Занятие 10
Несобственные интегралы. Исследование несобственных интегралов на сходимость

Организационные вопросы

- Переписывание КР1
- Доступ к папке на Яндекс-диске
- Пособия для выполнения д/з:
- Копаев А.В., Маркелов Г.Е., Тесалина А.А. Определенный интеграл. Методические указания для выполнения домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ, 2002. – 69 с.
- Минеева О.М., Неклюдов А.В., Скуднева О.В. Несобственные интегралы. Методические указания для выполнения домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ, 2003. – 41 с. 11.
- Ковалев Я.Г., Киреева Ю.Г., Лунева М.С., Тесалина А.А. Определенный интеграл. Методические указания для выполнения домашнего задания. – М.: МВТУ, 1987.

Теоретическое введение

1°. Интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a, b]$ и непрерывна при $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, то по определению полагают:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если пределы в правой части равенства (1) существуют и конечны, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. При $c = a$ или $c = b$ определение соответствующим образом упрощается.

Теоретическое введение

Если существует непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ при $x \neq c$ (*обобщенная первообразная*), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Если $|f(x)| \leqslant \Phi(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и $\int_a^b \Phi(x)\,dx$ сходится, то интеграл (1) также сходится (*признак сравнения*).

Если $f(x) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{x \to c} \{f(x)\,|c - x|^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, т. е. $f(x) \sim \dfrac{A}{|c-x|^m}$ при $x \longrightarrow c$, то: 1) при $m < 1$ интеграл (1) сходится, 2) при $m \geqslant 1$ интеграл (1) расходится.

Теоретическое введение

2°. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < \infty$, то полагают

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{3}$$

и в зависимости от существования или несуществования конечного предела в правой части равенства (3) соответствующий интеграл называется *сходящимся* или *расходящимся*.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Теоретическое введение

Если $|f(x)| \leqslant F(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty F(x)\,dx$ сходится, то интеграл (3) тоже сходится.

Если $f(x) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x)\,x^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, т. е. $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$ при $x \to \infty$, то: 1) при $m > 1$ интеграл (3) сходится, 2) при $m \leqslant 1$ интеграл (3) расходится.

Примеры решения задач

Пример 1.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{\eta}-1\right)=\infty$$

— интеграл расходится.

Пример 2.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} 0)=\frac{\pi}{2}.$$

Примеры решения задач

Пример 3. Исследовать сходимость *интеграла Эйлера—Пуассона*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{4}$$

Решение. Положим

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx+\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Первый из двух интегралов в правой части не является несобственным, а второй сходится, так как $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$ при $x\geqslant 1$ и

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-1})=e^{-1};$$

следовательно, интеграл (4) сходится.

Примеры решения задач

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \tag{5}$$

Решение. При $x \longrightarrow +\infty$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

сходится, то наш интеграл (5) также сходится.

Примеры решения задач

Пример 5. Исследовать на сходимость эллиптический интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{6}$$

Решение. Точка разрыва подынтегральной функции: $x=1$. Применив формулу

$$1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2),$$

получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}.$$

Следовательно, при $x \longrightarrow 1$ будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как интеграл

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

сходится, то данный интеграл (6) также сходится.

Решение задач

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1546. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1546 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 =$

$= 2 - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{0+\varepsilon} = 2$

Решение задач

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1549. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

1550. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение задач

1549 $$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{1-\varepsilon-1} - \left(-\frac{1}{0-1}\right) + \frac{-1}{3-1} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{1+\varepsilon-1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{1}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ расходится

Решение задач

1550 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(1-\varepsilon) - 0 =$

$= \frac{\pi}{2}$

Решение задач

1551. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$.

1552. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение задач

1551 $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_1^b =$

$= \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \infty$ => расходится

Решение задач

1552 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{b}=$

$=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{1}\right)=0+1=1$

Решение задач

1555. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$. **1556.** $\int\limits_{0}^{\infty} \sin x\, dx$.

Решение задач

1555 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$

$= \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt5} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt5} \Big|_a^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt5} \operatorname{arctg} \frac{b+2}{\sqrt5} -$

$- \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt5} \operatorname{arctg} \frac{a+2}{\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5}\Big[\lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{b+2}{\sqrt5} -$

$- \lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{a+2}{\sqrt5}\Big] = \frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt5}$

Решение задач

1556 $$\int_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^{a} \sin x\,dx =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\cos x\,\Big|_0^a\right) = \lim_{a\to\infty}(-\cos a) + 1$$

$\nexists$

$\Rightarrow$ расходится

Решение задач

1558. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1559. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ $(a > 1)$.

Решение задач

1558 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\ln x}\Big|_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln(0+\varepsilon)} =$

$= \frac{1}{\ln 2} + 0 = \frac{1}{\ln 2}$

Решение задач

1559 $\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln x} (a>1) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x\ln x} =$

$= \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln\ln x \Big|_a^b =$

$= \lim_{b\to\infty} \ln\ln b - \ln\ln a = \infty \Rightarrow$ расходится

Решение задач

1560. $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} (a > 1)$.

1562. $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\, dx \ (k > 0)$.

Решение задач

1560 $(a>1)$ $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$

$=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^{b}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim\limits_{b\to\infty}-\frac{1}{\ln x}\Big|_a^b=$

$=\lim\limits_{b\to\infty}-\frac{1}{\ln b}-\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=0+\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$

Решение задач

1562 $(k>0)$ $\int_0^{\infty} e^{-kx}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-kx}dx =$

$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{k}\cdot e^{-kx}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{k}e^{-kb} + \frac{1}{k}e^{-k0} =$

$= \frac{1}{k}$

Решение задач

Исследовать сходимость интегралов:

1570. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

При $x \to +\infty$ имеем:

$$\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^5\cdot\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} =$$

$$= \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

Решение задач

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}} + \int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$$

Т.к. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$ – конечное число, то достаточно исследовать на сходимость

$$\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$$

Решение задач

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^{3/2}}=\lim_{b\to\infty}-2\frac{1}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^{b}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}-\frac{2}{\sqrt{b}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=0+1=1\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ – сходится $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$ – сх-ся

Решение задач

Исследовать сходимость интегралов:

1571. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$$

1573. $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

Решение задач

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ – исследовать сходимость

$x=1$ – точка разрыва

$$1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=$$

$$=\frac{1}{(1-x)^{1/3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)(1+x^2)}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x\to 1$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} \sim \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Решение задач

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} -(1-x)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} -(1-1+\varepsilon)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} +$$

$$+(1-0)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}} - \text{сходится}$$

Решение задач

$$\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x^2} \text{ при } x \to +\infty$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx - \text{сходится, если}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \text{ сходится.}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{x}dx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{b} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{b} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$- \text{сходится} \Rightarrow I - \text{сходится}$

Домашнее задание

1554, 1559, 1563, 1565, 1547, 1557, 166, 1567, 1572, 1646, 1683, 1691(а), 1697 + задачи 4, 5 из ДЗ1