x h_y \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sin^2 \frac{k\pi i}{N} \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \sin^2 \frac{l\pi j}{N} \right) = \frac{N^2}{4} h_x h_y = \frac{ab}{4}.$$

Собственной функции g^{kl} отвечает собственное значение

$$\lambda_{kl} = -\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2N} - \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{l\pi}{2N}.$$

Отметим минимальное λ_{\min} и максимальное λ_{\max} собственные значения:

$$\lambda_{\min} = -\left(\frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2} \right) \sin^2 \frac{\pi}{2N}, \quad \lambda_{\max} = -\left(\frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2} \right) \cos^2 \frac{\pi}{2N}.$$

Рассматриваемую разностную задачу можно интерпретировать как операторное уравнение $L\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0$. Для оценки устойчивости разностной схемы нужно оценить норму оператора L^{-1} , поскольку ошибка правой части $\delta\mathbf{f}$ и ошибка решения $\delta\mathbf{u}$ связаны соотношением $\delta\mathbf{u} = -L^{-1}\delta\mathbf{f}$, а их нормы — неравенством $\|\delta\mathbf{u}\| \leq \|L^{-1}\| \|\delta\mathbf{f}\|$.

Известно, что норма самосопряженного оператора L совпадает с максимумом модулей его собственных чисел, т.е. $\|L\| = \lambda_{\max}$. Линейный оператор L^{-1} также самосопряженный, а его максимальное по модулю собственное число есть $1/\lambda_{\min}$. Таким образом,

$$\|L^{-1}\| = 1/\lambda_{\min} = \frac{h_x^2 h_y^2}{4(h_x^2 + h_y^2) \sin^2 \frac{\pi}{2N}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{4N^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N}} \approx \frac{a^2 b^2}{\pi^2 (a^2 + b^2)}.$$

Видно, что с ростом N норма оператора L^{-1} остается ограниченной. Это и означает, что построенная разностная схема является устойчивой. Поскольку порядок аппроксимации равен $O(1/N^2)$, заключаем, что при $N \rightarrow \infty$ разностная схема сходится со вторым порядком.

Замечание 2.1. Однако не все так хорошо, как кажется с первого взгляда. Схема абсолютно устойчива. Но приходится решать систему линейных уравнений $L\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0$. Качество системы линейных уравнений (ее чувствительность к ошибкам правых частей) определяется **числом обусловленности** $\text{cond } L$, равным $\|L\| \|L^{-1}\|$. Увеличение числа обусловленности ведет к усилению влияния на результат ошибок округления, а в итерационном процессе — к увеличению числа итераций. В данном случае

$$\text{cond } L = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} = \text{ctg}^2 \frac{\pi}{2N} \approx \frac{4N^2}{\pi^2}.$$