ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Е. С. Тверская

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва
E-mail: e_tverskaya@bmstu.ru

1. МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.

На предыдущих занятиях мы рассмотрели методы составления разностных схем

- Метод разностной аппроксимации.
- Интегро-интерполяционный метод.
- Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим теперь запись разностной схемы в нерегулярных узлах, т. е. на границе и, быть может, вблизи нее.

Например, в разностных схемах для уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{\tau}\left(y_n^{m+1} - y_n^m\right) = \frac{k}{h^2}\left(y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}\right), \; 1 \leqslant n \leqslant N-1, \quad (1.1)$$

или

$$\frac{1}{\tau}\left(y_n^{m+1} - y_n^m\right) = \frac{k}{h^2}\left(y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m\right),\ 1 \leqslant n \leqslant N-1, \qquad (1.2)$$

нерегулярными являются граничные узлы при $n = 0$ или $n = N$.

Если заданы краевые условия 1-го рода, т.е.

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(a,t) = \mu_2(t).$$

В этих узлах можно записать разностные уравнения

$$y_0 = \mu_1(t_m), \quad y_N = \mu_2(t_m).$$

Данные условия являются точными и их невязка равна нулю.

Если заданы краевые условия 2-го рода, т.е.

$$u'_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u'_x(a,t) = \mu_2(t)$$

Для определености рассмотри только левое условие. Производную в этом условии можно аппроксимировать односторонней разностью

$$\frac{1}{h}\left(\hat{y}_1 - \hat{y}_0\right) = \mu_1\left(t_{m+1}\right).$$

Рассмотрим невязку данного разностного уравнения

$$\psi_0 = (\hat{u}'_x)_0 - \frac{1}{h}\left(\hat{u}_1 - \hat{u}_0\right) = (\hat{u}'_x)_0 -$$
$$-\frac{1}{h}\left(\hat{u}_0 + h\left(\hat{u}'_x\right)_0 + \frac{h^2}{2}\left(\hat{u}''_{xx}\right)_0 - \hat{u}_0\right) = -\frac{h}{2}\left(\hat{u}''_{xx}\right)_0 = O(h).$$

Т. е. невязка имеет больший порядок малости, чем невязка в регулярных узлах. В этом случае понижается общая точность расчета.

1.1. Способы борьбы с этой проблемой

Способ фиктивных точек. Введем вне отрезка $(0 \leqslant x \leqslant a)$ фиктивную точку $x_{-1} = x_0 - h$. Будем считать, что исходное уравнение справедливо при $x \geqslant x_{-1}$.

Продемонстрируем это на примере явной схемы (1.2). Тогда при $n = 0$ получаем

$$\frac{1}{\tau}\left(\hat{y}_0 - y_0\right) = \frac{k}{h_2}\left(y_{-1} - 2y_0 + y_1\right).$$

В краевых условиях производную заменим симметричной разностью

$$\frac{1}{2h}\left(y_1 - y_{-1}\right) = \mu_1\left(t_m\right), \quad \Longrightarrow \quad y_{-1} = -2h\mu_1(t_m) + y_1.$$

Подставим в предыдущее уравнение и получим

$$\frac{h}{2k\tau}\left(\hat{y}_0 - y_0\right) = \frac{1}{h}\left(y_1 - y_0\right) - \mu_1\left(t_m\right).$$

Метод уменьшения невязки. Данный метод является более универсальным. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$u(x_1,t) = u(x_0,t) + hu'_x(x_0,t) + \frac{h^2}{2}u''_{xx}(x_0,t) + \ldots$$

Так как $u'_x(x_0,t) = \mu_1(t)$ и $u''_{xx} = \dfrac{u'_t}{k}$, то

$$u(x_1,t) = u(x_0,t) + h\mu_1(t) + \frac{h^2}{2}\frac{u'_t}{k} + \ldots$$

Заменяя $u'_t \simeq \dfrac{\hat{y}_0 - y_0}{\tau}$ получим тоже выражение:

$$\frac{h}{2k\tau}\left(\hat{y}_0 - y_0\right) = \frac{1}{h}\left(y_1 - y_0\right) - \mu_1\left(t_m\right).$$

2. АППРОКСИМАЦИЯ И ЕЕ ПОРЯДОК

Пусть G – область изменения $x_1, \dots x_p$ с границей Г. Пусть ставится задача (некоторое уравнение с граничными условиями):

$$\begin{aligned} &Au(x) - f(x) = 0, \quad x \in G, \\ &Ru(x) - \mu(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Введем в $\overline{G}$ сетку с шагом h. Данная сетка состоит из множества внутренних (регулярных) узлов: ω_h и множества граничных (нерегулярных) узлов γ_h.

Заменим данную задачу в регулярных и нерегулярных узлах разностными аналогами

$$\begin{aligned} &A_h y_h(x) - \varphi_h(x) = 0, \quad x \in \omega_h, \\ &R_h y_h(x) - \xi_h(x) = 0, \quad x \in \gamma_h. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Близость функций будем определеять по величине невязки

$$\psi_h(x) = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h)\,, \quad x \in \omega_h,$$
$$\nu_h(x) = (Ru - \mu) - (R_h u - \xi_h)\,, \quad x \in \gamma_h.$$

Определение 1 *Разностная схема (2.2) аппроксимирует задачу (2.1), если*

$$||\psi|| \to 0, \quad ||\nu|| \to 0, \; npu \; h \to 0.$$

Аппроксимация имеет p*-ый порядок, если*

$$||\varphi|| = O(h^p), \quad ||\nu|| = O(h^p).$$

В следующий раз поговорим о выборе норм в этом определении, устойчивости разностной схемы и о вопросах сходимости.