



ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Е. С. Тверская

**МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва**

E-mail: e_tverskaya@bmstu.ru

1. МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.

На предыдущих занятиях мы рассмотрели методы составления разностных схем

- Метод разностной аппроксимации.
- Интегро-интерполяционный метод.
- Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим теперь запись разностной схемы в нерегулярных узлах, т. е. на границе и, быть может, вблизи нее.

Например, в разностных схемах для уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{\tau} (y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{k}{h^2} (y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}), \quad 1 \leq n \leq N - 1, \quad (1.1)$$

или

$$\frac{1}{\tau} (y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{k}{h^2} (y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m), \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (1.2)$$

нерегулярными являются граничные узлы при $n = 0$ или $n = N$.

Если заданы краевые условия 1-го рода, т.е.

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t).$$

В этих узлах можно записать разностные уравнения

$$y_0 = \mu_1(t_m), \quad y_N = \mu_2(t_m).$$

Данные условия являются точными и их невязка равна нулю.

Если заданы краевые условия 2-го рода, т.е.

$$u'_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u'_x(a, t) = \mu_2(t)$$

Для определенности рассмотрим только левое условие. Производную в этом условии можно аппроксимировать односторонней разностью

$$\frac{1}{h}(\hat{y}_1 - \hat{y}_0) = \mu_1(t_{m+1}).$$

Рассмотрим невязку данного разностного уравнения

$$\begin{aligned}\psi_0 &= (\hat{u}'_x)_0 - \frac{1}{h}(\hat{u}_1 - \hat{u}_0) = (\hat{u}'_x)_0 - \\ &- \frac{1}{h} \left(\hat{u}_0 + h(\hat{u}'_x)_0 + \frac{h^2}{2}(\hat{u}''_{xx})_0 - \hat{u}_0 \right) = -\frac{h}{2}(\hat{u}''_{xx})_0 = O(h).\end{aligned}$$

Т. е. невязка имеет больший порядок малости, чем невязка в регулярных узлах. В этом случае понижается общая точность расчета.

1.1. Способы борьбы с этой проблемой

Способ фиктивных точек. Введем вне отрезка ($0 \leq x \leq a$) фиктивную точку $x_{-1} = x_0 - h$. Будем считать, что исходное уравнение справедливо при $x \geq x_{-1}$.

Продемонстрируем это на примере явной схемы (1.2). Тогда при $n = 0$ получаем

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_0 - y_0) = \frac{k}{h_2} (y_{-1} - 2y_0 + y_1).$$

В крайних условиях производную заменим симметричной разностью

$$\frac{1}{2h} (y_1 - y_{-1}) = \mu_1(t_m), \quad \implies \quad y_{-1} = -2h\mu_1(t_m) + y_1.$$

Подставим в предыдущее уравнение и получим

$$\frac{h}{2k\tau} (\hat{y}_0 - y_0) = \frac{1}{h} (y_1 - y_0) - \mu_1(t_m).$$

Метод уменьшения невязки. Данный метод является более универсальным. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$u(x_1, t) = u(x_0, t) + hu'_x(x_0, t) + \frac{h^2}{2}u''_{xx}(x_0, t) + \dots$$

Так как $u'_x(x_0, t) = \mu_1(t)$ и $u''_{xx} = \frac{u'_t}{k}$, то

$$u(x_1, t) = u(x_0, t) + h\mu_1(t) + \frac{h^2}{2} \frac{u'_t}{k} + \dots$$

Заменяя $u'_t \simeq \frac{\hat{y}_0 - y_0}{\tau}$ получим тоже выражение:

$$\frac{h}{2k\tau} (\hat{y}_0 - y_0) = \frac{1}{h} (y_1 - y_0) - \mu_1(t_m).$$

2. АППРОКСИМАЦИЯ И ЕЕ ПОРЯДОК

Пусть G – область изменения x_1, \dots, x_p с границей Γ . Пусть ставится задача (некоторое уравнение с граничными условиями):

$$\begin{aligned} Au(x) - f(x) &= 0, & x \in G, \\ Ru(x) - \mu(x) &= 0, & x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем в \overline{G} сетку с шагом h . Данная сетка состоит из множества внутренних (регулярных) узлов: ω_h и множества граничных (нерегулярных) узлов γ_h .

Заменяем данную задачу в регулярных и нерегулярных узлах разностными аналогами

$$\begin{aligned} A_h y_h(x) - \varphi_h(x) &= 0, & x \in \omega_h, \\ R_h y_h(x) - \xi_h(x) &= 0, & x \in \gamma_h. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Близость функций будем определять по величине невязки

$$\begin{aligned}\psi_h(x) &= (Au - f) - (A_h u - \varphi_h), \quad x \in \omega_h, \\ \nu_h(x) &= (Ru - \mu) - (R_h u - \xi_h), \quad x \in \gamma_h.\end{aligned}$$

Определение 1 *Разностная схема (2.2) аппроксимирует задачу (2.1), если*

$$\|\psi\| \rightarrow 0, \quad \|\nu\| \rightarrow 0, \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Аппроксимация имеет p -ый порядок, если

$$\|\varphi\| = O(h^p), \quad \|\nu\| = O(h^p).$$

Замечание 2.1.

- ✓ Выбор той или иной нормы в конкретной задаче определяется из следующих соображений:

1. разностное решение y должно быть близко к точному решению в возможно более сильной норме;
 2. чем слабее норма, тем легче построить сходящуюся в этой норме разностную схему.
- ✓ Функции $u(x)$, $f(x)$ и $\mu(x)$ могут принадлежать разным классам, поэтому каждую из этих функций можно оценивать в своей норме.
- ✓ Функции y_h , φ_h и χ_h определены только на сетке, поэтому для них нужно ввести сеточные нормы.

Примеры норм и их разностных аналогов.

1. Чебышевская (локальная) норма: $\|u(x)\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$.

Ее разностный аналог $\|y\|_C = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|$.

2. Гильбертова (среднеквадратичная) норма:

$$\|u(x)\|_{L_2} = \left(\int_a^b \rho(x) u^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Ее разностный аналог $\|y\|_{l_2} = \left(\sum_{n=1}^N \rho_n y_n^2 h_n \right)^{1/2}$. Взяв другую квадратурную формулу для интеграла, можно получить другую норму.

Замечание 2.2. Как правило точное решение исходной задачи не известно, поэтому невязку в этом случае вычислить не удастся. Поступают следующим образом: Берут достаточно широкий класс функций, к которому $u(x)$ заведомо принадлежит. Если на всех функция данного класса аппроксимация имеет порядок p :

$$\|Av(x) - A_h v(x) + \varphi_n(x) - f(x)\| = O(h^p),$$

то очевидно аппроксимации на решении $u(x)$ не ниже p .

Случай многих переменных. Определение аппроксимации остается тем же, но требуется стремление к нулю шагов по всем

МГТУ им. Н. Э. Баумана, ФН12, весна 2020.

переменным. Т. е.

$$\|\varphi\| = O(h^p + \tau^q), \quad h \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0.$$

Определение 2 *Аппроксимация указанного вида, погрешность которой стремится к нулю при любом законе стремления шагов к нулю называют **безусловной** или **абсолютной**.*

*Если погрешность аппроксимации стремится к нулю при одних законах убывания шагов и не стремится к нулю при других, то такую аппроксимацию называют **условной**.*

Например. $\|\varphi\| = O(h^p + \tau^q + \frac{h^k}{\tau^s})$, то дополнительно необходимо потребовать, чтобы $\frac{h^k}{\tau^s} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ

Определение 3 *Разностная схема*

$$A_h y = \varphi_h, \quad x \in \omega_h;$$

$$R_h y = \chi_h, \quad x \in \gamma_h$$

устойчива, если решение системы разностных уравнений непрерывно зависит от входных данных φ и χ и эта зависимость равномерна относительно шага.

Другими словами:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$$

при

$$\|\varphi^I - \varphi^{II}\| < \delta, \quad \text{и} \quad \|\chi^I - \chi^{II}\| < \delta \quad (3.1)$$

выполняется $\|y^I - y^{II}\| < \varepsilon$

Замечание 3.1. Если разностная схема линейна, то разностное решение линейно зависит от входных данных, поэтому определение МГТУ им. Н. Э. Баумана, ФН12, весна 2020.

устойчивости в этом случае принимает вид:

$$\|y^I - y^{II}\| < M_1 \|\varphi^I - \varphi^{II}\| + M_2 \|\chi^I - \chi^{II}\|, \quad (3.2)$$

где M_1 и M_2 константы не зависящие от h . При этом, следует учитывать замечание 2.1.

Определение 4 Устойчивость называется **безусловной**, если в определении неравенства (3.1) и (3.2) выполняются при произвольном соотношении шагов по различным переменным.

Если для выполнения неравенств (3.1) и (3.2) накладывается дополнительное соотношение на шаги, то устойчивость называется **условной**.

Определение 5 Непрерывную зависимость разностного решения от φ называют **устойчивостью по правой части**.

Непрерывную зависимость разностного решения от χ называют **устойчивостью по граничным условиям**.

При $t = t_0$ устойчивость по граничным условиям называют устойчивостью по начальным данным.

Определение 6 Разностная схема, которая содержит только один известный слой и один неизвестный называют **двуслойной**.

Определение 7 Двуслойная линейная разностная схема называется **равномерно устойчивой по начальным данным**, если выполняется следующее условие:

$$\|y^I(t) - y^{II}(t)\| < K \|y^I(t^*) - y^{II}(t^*)\|,$$

где K – константа, не зависящая ни от t^* , ни от h , $0 \leq t^* < t < T$, y^I и y^{II} – решения разностной схемы $A_h y = \varphi$ с разными начальными данными и одной и той же правой частью.

Теорема 1 Признак равномерной сходимости. Если $A_h y^I = A_h y^{II}$, то для равномерной устойчивости по начальным данным

достаточно, чтобы при всех m выполнялось неравенство

$$\|\hat{y}^I - \hat{y}^{II}\| \leq (1 + C\tau)\|y^I - y^{II}\|, \quad \tau = t_{m+1} - t_m, \quad C \geq 0. \quad (3.3)$$

◀ Из (3.3) видно, что если на некотором слое имеется ошибка δy , то при переходе на следующий слой $\|\delta y\|$ возрастает не более, чем в $(1 + C\tau) \leq \exp(C\tau)$ раз (**самостоятельно пояснить последнее неравенство**).

Для перехода от t^* к t нужно сделать $m = (t - t^*)/\tau$ шагов по времени, при этом ошибка возрастет не более, чем в

$$\exp(Cm\tau) = \exp(C(t - t^*)) < \exp(C(T - t_0)), \text{ раз.}$$

Тогда

$$\|\delta y(t)\| \leq K\|\delta y(t^*)\|,$$

где $K = \exp(C(T - t_0))$. ▶

Теорема 2 Пусть двуслойная разностная схема $A_h y = \varphi$ равномерно устойчива по начальным данным и такова, что если два

разностных решения $A_h y^k = \varphi^k$ равны на некотором слое, т. е. $y^I = y^{II}$, то на следующем слое выполняется соотношение:

$$\|\hat{y}^I - \hat{y}^{II}\| \leq \alpha\tau \|\varphi^I - \varphi^{II}\|, \quad \alpha = \text{const}. \quad (3.4)$$

Тогда разностная схема устойчива по правой части.

◀ Пусть y – решение исходной системы $A_h y = \varphi$, а \tilde{y} – решение системы, соответствующее возмущенной правой части $A_h \tilde{y} = \tilde{\varphi}$.

Так как исследуется устойчивость только по правой части, то можно полагать, что

$$\tilde{y}(t_0) = y(t_0).$$

Введем сеточные функции $\omega_m(t)$, определенные при $t \geq t_{m-1}$ и удовлетворяющих условиям

$$\omega_1(t_0) = y(t_0);$$

$$\omega_{m+1}(t_m) = \omega_m(t_m), \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$A_h \omega_m = \begin{cases} \tilde{\varphi}, & t_{m-1} \leq t \leq t_m; \\ \varphi, & t_m \leq t. \end{cases}$$

Тогда $\omega_m(t) = \tilde{y}(t)$, при $t_{m-1} \leq t \leq t_m$ и $\omega_0(t) = y(t)$.

Сравним $\omega_{m+1}(t)$ и $\omega_m(t)$. На слое t_m они совпадают, тогда

$$\|\omega_{m+1}(t_{m+1}) - \omega_m(t_{m+1})\| \leq \alpha\tau \|\varphi - \tilde{\varphi}\|.$$

При $t > t_{m+1}$ эти функции удовлетворяют разностной схеме с одной и той же правой частью φ и с разными начальными данными на слое t_{m+1} .

Тогда, на последнем слое t_M будет выполнено неравенство

$$\|\omega_{m+1}(t_M) - \omega_m(t_M)\| \leq K \|\omega_{m+1}(t_{m+1}) - \omega_m(t_{m+1})\| \leq \alpha\tau K \|\varphi - \tilde{\varphi}\|.$$

И

$$\begin{aligned} \|y(t_M) - \tilde{y}(t_M)\| &\leq \sum_{m=0}^{M-1} \|\omega_{m+1}(t_M) - \omega_m(t_M)\| \leq \\ &\leq \alpha\tau KM \|\varphi - \tilde{\varphi}\| = \alpha(t_M - t_0)K \|\varphi - \tilde{\varphi}\|, \end{aligned}$$

Т. е. получили устойчивость по правой части. ►

Замечание 3.2. Если одновременно выполнены неравенства (3.3) и (3.4), то разностная схема устойчива и по начальным данным и по правой части.

Принцип максимума исследования на устойчивость разностных схем. Данный принцип позволяет показать устойчивость в $\|\cdot\|_C$.

Запишем двуслойную схему в следующем виде

$$\sum_k \alpha_k \hat{y}_{n+k} = \sum_l \beta_l y_{n+l} + \varphi_n. \quad (3.5)$$

Коэффициенты α_k пронумеруем таким образом, чтобы $|\alpha_0| = \max_k |\alpha_k|$, тогда сформулируем принцип максимума:

1. Схема равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(1 + C\tau)|\alpha_0| \geq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| + \sum_l |\beta_l|, \quad C = \text{const}. \quad (3.6)$$

2. Схема устойчива по правой части, если выполнено (3.6) и

$$|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \geq \frac{\kappa}{\tau}, \quad \kappa = \text{const} > 0 \quad (3.7)$$

◀ 1. Пусть δy – ошибка на исходном слое. Тогда запишем уравнение для ошибки $\delta \hat{y}$ на новом слое.

$$\sum_k \alpha_k \delta \hat{y}_{n+k} = \sum_l \beta_l \delta y_{n+l}.$$

Тогда для любого узла n

$$|\alpha_0| |\delta \hat{y}_n| \leq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| |\delta \hat{y}_{n+k}| + \sum_l |\beta_l| |\delta y_{n+l}|.$$

Применим это неравенство к узлу n^* , в котором $|\delta \hat{y}_n|$ достигает своего максимального значения. Тогда

$$|\alpha_0| \max_n |\delta \hat{y}_n| \leq \max_n |\delta \hat{y}_{n+k}| \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| + \max_n |\delta y_{n+l}| \sum_l |\beta_l|.$$

или

$$\|\delta\hat{y}\|_C \left(|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \right) \leq \|\delta y\|_C \sum_l |\beta_l|.$$

Неравенство (3.4) выполняется для любых $C \geq 0$, тогда

$$\sum_l |\beta_l| \leq (1 + C\tau) \left(|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \right).$$

Поэтому $\|\delta\hat{y}\|_C \leq (1 + C\tau)\|\delta y\|_C$, т. е. выполнен признак равномерной устойчивости. Первая часть признака максимума доказана.

2. Зафиксируем решение на новом слое и внесем погрешность в правую часть. Тогда

$$\sum_k \alpha_k \delta\hat{y}_{n+k} = \delta\varphi_n.$$

Получаем неравенство

$$|\alpha_0| |\delta \hat{y}_n| \leq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| |\delta \hat{y}_{n+k}| + |\delta \varphi_n|.$$

Аналогично рассуждениям в предыдущей части доказательства

$$\|\delta \hat{y}\|_C \left(|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \right) \leq \|\delta \varphi\|_C.$$

Откуда следует, с учетом (3.6)

$$\|\delta \hat{y}\|_C \leq \frac{\tau}{\kappa} \|\delta \varphi\|_C.$$

Второе утверждение принципа максимума также доказано. ►

Замечание 3.3. Принцип максимума применяется к параболическим и эллиптическим уравнениям, а также к уравнениям переноса.

Пример. Рассмотрим нестационарную краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Запишем для этой задачи неявную схему на равномерной сетке.

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_n - y_n) = \frac{k}{h^2} (\hat{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}) + \varphi_n, \quad 1 \leq n \leq N - 1;$$
$$\hat{y}_0 = \mu_1(\hat{t}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(\hat{t})$$

Для проверки неравенств принципа максимума перепишем:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\tau} + \frac{2k}{h^2}, \quad \alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{k}{h^2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{\tau}, \quad 1 \leq n \leq N - 1.$$
$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \text{при } n = 0, n = N.$$

Нетрудно заметить, что при любых соотношениях шагов по t и x условие (3.6) выполнено в регулярных узлах, а условие (3.4) выполнено во всех узлах сетки. Следовательно, схема безусловно устойчива по начальным данным, правой части и краевым условиям.

4. СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим задачу для дифференциального уравнения с граничными условиями:

$$Au(x) = f(x), x \in G, \quad Ru(x) = \mu(x), x \in \Gamma. \quad (4.1)$$

Аппроксимация данной задачи на сетке выглядит следующим образом

$$A_h y(x) = \varphi(x), x \in \omega_h, \quad R_h u(x) = \chi(x), x \in \gamma_n. \quad (4.2)$$

Нас интересует близость разностного решения $y(x)$ к точному решению $u(x)$. Так как разностное решение определено на сетке $\omega_h + \gamma_h$, то сравнивать эти решения нужно с использованием сеточной нормы.

Определение 8 *Разностное решение $y(x)$ сходится к точному решению $u(x)$, если*

$$\|y(x) - u(x)\|_{y_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Разностное решение имеет порядок точности p , если

$$\|y(x) - u(x)\|_{y_h} = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Определение 9 *Разностная схема (4.2) корректна, если ее решение существует и единственно при любых входных данных φ и χ , принадлежащих заданному классу функций и схема устойчива.*

Теорема 3 *Если решение $u[f, \mu]$ задачи (4.1) существует, разностная схема (4.2) корректна и аппроксимирует задачу (4.1) на данном решении, то разностное решение сходится к точному.*

◀ **Запишем**

$$A_h u = A_h u - (Au - f) = A_h u - (Au - f) - \varphi + \varphi = -\psi(x) + \varphi(x),$$

где $\psi(x)$ – невязка разностной схемы. Проведем аналогичные преобразования для краевых условий получим

$$A_h u(x) = \psi(x) - \varphi(x), \quad x \in \omega_h;$$

$$R_h u(x) = \chi(x) - \nu(x), \quad x \in \omega_h.$$

Полученные равенства представляют собой разностную схему (4.2) с правыми частями, измененными на величину невязки.

По условию теоремы разностная схема корректна, следовательно из определения она устойчива. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|\psi\|_{\varphi_h} \leq \delta \wedge \|\nu\|_{\chi_h} \leq \delta \Rightarrow \|y - u\|_{y_h} \leq \varepsilon.$$

Но тогда, в силу аппроксимации

$$\forall \delta > 0, \exists h_0(\delta) > 0 : h \leq h_0(\delta) \Rightarrow \|\psi\|_{\varphi_h} \leq \delta \wedge \|\nu\|_{\chi_h} \leq \delta.$$

Окончательно получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h_0(\delta(\varepsilon)) > 0 : h \leq h_0 \Rightarrow \|y - u\|_{y_h} \leq \varepsilon.$$

Сходимость доказана. ►

Пусть задача (4.1) и разностная схема (4.2) линейны, а граница Γ состоит из кусков Γ_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Тогда сформулируем следующую теорему.

Теорема 4 Об оценке точности. Если условия теоремы (3) выполнены, операторы A_h и R_{kh} линейны, а порядок аппроксимации равен p , то сходимость имеет порядок не ниже p . Другими словами: для линейной схемы порядок точности не ниже порядка аппроксимации.

◀ Запишем условие устойчивости для линейной схемы

$$\|y\|_y \leq M_0 \|\varphi\|_\varphi + \sum_{k=1}^K M_k \|\chi_k\|_{\chi_k}.$$

Рассмотри погрешность разностного решения: $z(x) = y(x) - u(x)$. Так как схема линейная, то

$$A_h y - A_h u = A_h(y - u) = A_h z$$

Тогда погрешность $z(x)$ удовлетворяет (пояснить самостоятельно почему)

$$A_h z = \psi(x), \quad x \in \omega_h, \quad R_{kh} z = \nu_k(x), \quad x \in \gamma_{nk}.$$

Применяя условие устойчивости получим

$$\|z\|_y \leq M_0 \|\psi\|_\varphi + \sum_{k=1}^K M_k \|\nu_k\|_{\chi_k}$$

Так как схема

$$A_h y = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad R_{kh} y = \chi_k(x), \quad x \in \gamma_{nk}$$

имеет порядок аппроксимации p , то

$$\|\psi\|_\varphi \leq \alpha h^p, \quad \|\nu_k\|_{\chi_k} \leq \alpha_k h^p, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Подставим данные выражения в условие устойчивости и получим оценку погрешности

$$\|y - u\|_y \leq M h^p, \quad M = \sum_{k=0}^k M_k \alpha_k.$$



Теорема 5 Пусть задача (4.1) и разностна схема (4.2) линейны, разностная схема корректна и аппроксимирует задачу так, что существует

$$\begin{aligned} \exists \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p}(Au - A_h u + \varphi - f) &= \bar{\varphi}(x), \quad x \in G, \\ \exists \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p}(R_k u - R_{ph} u + \chi_k - \mu_k) &= \bar{\nu}_k(x), \quad x \in \Gamma \Rightarrow . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Пусть существует решение задачи

$$\begin{aligned} A\bar{z}(x) &= \bar{\psi}(x), \quad x \in G, \\ R_k \bar{z}(x) &= \bar{\nu}_k(x), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (4.4)$$

и на этом решении разностные операторы A_h и R_{hk} аппроксимируют дифференциальные операторы A и R_k . Тогда погрешность решения (4.2) имеет следующую асимптотику.

$$y(x) - u(x) = h^p \bar{z} + o(h^p), \quad h \rightarrow 0, \quad x \in \omega_h + \gamma_h. \quad (4.5)$$

◀ В силу линейности оператора

$$\begin{aligned} A_h [h^{-p}(y - u) - \bar{z}] &= h^{-p}(A_h y - Au) - A_h \bar{z} = \\ &= h^{-p}(\varphi - A_h y + Au - f) - \bar{\psi} + (A\bar{z} - A_h \bar{z}). \end{aligned}$$

Аналогичную цепочка равенств можно составить для граничных условий.

При $h \rightarrow 0$ правая часть записанного равенства стремится к 0. Это следует из условия теоремы (4.4) и на основании предположения об аппроксимации на функцию $\bar{z}(x)$.

Так как разностные операторы A_h и R_{hk} устойчивы, то выражение в скобках в левой часть равенства по норме стремится к решению задачи (4.2) с нулевой правой частью, которое тождественно равно нулю. Следовательно

$$y(x) - u(x) = h^p \bar{z} + o(h^p).$$

