Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

Е.С. Тверская

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Задание для Лабораторной работы №1

Для студентов специальности
«Прикладная математика»

Москва
2021

ВАРИАНТ №1

Система типа хищник-жертва. Модель Базыкина

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник- жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограни- ченные ресурсы и учете фактора нелинейности размножения жертв при малых плотностях популяции. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t. Уравнения имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{ax^2}{N+x}\frac{K-x}{K} - bxy,\\
y' &= -cy + dxy,
\end{aligned}
$$

где a, b, c, d, N, K неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Величина $\frac{ax^2}{N+x}\frac{K-x}{K}$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников.
- Слагаемое bxy описывает влияние хищников на популяцию жертв.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная определяется естественной нормой смертности хищников. Второе слагаемое характеризует прирост хищников в зависимости от плотности жертв.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$
X = \frac{x}{K}, \quad Y = \frac{b}{a}y, \quad \tau = at, \quad n = \frac{N}{K}, \quad m = \frac{c}{dK}, \quad \gamma = \frac{dK}{a},
$$

преобразуем уравнения к виду

$$
\begin{aligned}
X' &= \frac{(1-X)X^2}{n+X} - YX,\\
Y' &= \gamma(X-m)Y,
\end{aligned}
$$

и дополним их начальными условиями

$$
X(0) = X_0,\ Y(0) = Y_0.
$$

3. Задание.

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$
y' = f(t,y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n
$$
на произвольном отрезке $[a,b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Найти положения равновесия системы. Как они зависят от параметров задачи?
- Для ряда значений параметра m из интервала $[0.1,\ 0.35]$ решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать динамику популяции при следующих исходных данных $n = 0.1,\ \gamma = 1,\ X_0 = 0.3,\ Y_0 = 0.3$. Приведите графики наиболее характерных решений в координатах (X,Y), $(X(t),t)$, $(Y(t),t)$ и дайте их интерпретацию.

ВАРИАНТ №2

Задача Жуковского о полете планера.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полет планера в верти- кальной плоскости xOz (ось Oz направлена вверх) при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета;
- угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета.

Тогда, уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&mv' = -mg\sin(\vartheta) - \rho SCv^2/2,\\
&mv\vartheta' = -mg\cos(\vartheta) + \rho SPv^2/2,\\
&z' = v\sin(\vartheta),\\
&x' = v\cos(\vartheta).
\end{aligned}$$

Здесь m масса планера, v - скорость движения, ϑ - угол между касательной к траектории и осью Ox, g - ускорение свободного падения, S - площадь крыльев планера, ρ - плотность воздуха, P - подъемная сила крыльев планера.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$V = v\left(\frac{\rho SP}{2mg}\right)^{1/2},\ X = x\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ Z = z\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ \tau = t\left(\frac{\rho gSp}{2m}\right)^{1/2},\ \sigma = \frac{C}{P},$$

преобразуем уравнения к виду

$$\begin{aligned}
&V' = -\sin(\vartheta) - \sigma V^2,\\
&\vartheta' = \left(V^2 - \cos(\vartheta)\right)/V,\\
&Z' = V\sin(\vartheta),\\
&X' = V\cos(\vartheta),
\end{aligned}$$

и дополним их начальными условиями

$$Z(0) = Z_0,\ X(0) = 0,\ \vartheta(0) = \vartheta_0,\ V(0) = V_0.$$

3. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 2-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий и нескольких значений параметра σ показать, что если начальная скорость планера достаточно велика, то планер совершит сначала несколько мертвых петель, затем по волнообразно затухающей траектории будет при- ближаться к траектории прямолинейного полета. Привести графики наиболее характерных траекторий полета в координатах (X, Z) и графики функций $X(t)$, $Z(t)$, $\vartheta(t)$, $V(t)$ на отрезке интегрирования.

ВАРИАНТ №3

Ограниченная задача трех тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два тела с массами m и $M = 1-m$ (например, Луна и Земля), участвующие в совместном круговом движении в плоскости xOy и расположенные в точках с координатами $(1, 0)$ и $(0, 0)$ соответственно. Пусть далее вблизи этих тел в той же плоскости движется третье тело пренебрежимо малой массы и $(x(t), y(t))$ - его координаты в момент времени t. Траектория движения этого тела описывается уравнениями.

$$x'' = x + 2y' - M\frac{x+m}{R_1} - m\frac{x-M}{R_2},$$
$$y'' = y - 2x' - M\frac{y}{R_1} - m\frac{y}{R_2},$$
$$R_1 = \left((x+m)^2 + y^2\right)^{3/2}, \quad R_2 = \left((x-M)^2 + y^2\right)^{3/2}$$

Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0.994,\ y(0) = 0,\ x'(0) = 0, y'(0) = -2.031732629557337.$$

При заданных начальных условиях и $m = 0.012277471$ орбита будет периодической с периодом обращения равным $T = 11.124340337$ (такие орбиты называют орбитами Аренсторфа).

Введением дополнительных неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = y'$ система сводится к системе из 4-х уравнений первого порядка.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать орбиту Аренсторфа. Учесть, что решения задачи бесконечно дифференцируемы всюду за исключение двух точек $(-m, 0)$, $(M, 0)$. Поэтому в окрестности начала и конца отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h, чем в другие моменты времени. Построить график орбиты в координатах (x, y), а также график скорости движения в координатах (x', y').

ВАРИАНТ №4

Математическая модель роста опухоли.

1. Постановка задачи. Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают резкую иммунную реакцию у больного. Эта реакция состоит в том, что производятся клетки - лимфоциты, которые атакуют и уничтожают клетки опухоли. Модель оперирует следующими переменными (имеется в виду плотность названной популяции клеток):

- L - свободные лимфоциты на поверхности опухоли;
- C - опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности;
- C_S - опухолевые клетки на поверхности опухоли;
- C_N - опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;
- C_F - опухолевые клетки внутри и на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами.

Переменные L и C можно взять за основные переменные модели, которая имеет следующий вид

$$L' = \left(-\lambda_1 + \alpha_1 C_N(1 - L/L_M)\right),$$
$$C' = \lambda_2 C_F - \alpha_2 C_N L.$$

Здесь λ_1 характеризует уровень естественной смертности лимфоцитов, следующее слагаемое - их стимуляцию: когда L мало, стимуляция свободных лимфоцитов возрастает линейно с ростом C_N и что существует максимальный размер популяции L_M, при котором стимуляция обращается в нуль. Первое слагаемое во втором уравнении описывает рост опухоли, не подвергающейся атакам лимфоцитов, а второй член учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли. Подставляя в уравнения значения $C_N = K_1 C^{2/3}/(1 + K_2 L)$ и $C_F = C - K_1 K_2 L C^{2/3}/(1 + K_2 L)$, можно переписать их в виде

$$x' = \left(-\lambda_1 + \beta_1 y^{2/3}(1 - x/c)(1 + x)\right) x,$$
$$y' = \lambda_2 y - \beta_2 x y^{2/3}/(1 + x),$$

где $x = K_2 L$, $c = K_2 L M$, $y = K_1 C$, а λ_1, λ_2, β_1, β_2 положительные параметры. Так как x и y - размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а x не может превышать c, поскольку L ограничено сверху величиной L_M. Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 3-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Для значений параметра $\beta_2 = 3;\ 3.48;\ 5$ при помощи разработанной процедуры рассчитать динамику популяции при различных начальных значениях размера опухоли $y_0 \in [0.5, 9]$. Привести гра- фики наиболее характерных решений в координатах (x, y) и дать их интерпретацию. Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $c = 3$, $t \in [0, 20]$.

ВАРИАНТ №5

Динамика химического реактора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель химического реактора, которая представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания. В такой системе происходит непрерывный тепло - и массообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что рассматриваемый химический реактор - это емкость (цилиндрический сосуд с кожухом), в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией c_0 и температурой T_B. Пусть в результате химической реакции $A \to B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q, а смесь продукта и реагента выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной λ. Тепло, образующееся во время реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Последнее характеризуется температурой стенки T_st и коэффициентом теплобмена ω. Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы, а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора). В результате получим уравнения

$$
\begin{aligned}
c' &= -c\exp(-1/T) + \lambda(c_0 - c),\\
T' &= c\exp(-1/T) + \beta(T_0 - T).
\end{aligned}
$$

где c - концентрация, T - температура реагента, а параметры T_0, β связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$
T_0 = \frac{\lambda T_B + \omega T_{st}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.
$$

Уравнения дополняются начальными условиями $c(0) = c_0, T(0) = T_0$. Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра: c_0, T_0,λ, β, которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом неизвестные $c(t)$, $T(t)$ также положительны. Время окончания химической реакции полагается равным $T = 15$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при помощи разработанной процедуры для следующих данных $c_0 = 120,\ T_0 = 0.23,\ \lambda = 0.45,\ \beta = 45$. Приведите график решения в фазовом пространстве (c, T). Вы должны обнаружить устойчивый предельный цикл в решении.

- Изменяя c_0 на интервале $(100, 135)$ определить те значения начальной концентрации c_0, при которых в системе происходит бифуркация: устойчивый фокус $\to$ предельный цикл $\to$ устойчивый фокус.

Результаты расчетов представить в виде графиков в фазовой плоскости (T, c), а также характерные расчеты в виде графиков за- висимости T и c от t.

ВАРИАНТ №6

Динамика химического реактора.

1. Постановка задачи. Рассматривается химическая реакция, протекающая в смеси трех веществ и описываемая системой уравнений:

$$y_1' = -(k_1(T) + k_2(T) + k_3(T))y_1,$$
$$y_2' = k_1(T)y_1 - k_4(T)y_2,$$
$$y_3' = k_4(T)y_2 - k_5(T)y_3,$$

где y_1 - концентрация исходного вещества (сырья), y_2 - концентрация промежуточного вещества, y_3 - концентрация окончательного продукта, $T = T(t)$ - температура, $k_i = k_i(T)$, $i = 1, 2...5$, - функции, определяемые кинетикой данной реакции, имеют следующий вид (согласно закону Аррениуса):

$$k_i(T) = C_i \exp\left(\frac{E_i}{R}\left(\frac{1}{658} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

Параметры, определяющие функции k_i заданы:

$$C_1 = 1.02,\ C_2 = 0.93,\ C_3 = 0.386,\ C_4 = 3.28,\ C_5 = 0.084,$$

$$E_1 = 16000,\ E_2 = 14000,\ E_3 = 15000,\ E_4 = 10000,\ E_5 = 15000,\ R = 1.9865.$$

Заданы начальные условия

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_2(0) = 0.$$

Время окончания химической реакции полагается равным $t = 1$. Температура меняется во времени по закону

$$T(t) = \begin{cases} 823 & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 673 & t_0 \leqslant t \leqslant t1, \\ 580 & t_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при $t_0 = 0.14$, $t_1 = 0.5$ при помощи разработанной процедуры. Результаты расчетов представить в виде графиков $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ на отрезке $[0, t]$.

- Полагая $t_1 = 0.5$ и изменяя t_0 на интервале $(0.05, 0.5)$ максимизиовать выход продукта при $t = 1$.

ВАРИАНТ №7

Система Лоренца.

1. Постановка задачи. Рассматривается система Лоренца:

$$\dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma x_2$$
$$\dot{x}_2 = r x_1 - x_2 - x_1 x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3$$

со значениями параметров $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0, 100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $x_1(0) = 3.051522$, $x_2(0) = 1.582542$, $x_3(0) = 15.62388$. Приведите график решения в пространстве (x_1, x_2, x_3).

- Определить положения равновесия системы и условия на параметры системы при которых эти положения существуют.

ВАРИАНТ №8

Система Ланфорда.

1. Постановка задачи. Рассматривается система Ланфорда:

$$\dot{x}_1 = (v-1)x_1 - x_2 + x_1x_3,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + (v-1)x_2 + x_2x_3$$
$$\dot{x}_3 = vx_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$x' = f(t,x),\ x(0) = x_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a,b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0,100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $x_1(0) = 0.1,\ x_2(0) = 0.1,\ x_3(0) = 0.07$. Приведите график решения в пространстве (x_1, x_2, x_3).

- Определить положения равновесия системы. Показать, что при значениях параметра $1/2 < v < 1$ система имеет периодическую траекторию.

ВАРИАНТ №9

Ограниченная задача трех тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два тела с массами m и $M = 1-m$ (например, Луна и Земля), участвующие в совместном круговом движении в плоскости xOz и расположенные в точках с координатами $(1, 0)$ и $(0, 0)$ соответственно. Пусть далее вблизи этих тел в той же плоскости движется третье тело пренебрежимо малой массы и $(x(t), z(t))$ - его координаты в момент времени t. Траектория движения этого тела описывается уравнениями.

$$
\begin{aligned}
&x'' = x + 2z' - M\frac{x+m}{R_1} - m\frac{x-M}{R_2},\\
&z'' = z - 2x' - M\frac{z}{R_1} - m\frac{z}{R_2},\\
&R_1 = \big((x+m)^2 + z^2\big)^{3/2}, \quad R_2 = \big((x-M)^2 + z^2\big)^{3/2}
\end{aligned}
$$

Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0.994,\ z(0) = 0,\ x'(0) = 0, z'(0) = -2.031732629557337.$$

При заданных начальных условиях и $m = 0.012277471$ орбита будет периодической с периодом обращения равным $T = 11.124340337$ (такие орбиты называют орбитами Аренсторфа).

Введением дополнительных неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = z'$ система сводится к системе из 4-х уравнений первого порядка.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$z' = f(t, z),\ z(0) = z_0,\ z(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать орбиту Аренсторфа. Учесть, что решения задачи бесконечно дифференцируемы всюду за исключение двух точек $(-m, 0)$, $(M, 0)$. Поэтому в окрестности начала и конца отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h, чем в другие моменты времени. Построить график орбиты в координатах (x, z), а также график скорости движения в координатах (x', z').

ВАРИАНТ №10

1. Постановка задачи. Рассмотрим полет планера в верти- кальной плоскости yOz (ось Oz направлена вверх) при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета;
- угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета.

Тогда, уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&mv' = -mg\sin(\varphi) - \rho SCv^2/2,\\
&mv\varphi' = -mg\cos(\varphi) + \rho SPv^2/2,\\
&z' = v\sin(\varphi),\\
&y' = v\cos(\varphi).
\end{aligned}
$$

Здесь m масса планера, v - скорость движения, φ - угол между касательной к траектории и осью Oy, g - ускорение свободного падения, S - площадь крыльев планера, ρ - плотность воздуха, P - подъемная сила крыльев планера.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$V = v\left(\frac{\rho SP}{2mg}\right)^{1/2},\ Y = y\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ Z = z\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ \tau = t\left(\frac{\rho gSp}{2m}\right)^{1/2},\ \sigma = \frac{C}{P},$$

преобразуем уравнения к виду

$$
\begin{aligned}
&V' = -\sin(\varphi) - \sigma V^2,\\
&\varphi' = \left(V^2 - \cos(\varphi)\right)/V,\\
&Z' = V\sin(\varphi),\\
&Y' = V\cos(\varphi),
\end{aligned}
$$

и дополним их начальными условиями

$$Z(0) = Z_0,\ Y(0) = 0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ V(0) = V_0.$$

3. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 2-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий и нескольких значений параметра σ показать, что если начальная скорость планера достаточно велика, то планер совершит сначала несколько мертвых петель, затем по волнообразно затухающей траектории будет при- ближаться к траектории прямолинейного полета. Привести графики наиболее характерных траекторий полета в координатах (Y, Z) и графики функций $Y(t)$, $Z(t)$, $\varphi(t)$, $V(t)$ на отрезке интегрирования.

ВАРИАНТ №11

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник- жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограни- ченные ресурсы и учете фактора нелинейности размножения жертв при малых плотностях популяции. Обозначим через $z = z(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t. Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{az^2}{N+z}\frac{M-z}{M} - bzy, \\ y' &= -cy + dzy, \end{aligned}$$

где a, b, c, d, N, M неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Величина $\frac{az^2}{N+z}\frac{M-z}{M}$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников.
- Слагаемое bzy описывает влияние хищников на популяцию жертв.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная определяется естественной нормой смертности хищников. Второе слагаемое характеризует прирост хищников в зависимости от плотности жертв.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$Z = \frac{z}{M}, \quad Y = \frac{b}{a}y, \quad \tau = at, \quad n = \frac{N}{M}, \quad m = \frac{c}{dM}, \quad \gamma = \frac{dM}{a},$$

преобразуем уравнения к виду

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{(1-Z)Z^2}{n+Z} - YZ, \\ Y' &= \gamma(Z-m)Y, \end{aligned}$$

и дополним их начальными условиями

$$Z(0) = Z_0, \; Y(0) = Y_0.$$

3. Задание.

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y), \; y(0) = y_0, \; y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Найти положения равновесия системы. Как они зависят от параметров задачи?
- Для ряда значений параметра m из интервала $[0.1, 0.35]$ решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать динамику популяции при следующих исходных данных $n = 0.1, \; \gamma = 1, \; Z_0 = 0.3, \; Y_0 = 0.3$. Приведите графики наиболее характерных решений в координатах $(Z, Y), \; (Z(t), t), \; (Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

ВАРИАНТ №12

1. Постановка задачи. Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают резкую иммунную реакцию у больного. Эта реакция состоит в том, что производятся клетки - лимфоциты, которые атакуют и уничтожают клетки опухоли. Модель оперирует следующими переменными (имеется в виду плотность названной популяции клеток):

- B - свободные лимфоциты на поверхности опухоли;
- C - опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности;
- C_S - опухолевые клетки на поверхности опухоли;
- C_N - опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;
- C_F - опухолевые клетки внутри и на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами.

Переменные B и C можно взять за основные переменные модели, которая имеет следующий вид

$$B' = (-\lambda_1 + \alpha_1 C_N(1 - B/B_M)),$$
$$C' = \lambda_2 C_F - \alpha_2 C_N B.$$

Здесь λ_1 характеризует уровень естественной смертности лимфоцитов, следующее слагаемое - их стимуляцию: когда B мало, стимуляция свободных лимфоцитов возрастает линейно с ростом C_N и что существует максимальный размер популяции B_M, при котором стимуляция обращается в нуль. Первое слагаемое во втором уравнении описывает рост опухоли, не подвергающейся атакам лимфоцитов, а второй член учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли. Подставляя в уравнения значения $C_N = K_1 C^{2/3}/(1 + K_2 B)$ и $C_F = C - K_1 K_2 B C^{2/3}/(1 + K_2 B)$, можно переписать их в виде

$$x' = \left(-\lambda_1 + \beta_1 y^{2/3}(1 - x/c)(1 + x)\right) x,$$
$$y' = \lambda_2 y - \beta_2 x y^{2/3}/(1 + x),$$

где $x = K_2 B$, $c = K_2 BM$, $y = K_1 C$, а λ_1, λ_2, β_1, β_2 положительные параметры. Так как x и y - размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а x не может превышать c, поскольку B ограничено сверху величиной B_M. Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 3-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Для значений параметра $\beta_2 = 3;\ 3.48;\ 5$ при помощи разработанной процедуры рассчитать динамику популяции при различных начальных значениях размера опухоли $y_0 \in [0.5, 9]$. Привести гра- фики наиболее характерных решений в координатах (x, y) и дать их интерпретацию. Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $c = 3$, $t \in [0, 20]$.

ВАРИАНТ №13

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель химического реактора, которая представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания. В такой системе происходит непрерывный тепло - и массообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что рассматриваемый химический реактор - это емкость (цилиндрический сосуд с кожухом), в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией c_0 и температурой T_B. Пусть в результате химической реакции $A \to B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q, а смесь продукта и реагента выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной λ. Тепло, образующееся во время реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Последнее характеризуется температурой стенки T_st и коэффициентом теплобмена ω. Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы, а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора). В результате получим уравнения

$$c' = -c\exp(-1/T) + \lambda(c_0 - c),$$
$$T' = c\exp(-1/T) + \beta(T_0 - T).$$

где c - концентрация, T - температура реагента, а параметры T_0, β связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$T_0 = \frac{\lambda T_B + \omega T_{st}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.$$

Уравнения дополняются начальными условиями $c(0) = c_0, T(0) = T_0$. Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра: c_0, T_0,λ, β, которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом неизвестные $c(t)$, $T(t)$ также положительны. Время окончания химической реакции полагается равным $T = 15$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при помощи разработанной процедуры для следующих данных $c_0 = 120,\ T_0 = 0.23,\ \lambda = 0.45,\ \beta = 45$. Приведите график решения в фазовом пространстве (c, T). Вы должны обнаружить устойчивый предельный цикл в решении.

- Изменяя c_0 на интервале $(100, 135)$ определить те значения начальной концентрации c_0, при которых в системе происходит бифуркация: устойчивый фокус $\to$ предельный цикл $\to$ устойчивый фокус.

Результаты расчетов представить в виде графиков в фазовой плоскости (T, c), а также характерные расчеты в виде графиков за- висимости T и c от t.

ВАРИАНТ №14

Динамика химического реактора.

1. Постановка задачи. Рассматривается химическая реакция, протекающая в смеси трех веществ и описываемая системой уравнений:

$$
\begin{aligned}
z_1' &= -(k_1(T) + k_2(T) + k_3(T))z_1, \\
z_2' &= k_1(T)z_1 - k_4(T)z_2, \\
z_3' &= k_4(T)z_2 - k_5(T)z_3,
\end{aligned}
$$

где z_1 - концентрация исходного вещества (сырья), z_2 - концентрация промежуточного вещества, z_3 - концентрация окончательного продукта, $T = T(t)$ - температура, $k_i = k_i(T)$, $i = 1, 2...5$, - функции, определяемые кинетикой данной реакции, имеют следующий вид (согласно закону Аррениуса):

$$k_i(T) = C_i \exp\left(\frac{E_i}{R}\left(\frac{1}{658} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

Параметры, определяющие функции k_i заданы:

$$C_1 = 1.02,\ C_2 = 0.93,\ C_3 = 0.386,\ C_4 = 3.28,\ C_5 = 0.084,$$

$$E_1 = 16000,\ E_2 = 14000,\ E_3 = 15000,\ E_4 = 10000,\ E_5 = 15000,\ R = 1.9865.$$

Заданы начальные условия

$$z_1(0) = 1,\ z_2(0) = 0,\ z_2(0) = 0.$$

Время окончания химической реакции полагается равным $t = 1$. Температура меняется во времени по закону

$$T(t) = \begin{cases} 823 & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 673 & t_0 \leqslant t \leqslant t1, \\ 580 & t_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
  $$z' = f(t, z),\ z(0) = z_0,\ z(t) \in \mathbb{R}^n$$
  на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при $t_0 = 0.14$, $t_1 = 0.5$ при помощи разработанной процедуры. Результаты расчетов представить в виде графиков $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ на отрезке $[0, t]$.

- Полагая $t_1 = 0.5$ и изменяя t_0 на интервале $(0.05, 0.5)$ максимизиовать выход продукта при $t = 1$.

ВАРИАНТ №15

Система Лоренца.

1. **Постановка задачи.** Рассматривается система Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\sigma y_1 + \sigma y_2\\ \dot{y}_2 &= r y_1 - y_2 - y_1 y_3\\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - b y_3\end{aligned}$$

со значениями параметров $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$

2. **Задание**

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0, 100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $y_1(0) = 3.051522$, $y_2(0) = 1.582542$, $y_3(0) = 15.62388$. Приведите график решения в пространстве (y_1, y_2, y_3).

- Определить положения равновесия системы и условия на параметры системы при которых эти положения существуют.

ВАРИАНТ №16

Система Ланфорда.

1. Постановка задачи. Рассматривается система Ланфорда:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= (v-1)y_1 - y_2 + y_1 y_3,\\
\dot{y}_2 &= y_1 + (v-1)y_2 + y_2 y_3\\
\dot{y}_3 &= v y_3 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.
\end{aligned}$$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0, 100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $y_1(0) = 0.1$, $y_2(0) = 0.1$, $y_3(0) = 0.07$. Приведите график решения в пространстве (y_1, y_2, y_3).

- Определить положения равновесия системы. Показать, что при значениях параметра $1/2 < v < 1$ система имеет периодическую траекторию.

ВАРИАНТ №17

Система типа хищник-жертва. Модель Базыкина

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник- жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограни- ченные ресурсы и учете фактора нелинейности размножения жертв при малых плотностях популяции. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t. Уравнения имеют следующий вид:

$$x' = \frac{ax^2}{N+x}\frac{K-x}{K} - bxy,$$
$$y' = -cy + dxy,$$

где a, b, c, d, N, K неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Величина $\frac{ax^2}{N+x}\frac{K-x}{K}$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников.
- Слагаемое bxy описывает влияние хищников на популяцию жертв.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная определяется естественной нормой смертности хищников. Второе слагаемое характеризует прирост хищников в зависимости от плотности жертв.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = \frac{x}{K}, \quad Y = \frac{b}{a}y, \quad \tau = at, \quad n = \frac{N}{K}, \quad m = \frac{c}{dK}, \quad \gamma = \frac{dK}{a},$$

преобразуем уравнения к виду

$$X' = \frac{(1-X)X^2}{n+X} - YX,$$
$$Y' = \gamma(X-m)Y,$$

и дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0,\ Y(0) = Y_0.$$

3. Задание.

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t,y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a,b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Найти положения равновесия системы. Как они зависят от параметров задачи?
- Для ряда значений параметра m из интервала [0.1, 0.35] решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать динамику популяции при следующих исходных данных $n = 0.1$, $\gamma = 1$, $X_0 = 0.3$, $Y_0 = 0.3$. Приведите графики наиболее характерных решений в координатах (X,Y), $(X(t),t)$, $(Y(t),t)$ и дайте их интерпретацию.

ВАРИАНТ №18

Ограниченная задача трех тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два тела с массами m и $M = 1-m$ (например, Луна и Земля), участвующие в совместном круговом движении в плоскости xOy и расположенные в точках с координатами $(1,0)$ и $(0,0)$ соответственно. Пусть далее вблизи этих тел в той же плоскости движется третье тело пренебрежимо малой массы и $(x(t), y(t))$ - его координаты в момент времени t. Траектория движения этого тела описывается уравнениями.

$$
\begin{aligned}
&x'' = x + 2y' - M\frac{x+m}{R_1} - m\frac{x-M}{R_2},\\
&y'' = y - 2x' - M\frac{y}{R_1} - m\frac{y}{R_2},\\
&R_1 = \left((x+m)^2 + y^2\right)^{3/2}, \quad R_2 = \left((x-M)^2 + y^2\right)^{3/2}
\end{aligned}
$$

Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0.994,\ y(0) = 0,\ x'(0) = 0, y'(0) = -2.031732629557337.$$

При заданных начальных условиях и $m = 0.012277471$ орбита будет периодической с периодом обращения равным $T = 11.124340337$ (такие орбиты называют орбитами Аренсторфа).

Введением дополнительных неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = y'$ система сводится к системе из 4-х уравнений первого порядка.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t,y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a,b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать орбиту Аренсторфа. Учесть, что решения задачи бесконечно дифференцируемы всюду за исключение двух точек $(-m,0)$, $(M,0)$. Поэтому в окрестности начала и конца отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h, чем в другие моменты времени. Построить график орбиты в координатах (x,y), а также график скорости движения в координатах (x',y').

ВАРИАНТ №19

Математическая модель роста опухоли.

1. Постановка задачи. Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают резкую иммунную реакцию у больного. Эта реакция состоит в том, что производятся клетки - лимфоциты, которые атакуют и уничтожают клетки опухоли. Модель оперирует следующими переменными (имеется в виду плотность названной популяции клеток):

- L - свободные лимфоциты на поверхности опухоли;
- C - опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности;
- C_S - опухолевые клетки на поверхности опухоли;
- C_N - опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;
- C_F - опухолевые клетки внутри и на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами.

Переменные L и C можно взять за основные переменные модели, которая имеет следующий вид

$$L' = \left(-\lambda_1 + \alpha_1 C_N (1 - L/L_M)\right),$$
$$C' = \lambda_2 C_F - \alpha_2 C_N L.$$

Здесь λ_1 характеризует уровень естественной смертности лимфоцитов, следующее слагаемое - их стимуляцию: когда L мало, стимуляция свободных лимфоцитов возрастает линейно с ростом C_N и что существует максимальный размер популяции L_M, при котором стимуляция обращается в нуль. Первое слагаемое во втором уравнении описывает рост опухоли, не подвергающейся атакам лимфоцитов, а второй член учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли. Подставляя в уравнения значения $C_N = K_1 C^{2/3}/(1 + K_2 L)$ и $C_F = C - K_1 K_2 L C^{2/3}/(1 + K_2 L)$, можно переписать их в виде

$$x' = \left(-\lambda_1 + \beta_1 y^{2/3}(1 - x/c)(1 + x)\right) x,$$
$$y' = \lambda_2 y - \beta_2 x y^{2/3}/(1 + x),$$

где $x = K_2 L$, $c = K_2 LM$, $y = K_1 C$, а λ_1, λ_2, β_1, β_2 положительные параметры. Так как x и y - размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а x не может превышать c, поскольку L ограничено сверху величиной L_M. Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 3-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Для значений параметра $\beta_2 = 3;\ 3.48;\ 5$ при помощи разработанной процедуры рассчитать динамику популяции при различных начальных значениях размера опухоли $y_0 \in [0.5, 9]$. Привести гра- фики наиболее характерных решений в координатах (x, y) и дать их интерпретацию. Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $c = 3$, $t \in [0, 20]$.

ВАРИАНТ №20

Динамика химического реактора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель химического реактора, которая представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания. В такой системе происходит непрерывный тепло - и массообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что рассматриваемый химический реактор - это емкость (цилиндрический сосуд с кожухом), в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией c_0 и температурой T_B. Пусть в результате химической реакции $A \to B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q, а смесь продукта и реагента выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной λ. Тепло, образующееся во время реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Последнее характеризуется температурой стенки $T_s t$ и коэффициентом теплобмена ω. Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы, а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора). В результате получим уравнения

$$c' = -c\exp(-1/T) + \lambda(c_0 - c),$$
$$T' = c\exp(-1/T) + \beta(T_0 - T).$$

где c - концентрация, T - температура реагента, а параметры T_0, β связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$T_0 = \frac{\lambda T_B + \omega T_{st}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.$$

Уравнения дополняются начальными условиями $c(0) = c_0, T(0) = T_0$. Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра: c_0, T_0,λ, β, которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом неизвестные $c(t)$, $T(t)$ также положительны. Время окончания химической реакции полагается равным $T = 15$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при помощи разработанной процедуры для следующих данных $c_0 = 120,\ T_0 = 0.23,\ \lambda = 0.45,\ \beta = 45$. Приведите график решения в фазовом пространстве (c, T). Вы должны обнаружить устойчивый предельный цикл в решении.

- Изменяя c_0 на интервале $(100, 135)$ определить те значения начальной концентрации c_0, при которых в системе происходит бифуркация: устойчивый фокус $\to$ предельный цикл $\to$ устойчивый фокус.

Результаты расчетов представить в виде графиков в фазовой плоскости (T, c), а также характерные расчеты в виде графиков за- висимости T и c от t.

ВАРИАНТ №21

Динамика химического реактора.

1. Постановка задачи. Рассматривается химическая реакция, протекающая в смеси трех веществ и описываемая системой уравнений:

$$y_1' = -(k_1(T) + k_2(T) + k_3(T))y_1,$$
$$y_2' = k_1(T)y_1 - k_4(T)y_2,$$
$$y_3' = k_4(T)y_2 - k_5(T)y_3,$$

где y_1 - концентрация исходного вещества (сырья), y_2 - концентрация промежуточного вещества, y_3 - концентрация окончательного продукта, $T = T(t)$ - температура, $k_i = k_i(T)$, $i = 1, 2...5$, - функции, определяемые кинетикой данной реакции, имеют следующий вид (согласно закону Аррениуса):

$$k_i(T) = C_i \exp\left(\frac{E_i}{R}\left(\frac{1}{658} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

Параметры, определяющие функции k_i заданы:

$$C_1 = 1.02,\ C_2 = 0.93,\ C_3 = 0.386,\ C_4 = 3.28,\ C_5 = 0.084,$$

$$E_1 = 16000,\ E_2 = 14000,\ E_3 = 15000,\ E_4 = 10000,\ E_5 = 15000,\ R = 1.9865.$$

Заданы начальные условия

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_2(0) = 0.$$

Время окончания химической реакции полагается равным $t = 1$. Температура меняется во времени по закону

$$T(t) = \begin{cases} 823 & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 673 & t_0 \leqslant t \leqslant t1, \\ 580 & t_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при $t_0 = 0.14$, $t_1 = 0.5$ при помощи разработанной процедуры. Результаты расчетов представить в виде графиков $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ на отрезке $[0, t]$.

- Полагая $t_1 = 0.5$ и изменяя t_0 на интервале $(0.05, 0.5)$ максимизиовать выход продукта при $t = 1$.

ВАРИАНТ №22

Система Лоренца.

1. Постановка задачи. Рассматривается система Лоренца:

$$\dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma x_2$$
$$\dot{x}_2 = r x_1 - x_2 - x_1 x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3$$

со значениями параметров $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0, 100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $x_1(0) = 3.051522$, $x_2(0) = 1.582542$, $x_3(0) = 15.62388$. Приведите график решения в пространстве (x_1, x_2, x_3).

- Определить положения равновесия системы и условия на параметры системы при которых эти положения существуют.

ВАРИАНТ №23

Система Ланфорда.

1. **Постановка задачи.** Рассматривается система Ланфорда:

$$\dot{x}_1 = (v-1)x_1 - x_2 + x_1x_3,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + (v-1)x_2 + x_2x_3$$
$$\dot{x}_3 = vx_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

2. **Задание**

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$x' = f(t,x),\ x(0) = x_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a,b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0,100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $x_1(0) = 0.1,\ x_2(0) = 0.1,\ x_3(0) = 0.07$. Приведите график решения в пространстве (x_1,x_2,x_3).

- Определить положения равновесия системы. Показать, что при значениях параметра $1/2 < v < 1$ система имеет периодическую траекторию.

ВАРИАНТ №24

Ограниченная задача трех тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два тела с массами m и $M = 1-m$ (например, Луна и Земля), участвующие в совместном круговом движении в плоскости xOz и расположенные в точках с координатами $(1, 0)$ и $(0, 0)$ соответственно. Пусть далее вблизи этих тел в той же плоскости движется третье тело пренебрежимо малой массы и $(x(t), z(t))$ - его координаты в момент времени t. Траектория движения этого тела описывается уравнениями.

$$
\begin{aligned}
&x'' = x + 2z' - M\frac{x+m}{R_1} - m\frac{x-M}{R_2},\\
&z'' = z - 2x' - M\frac{z}{R_1} - m\frac{z}{R_2},\\
&R_1 = \left((x+m)^2 + z^2\right)^{3/2}, \quad R_2 = \left((x-M)^2 + z^2\right)^{3/2}
\end{aligned}
$$

Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0.994,\ z(0) = 0,\ x'(0) = 0, z'(0) = -2.031732629557337.$$

При заданных начальных условиях и $m = 0.012277471$ орбита будет периодической с периодом обращения равным $T = 11.124340337$ (такие орбиты называют орбитами Аренсторфа).

Введением дополнительных неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = z'$ система сводится к системе из 4-х уравнений первого порядка.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$z' = f(t, z),\ z(0) = z_0,\ z(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать орбиту Аренсторфа. Учесть, что решения задачи бесконечно дифференцируемы всюду за исключение двух точек $(-m, 0)$, $(M, 0)$. Поэтому в окрестности начала и конца отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h, чем в другие моменты времени. Построить график орбиты в координатах (x, z), а также график скорости движения в координатах (x', z').

ВАРИАНТ №25

Задача Жуковского о полете планера.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полет планера в верти- кальной плоскости xOz (ось Oz направлена вверх) при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета;
- угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета.

Тогда, уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&mv' = -mg\sin(\vartheta) - \rho SCv^2/2,\\
&mv\vartheta' = -mg\cos(\vartheta) + \rho SPv^2/2,\\
&z' = v\sin(\vartheta),\\
&x' = v\cos(\vartheta).
\end{aligned}$$

Здесь m масса планера, v - скорость движения, ϑ - угол между касательной к траектории и осью Ox, g - ускорение свободного падения, S - площадь крыльев планера, ρ - плотность воздуха, P - подъемная сила крыльев планера.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$V = v\left(\frac{\rho SP}{2mg}\right)^{1/2},\ X = x\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ Z = z\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ \tau = t\left(\frac{\rho gSp}{2m}\right)^{1/2},\ \sigma = \frac{C}{P},$$

преобразуем уравнения к виду

$$\begin{aligned}
&V' = -\sin(\vartheta) - \sigma V^2,\\
&\vartheta' = \left(V^2 - \cos(\vartheta)\right)/V,\\
&Z' = V\sin(\vartheta),\\
&X' = V\cos(\vartheta),
\end{aligned}$$

и дополним их начальными условиями

$$Z(0) = Z_0,\ X(0) = 0,\ \vartheta(0) = \vartheta_0,\ V(0) = V_0.$$

3. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 2-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий и нескольких значений параметра σ показать, что если начальная скорость планера достаточно велика, то планер совершит сначала несколько мертвых петель, затем по волнообразно затухающей траектории будет при- ближаться к траектории прямолинейного полета. Привести графики наиболее характерных траекторий полета в координатах (X, Z) и графики функций $X(t)$, $Z(t)$, $\vartheta(t)$, $V(t)$ на отрезке интегрирования.

ВАРИАНТ №26

1. Постановка задачи. Рассмотрим полет планера в верти- кальной плоскости yOz (ось Oz направлена вверх) при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета;
- угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета.

Тогда, уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&mv' = -mg\sin(\varphi) - \rho SCv^2/2,\\
&mv\varphi' = -mg\cos(\varphi) + \rho SPv^2/2,\\
&z' = v\sin(\varphi),\\
&y' = v\cos(\varphi).
\end{aligned}
$$

Здесь m масса планера, v - скорость движения, φ - угол между касательной к траектории и осью Oy, g - ускорение свободного падения, S - площадь крыльев планера, ρ - плотность воздуха, P - подъемная сила крыльев планера.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$
V = v\left(\frac{\rho SP}{2mg}\right)^{1/2},\ Y = y\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ Z = z\left(\frac{\rho SP}{2m}\right),\ \tau = t\left(\frac{\rho gSp}{2m}\right)^{1/2},\ \sigma = \frac{C}{P},
$$

преобразуем уравнения к виду

$$
\begin{aligned}
&V' = -\sin(\varphi) - \sigma V^2,\\
&\varphi' = \left(V^2 - \cos(\varphi)\right)/V,\\
&Z' = V\sin(\varphi),\\
&Y' = V\cos(\varphi),
\end{aligned}
$$

и дополним их начальными условиями

$$
Z(0) = Z_0,\ Y(0) = 0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ V(0) = V_0.
$$

3. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t,y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a,b]$, используя метод Рунге-Кутта 2-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий и нескольких значений параметра σ показать, что если начальная скорость планера достаточно велика, то планер совершит сначала несколько мертвых петель, затем по волнообразно затухающей траектории будет при- ближаться к траектории прямолинейного полета. Привести графики наиболее характерных траекторий полета в координатах (Y, Z) и графики функций $Y(t)$, $Z(t)$, $\varphi(t)$, $V(t)$ на отрезке интегрирования.

ВАРИАНТ №27

Система Ланфорда.

1. Постановка задачи. Рассматривается система Ланфорда:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= (v-1)y_1 - y_2 + y_1 y_3,\\
\dot{y}_2 &= y_1 + (v-1)y_2 + y_2 y_3\\
\dot{y}_3 &= v y_3 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.
\end{aligned}$$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t,y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a,b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0,100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $y_1(0) = 0.1,\ y_2(0) = 0.1,\ y_3(0) = 0.07$. Приведите график решения в пространстве (y_1, y_2, y_3).

- Определить положения равновесия системы. Показать, что при значениях параметра $1/2 < v < 1$ система имеет периодическую траекторию.

ВАРИАНТ №28

Система Лоренца.

1. **Постановка задачи.** Рассматривается система Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\sigma y_1 + \sigma y_2\\ \dot{y}_2 &= r y_1 - y_2 - y_1 y_3\\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - b y_3\end{aligned}$$

со значениями параметров $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$

2. **Задание**

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений на отрезке $[0, 100]$ при помощи разработанной процедуры для следующих начальных условий $y_1(0) = 3.051522$, $y_2(0) = 1.582542$, $y_3(0) = 15.62388$. Приведите график решения в пространстве (y_1, y_2, y_3).

- Определить положения равновесия системы и условия на параметры системы при которых эти положения существуют.

ВАРИАНТ №29

Динамика химического реактора.

1. Постановка задачи. Рассматривается химическая реакция, протекающая в смеси трех веществ и описываемая системой уравнений:

$$z_1' = -(k_1(T) + k_2(T) + k_3(T))z_1,$$
$$z_2' = k_1(T)z_1 - k_4(T)z_2,$$
$$z_3' = k_4(T)z_2 - k_5(T)z_3,$$

где z_1 - концентрация исходного вещества (сырья), z_2 - концентрация промежуточного вещества, z_3 - концентрация окончательного продукта, $T = T(t)$ - температура, $k_i = k_i(T)$, $i = 1, 2...5$, - функции, определяемые кинетикой данной реакции, имеют следующий вид (согласно закону Аррениуса):

$$k_i(T) = C_i \exp\left(\frac{E_i}{R}\left(\frac{1}{658} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

Параметры, определяющие функции k_i заданы:

$$C_1 = 1.02,\ C_2 = 0.93,\ C_3 = 0.386,\ C_4 = 3.28,\ C_5 = 0.084,$$

$$E_1 = 16000,\ E_2 = 14000,\ E_3 = 15000,\ E_4 = 10000,\ E_5 = 15000,\ R = 1.9865.$$

Заданы начальные условия

$$z_1(0) = 1,\ z_2(0) = 0,\ z_2(0) = 0.$$

Время окончания химической реакции полагается равным $t = 1$. Температура меняется во времени по закону

$$T(t) = \begin{cases} 823 & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 673 & t_0 \leqslant t \leqslant t1, \\ 580 & t_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$z' = f(t, z),\ z(0) = z_0,\ z(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при $t_0 = 0.14$, $t_1 = 0.5$ при помощи разработанной процедуры. Результаты расчетов представить в виде графиков $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ на отрезке $[0, t]$.

- Полагая $t_1 = 0.5$ и изменяя t_0 на интервале $(0.05, 0.5)$ максимизиовать выход продукта при $t = 1$.

ВАРИАНТ №30

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель химического реактора, которая представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания. В такой системе происходит непрерывный тепло - и массообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что рассматриваемый химический реактор - это емкость (цилиндрический сосуд с кожухом), в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией c_0 и температурой T_B. Пусть в результате химической реакции $A \to B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q, а смесь продукта и реагента выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной λ. Тепло, образующееся во время реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Последнее характеризуется температурой стенки T_st и коэффициентом теплобмена ω. Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы, а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора). В результате получим уравнения

$$c' = -c\exp(-1/T) + \lambda(c_0 - c),$$
$$T' = c\exp(-1/T) + \beta(T_0 - T).$$

где c - концентрация, T - температура реагента, а параметры T_0, β связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$T_0 = \frac{\lambda T_B + \omega T_{st}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.$$

Уравнения дополняются начальными условиями $c(0) = c_0, T(0) = T_0$. Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра: c_0, T_0,λ, β, которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом неизвестные $c(t)$, $T(t)$ также положительны. Время окончания химической реакции полагается равным $T = 15$.

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
  $$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
  на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h.

- Решить исходную систему уравнений при помощи разработанной процедуры для следующих данных $c_0 = 120,\ T_0 = 0.23,\ \lambda = 0.45,\ \beta = 45$. Приведите график решения в фазовом пространстве (c, T). Вы должны обнаружить устойчивый предельный цикл в решении.

- Изменяя c_0 на интервале $(100, 135)$ определить те значения начальной концентрации c_0, при которых в системе происходит бифуркация: устойчивый фокус $\to$ предельный цикл $\to$ устойчивый фокус.

Результаты расчетов представить в виде графиков в фазовой плоскости (T, c), а также характерные расчеты в виде графиков за- висимости T и c от t.

ВАРИАНТ №31

1. Постановка задачи. Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают резкую иммунную реакцию у больного. Эта реакция состоит в том, что производятся клетки - лимфоциты, которые атакуют и уничтожают клетки опухоли. Модель оперирует следующими переменными (имеется в виду плотность названной популяции клеток):

- B - свободные лимфоциты на поверхности опухоли;
- C - опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности;
- C_S - опухолевые клетки на поверхности опухоли;
- C_N - опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;
- C_F - опухолевые клетки внутри и на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами.

Переменные B и C можно взять за основные переменные модели, которая имеет следующий вид

$$B' = \left(-\lambda_1 + \alpha_1 C_N (1 - B/B_M)\right),$$
$$C' = \lambda_2 C_F - \alpha_2 C_N B.$$

Здесь λ_1 характеризует уровень естественной смертности лимфоцитов, следующее слагаемое - их стимуляцию: когда B мало, стимуляция свободных лимфоцитов возрастает линейно с ростом C_N и что существует максимальный размер популяции B_M, при котором стимуляция обращается в нуль. Первое слагаемое во втором уравнении описывает рост опухоли, не подвергающейся атакам лимфоцитов, а второй член учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли. Подставляя в уравнения значения $C_N = K_1 C^{2/3}/(1 + K_2 B)$ и $C_F = C - K_1 K_2 B C^{2/3}/(1 + K_2 B)$, можно переписать их в виде

$$x' = \left(-\lambda_1 + \beta_1 y^{2/3}(1 - x/c)(1 + x)\right) x,$$
$$y' = \lambda_2 y - \beta_2 x y^{2/3}/(1 + x),$$

где $x = K_2 B$, $c = K_2 BM$, $y = K_1 C$, а λ_1, λ_2, β_1, β_2 положительные параметры. Так как x и y - размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а x не может превышать c, поскольку B ограничено сверху величиной B_M. Уравнения дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

2. Задание

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
  $$y' = f(t, y),\ y(0) = y_0,\ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
  на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 3-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Для значений параметра $\beta_2 = 3;\ 3.48;\ 5$ при помощи разработанной процедуры рассчитать динамику популяции при различных начальных значениях размера опухоли $y_0 \in [0.5, 9]$. Привести гра- фики наиболее характерных решений в координатах (x, y) и дать их интерпретацию. Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $c = 3$, $t \in [0, 20]$.

ВАРИАНТ №32

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник- жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограни- ченные ресурсы и учете фактора нелинейности размножения жертв при малых плотностях популяции. Обозначим через $z = z(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t. Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{az^2}{N+z}\frac{M-z}{M} - bzy, \\ y' &= -cy + dzy, \end{aligned}$$

где a, b, c, d, N, M неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Величина $\frac{az^2}{N+z}\frac{M-z}{M}$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников.
- Слагаемое bzy описывает влияние хищников на популяцию жертв.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная определяется естественной нормой смертности хищников. Второе слагаемое характеризует прирост хищников в зависимости от плотности жертв.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$Z = \frac{z}{M}, \quad Y = \frac{b}{a}y, \quad \tau = at, \quad n = \frac{N}{M}, \quad m = \frac{c}{dM}, \quad \gamma = \frac{dM}{a},$$

преобразуем уравнения к виду

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{(1-Z)Z^2}{n+Z} - YZ, \\ Y' &= \gamma(Z-m)Y, \end{aligned}$$

и дополним их начальными условиями

$$Z(0) = Z_0, \ Y(0) = Y_0.$$

3. Задание.

- Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида
$$y' = f(t, y), \ y(0) = y_0, \ y(t) \in \mathbb{R}^n$$
на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности с постоянным шагом h.
- Найти положения равновесия системы. Как они зависят от параметров задачи?
- Для ряда значений параметра m из интервала $[0.1, 0.35]$ решить систему уравнений при помощи разработанной программы. Рассчитать динамику популяции при следующих исходных данных $n = 0.1$, $\gamma = 1$, $Z_0 = 0.3$, $Y_0 = 0.3$. Приведите графики наиболее характерных решений в координатах (Z, Y), $(Z(t), t)$, $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.