ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Е. С. Тверская

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва
E-mail: e_tverskaya@bmstu.ru

1. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.

1.1. Напоминание пройденного материала

Теорема 1 *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяют следующим 3-м условиям:*

1. *функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$;*

2. *удовлетворяет условию $f(\pi) = f(-\pi)$;*

2. *$f(x)$ имеет на $f(\pi) = f(-\pi)$ кусочно непрерывную производную.*

Тогда тригонометрический ряд Фурье и ряд составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ к самой функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и ее рядом Фурье является ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Перейдем к комплексной форме записи ряда Фурье.

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = a_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right) + b_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}.$$

Тогда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\,e^{ikx}+c_{-k}\,e^{-ikx}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[c_0+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\,e^{ikx}+c_{-k}\,e^{-ikx}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}c_k\,e^{ikx}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,e^{ikx}$$

Пусть функция $f(x)$

1. периодическая с периодом $2l=T$;

2. непрерывная на $\mathbb{R}$;

3. имеет кусочно непрерывную на $\mathbb{R}$ производную,

тогда ее можно разложить в тригонометрический ряд Фурье на всей числовой прямой

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,e^{2\pi\frac{ikx}{T}},$$

где

$$c_k=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-2\pi\frac{ikx}{T}}\,dx=\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}f(x)e^{-2\pi\frac{ikx}{T}}\,dx,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Также, из сделанных предположений (1)-(3) можно сделать вывод, что ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$, причем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| = |c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |c_{-k}|) < \infty.$$

1.2. Вывод формул дискретного преобразования Фурье

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим $f(x)$ на дискретном множестве точек: $x_j = \dfrac{jT}{N}$, $j = \overline{0, (N-1)}$. Тогда

$$f(x_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi \frac{ik}{T} \frac{jT}{N}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi ikj}{N}}, \quad j = \overline{0, (N-1)}.$$

Так как Фурье сходится абсолютно, то его члены можно переставлять любым способом, сохраняя сумму ряда.

Можно привести подобные члены, то есть с одинаковым значением $e^{\frac{2\pi ikj}{N}}$.

Если $k_1 - k_2 = mN$, $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\frac{k_1 x_j}{T} - \frac{k_2 x_j}{T} = \frac{mNjT}{NT} = mj \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно $e^{2\pi i \frac{k_1 x_j}{N}} = e^{2\pi i \frac{k_2 x_j}{N}}$ при $k_1 - k_2 = mN$.

Так как $\forall k \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде $k = l + mN$, $l = \overline{0,(N-1)}$ то

$$e^{2\pi i \frac{(l+mN)x_j}{N}} = e^{2\pi i \frac{lx_j}{N}}, \quad l = \overline{0,(N-1)}.$$

Получаем

$$f(x_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \frac{k}{T} x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{l+mN} e^{2\pi i \frac{(l+mN)x_j}{T}} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{l+mN} e^{2\pi i \frac{lx_j}{T}} =$$
$$= \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{lx_j}{T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{l+mN} = \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{c}_l e^{2\pi i \frac{lx_j}{T}},$$

где $\widetilde{c}_l = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} c_{l+mN}$. Окончательно

$$f(x_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{c}_l e^{2\pi i \frac{lx_j}{T}}, \quad j = \overline{0,(N-1)}. \tag{1.1}$$

Представление (1.1) задает $f(x)$ только на дискретном множестве точек: $\left\{0; \dfrac{T}{N}; \dfrac{2T}{N}; \ldots; \dfrac{(N-1)T}{N}\right\}$. Но коэффициенты $\widetilde{c}_l$ определяются значениями $f(x)$ на всем отрезке $[0, T]$, а в итоге на всей числовой прямой.

Замечание 1.1. Для представления функции $f(x)$ в виде (1.1) на конечной сетке вовсе не обязательно знать значения функции $f(x)$ на всей числовой прямой. Достаточно знать ее значения в точках самой сетки.

Итак, пусть $f(x)$ определена не на всей числовой прямой, а лишь в узлах сетки $\left\{0; \dfrac{T}{N}; \dfrac{2T}{N}; \ldots; \dfrac{(N-1)T}{N}\right\}$. Тогда представление для нее ввиде суммы (1.1) можно получить следующим образом:

1. Доопределим сеточнную функцию $f(x)$ на отрезке $[0, T]$ до непрерывной кусочно линейной функции, удовлетворяющей условию $f(0) = f(T)$. Графиком этой функции является ломаная с вершинами в точках $(x_j, f(x_j))$, $j = \overline{0, (N-1)}$ и в точке $(T, f(0))$.

2. Продолжим полученную функцию периодически на всю числовую приямую с периодом $2l = T$. Следовательно, получаем непрерывную периодическую функцию с периодом $2l$, имеющую кусочно непрерывные производные.

Для построенной функции имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi \frac{ikx}{T}}.$$

Замечание 1.2. Тригонометрический полином $S_N(x) = \sum\limits_{l=0}^{N-1} \widetilde{c}_l e^{2\pi i \frac{lx}{T}}$ является интерполяционным для $f(x)$, так как $f(x_j) = S_N(x_j)$, $j = \overline{0, (N-1)}$

Замечание 1.3. Представление (1.1) имеет существенный недостаток: для вычисления $\widetilde{c}_l, l = \overline{0,(N-1)}$ необходимо вычислить бесконечное число коэффициентов $c_{l+mN}, m \in \mathbb{Z}$.

Решение этой проблемы. Построим алгоритм расчета коэффициентов $\widetilde{c}_l$ без предварительного вычисления c_{l+mN}

Рассмотрим пространство D_N – линейное пространство комплексных сеточных функций, определенных в узлах $x_j = jT/N$, $j = \overline{0,(N-1)}$. Данное пространство является N-мерным.

Рассмотрим отображение, которое $\forall f \in D_N$ ставит в соответствие вектор ее значений

$$\mathbf{f} = \left(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{N-1})\right)^T \in \mathbb{C}^N.$$

Данное отображение устанавливает изоморфизм между D_N (пространством сеточных функций) и $\mathbb{C}^N$ (линейное арифметическое пространство).

Введем с рассматриваемом пространстве скалярное произведение

$$(f, g) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\overline{g(x_j)}, \quad f, g \in D_N.$$

В этом случае (так как рассматриваются комплексные линейные пространства) аксиома коммутативности выглядит следующим образом: $(f, g) = \overline{(g, f)}$.

Определение 1 *Комплексные линейные пространства со скалярным произведением называются* **унитарными пространствами**.

Введя скалярное произведение указанным способом получаем, что D_N – унитарное пространство. Система сеточных функций

$$\varphi_l(x) = e^{2\pi i \frac{lx}{T}}, \quad l = \overline{0,(N-1)}$$

является ортонормированным базисом в унитарном пространстве D_N, где $x_j = \frac{iT}{N}$, $j = \overline{0,(N-1)}$. Это можно показать следующим образом:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{kx_j}{T}} \overline{e^{2\pi i \frac{mx_j}{T}}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{(k-m)x_j}{T}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{(k-m)j}{N}}.$$

При $k = m$ скалярное произведение

$$(\varphi_k, \varphi_m) = (\varphi_m, \varphi_m) = 1$$

. При $k \neq m$

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{(k-m)}{N}}\right)^j = \frac{1}{N}\frac{1 - e^{2\pi i (k-m)}}{1 - e^{2\pi i \frac{(k-m)}{N}}}.$$

А так как $e^{2\pi i(k-m)} = 1$ при $\forall k, m \in \mathbb{Z}$, то $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$.

Для $\forall f \in D_N$ имеет место представление (1.1), которое можно переписать в виде

$$f(x_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{c}_l \varphi_l(x_j), \quad j = \overline{0,(N-1)}.$$

То есть для $\forall f \in D_N$ имеет место разложение сеточной функции f по ортонормированному базису $\{\varphi_l\}_{l=0}^{N-1}$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{c}_l \varphi_l(x), \quad x = \frac{jT}{N}, \quad j = \overline{0,(N-1)}. \tag{1.2}$$

Следовательно, $\widetilde{c}_l$ – координаты f в этом ортонормированном базисе и

$$\widetilde{c}_l = (f, \varphi_l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{jT}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{lj}{N}}. \tag{1.3}$$

Определение 2 *Выражение (1.2) называется* **дискретным (конечным) рядом Фурье** *сеточной функции $f \in D_N$, а коэффициенты $\widetilde{c}_l$ из (1.3) ее* **дискретными коэффициентами Фурье**.

Рассматриваемое разложение сеточной Функции $f \in D_N$ в ряд Фурье определяет линейное отображение

$$\mathcal{F} : D_n \longrightarrow \mathbb{C}^N,$$

которое каждой сеточной функции f ставит в соответствие комплексный вектор

$$\mathbf{c} = \mathcal{F}(f) = (\widetilde{c}_0, \widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_{N-1}) \in \mathbb{C}^N.$$

Определение 3 *Линейный оператор $\mathcal{F}$ называют* **прямым дискретным преобразованием Фурье**.

Пусть в D_N выбран базис из сеточных функций $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{N}$, где для $\forall k = \overline{1, N}$ выполняются условия

$$\mathbf{e}_k(x_j) = 0, \quad j = \overline{0,(N-1)} \wedge j \neq k-1 \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_k(x_{k-1}) = 1.$$

Тогда, для $\forall f \in D_N$ имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\mathbf{e}_k(x), \quad x = \frac{jT}{N}, \quad j = \overline{0,(N-1)}.$$

В этом случае столбец координат f в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{N}$ имеет вид

$$\mathbf{f} = \left(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{N-1})\right).$$

Согласно (1.3) столбец **c** можно представить следующим образом

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_0 \\ \widetilde{c}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-2\pi i\cdot 0\cdot x_j/T} \\ \sum\limits_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-2\pi i\cdot 1\cdot x_j/T} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-2\pi i\cdot (N-1)\cdot x_j/T} \end{pmatrix} =$$

$$
= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot x_0}{T}} & e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot x_1}{T}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot x_{N-1}}{T}} \\ e^{-\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot x_0}{T}} & e^{-\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot x_1}{T}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot x_{N-1}}{T}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-\frac{2\pi i \cdot (N-1) \cdot x_0}{T}} & e^{-\frac{2\pi i \cdot (N-1) \cdot x_1}{T}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i \cdot (N-1) \cdot x_{N-1}}{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}.
$$

Или $\mathbf{c} = F\mathbf{f}$, где

$$
F = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot x_0}{T}} & e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot x_1}{T}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot x_{N-1}}{T}} \\ e^{-\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot x_0}{T}} & e^{-\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot x_1}{T}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot x_{N-1}}{T}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-\frac{2\pi i \cdot (N-1) \cdot x_0}{T}} & e^{-\frac{2\pi i \cdot (N-1) \cdot x_1}{T}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i \cdot (N-1) \cdot x_{N-1}}{T}} \end{pmatrix}
$$

Определение 4 *Матрица F называется* **матрицей прямого дискретного преобразования Фурье**.

Введя обозначения $q = e^{-2\pi i/N}$ и учитывая $x_j = jT/N$ можно записать

$$
F = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & q^{N-1} & q^{2(N-1)} & \dots & q^{(N-1)^2} \end{pmatrix}
$$

Так как оператор $\mathcal{F}$ взаимно обнозначно отображает пространство D_N в $\mathbb{C}_N$, то существует обратный к нему оператор

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{C}^N \longrightarrow D_N.$$

Определение 5 *Отображение $\mathcal{F}^{-1}$ называют* **обратным дискретным преобразование Фурье**. *Данное отображение определяется формулой (1.1).*

В матричном виде данное отображение эквивалентно $\mathbf{f} = F^{-1}\mathbf{c}$, где

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q^{-1} & q^{-2} & \dots & q^{-(N-1)} \\ 1 & q^{-2} & q^{-4} & \dots & q^{-2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & q^{-(N-1)} & q^{-2(N-1)} & \dots & q^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Определение 6 *Матрицу F^{-1} называют матрицей* **обратного дискретного преобразования Фурье**.

1.3. Вычислительные нюансы

Для прямого и обратного дискретного преоборазования Фурье необходимо квадратные матрицы F и F^{-1} порядка N умножить на столбец из N чисел. Если считать матрицы F и F^{-1} вычисленными ранее, то для определения дискретных коэффицментов Фурье сеточной функции $f \in D_N$ требуется N^2 арифметических операций.

Колличество операций можно уменьшить, то есть получить алгоритм, которые называется **быстрым дискретным преобразованием Фурье**. Этот алгоритм позволяет уменьшить число производимых арифметических операций до порядка $N(N_1 + N_2 + \ldots + N_m)$, где $N = N_1 N_2 \ldots N_m$ – разложение числа N на простые сомножители.

1.3.1. Пример.

Рассмотрим данный алгоритм на примере $N = N_1 N_2$.

Тогда

$$\widetilde{c}_l = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) q^{lj}, \quad l = \overline{0, (N-1)},$$

где $q = e^{-2\pi i/N}$ и $q^{mN} = 1$ для $\forall z \in \mathbb{Z}$.

Любой номер $l = \overline{0, (N-1)}$ можно представить в виде $l = l_1 N_1 + l_0$, где $l_1 < N_2$ и $l_0 < N_1$ – неотрицательные целые числа. И $\forall j = \overline{0, (N-1)}$ можно представить в виде $j = j_1 N_2 + j_0$, где $j_1 < N_1$ и $j_0 < N_2$ – неотрицательные целые числа. С учетом полученных представлений для $\forall l, j = \overline{0, (N-1)}$, имеем

$$lj = l(j_1 N_2 + j_0) = l j_1 N_2 + l j_0 = (l_1 N_1 + l_0) j_1 N_2 + l j_0 = l_1 N_1 N_2 j_1 + l_0 N_2 j_1 + l j_0 = \\ l_1 N j_1 + l_0 N_2 j_1 + l j_0.$$

Тогда

$$q^{lj} = q^{l_1 N j_1 + l_0 N_2 j_1 + l j_0} = q^{l_1 N j_1} q^{l_0 N_2 j_1} q^{l j_0} = q^{l_0 N_2 j_1} q^{l j_0}.$$

Следовательно, для $\forall l = \overline{0,(N-1)}$ получаем

$$\widetilde{c}_l = \widetilde{c}_{l_1 N_1 + l_0} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{j_0=0}^{N_2-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f(x_{j_1 N_2 + j_0}) q^{l_0 N_2 j_1} q^{l j_0} =$$

$$= \frac{1}{N_2} \sum_{j_0=0}^{N_2-1} \left(\frac{1}{N_1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f(x_{j_1 N_2 + j_0}) q^{l_0 N_2 j_1} \right) q^{l j_0} = \frac{1}{N_2} \sum_{j_0=0}^{N_2-1} c(l_0, j_0) q^{l j_0},$$

где $c(l_0, j_0) = \frac{1}{N_1} \sum\limits_{j_1=0}^{N_1-1} f(x_{j_1 N_2 + j_0}) q^{l_0 N_2 j_1}$, $j_0 = \overline{0, N_2 - 1}$ и $l_0 = \overline{0, N_1 - 1}$.

При известной матрице F, то есть при известном $q^{l_0 j_1 N_2}/N_1$ для вычисления $c(l_0, j_0)$ требуется N_1 арифметических операций. Общее число таких коэффициентов $N_1 N_2 = N$. Следовательно, для вычисления всех коэффициентов $c(l_0, j_0)$ необходимо $N_1 N$ арифметических операций.

Далее, при известных $c(l_0, j_0)$, $j_0 = \overline{0, (N_2 - 1)}$ и $q^{l j_0}/N_2$ для вычисления каждого $\widetilde{c}_l$ требуется N_2 арифметических операций. Всего таких коэффициентов N, следовательно нужно $N_2 N$ арифметических операций.

Окончательно, для вычисления всех коэффициентов дискретного преобразования Фурье требуется арифметических операций

$$N(N_1 + N_2) < N^2, \quad N > 4.$$

В общем случае $N = N_1 N_2 \ldots N_m$ и аналогичным образом можно выполнить преобразования Фурье за $N(N_1 + N_2 + \ldots + N_m)$ арифметических операций.

Самостоятельно разобрать случай, когда $N = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.