Занятие 11

Вычисление объемов тел вращения

Теоретическое введение

Если криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной и положительной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, осью Ox и двумя прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ (рис. 13), вращается вокруг оси Ox или вокруг оси Oy, то объемы тел вращения выражаются соответственно следующими формулами:

$$V_{Ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx, \tag{10}$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x f(x)\, dx. \tag{11}$$

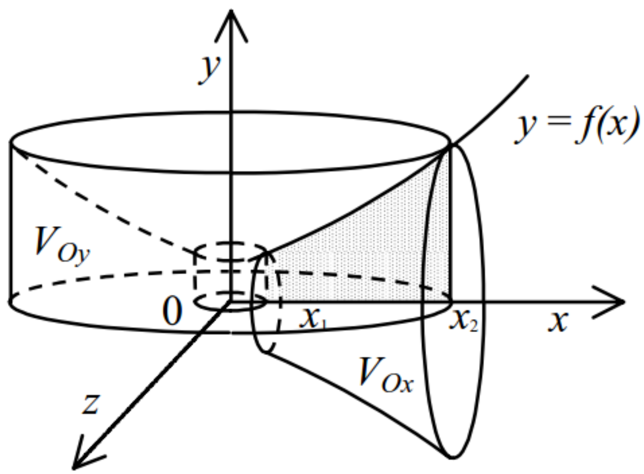


Рис. 13

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \leqslant x \leqslant \pi$ оси OX вокруг: а) оси OX и б) оси OY.

Решение.

а) $V_X = \pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{2}$;

б) $V_Y = 2\pi \int\limits_0^\pi x \sin x\, dx = 2\pi \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^\pi = 2\pi^2$.

Теоретическое введение

Если же криволинейная трапеция, ограниченная двумя прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ и двумя линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 14), вращается вокруг оси Ox или вокруг оси Oy, то объемы тел вращения выражаются соответственно следующими формулами:

$$V_{Ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\, dx\,, \qquad (12)$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x[f_2(x) - f_1(x)]\, dx\,. \qquad (13)$$

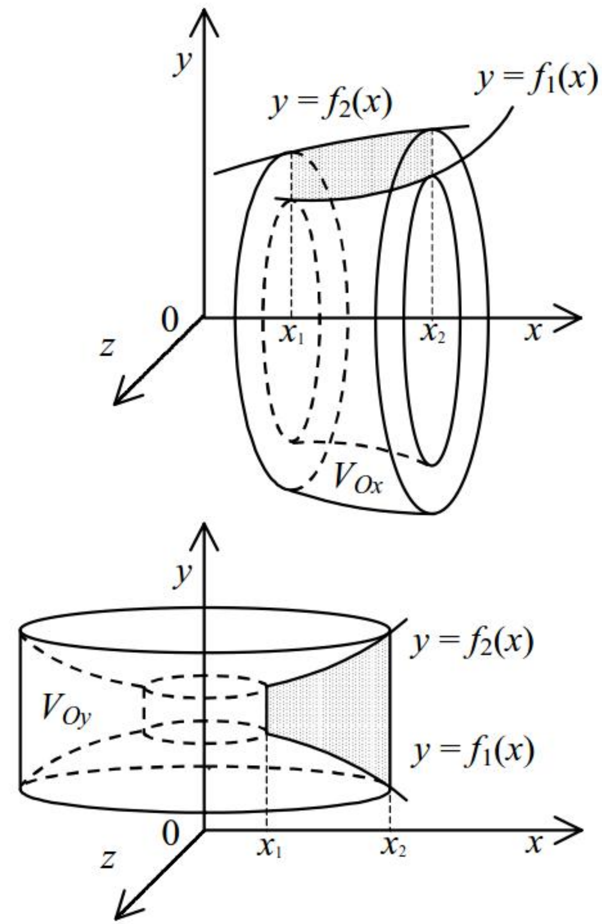


Рис. 14

Теоретическое введение

Если же криволинейная трапеция, ограниченная двумя прямыми $y = y_1$ и $y = y_2$ и двумя кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$, причем $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ (рис. 15), вращается вокруг оси Ox или вокруг оси Oy, то объемы тел вращения выражаются соответственно следующими формулами:

$$V_{Ox} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} y[\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\,dy, \tag{14}$$

$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} [\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)]\,dy. \tag{15}$$

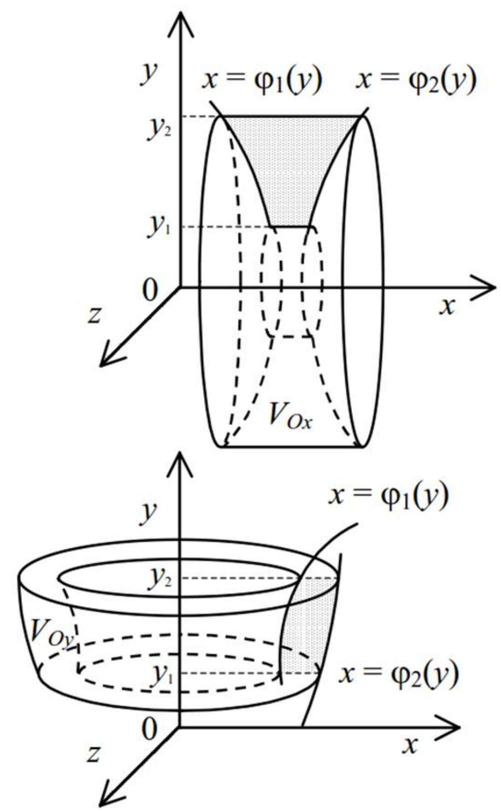


Рис. 15

Примеры решения задач

Пример 2. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2+(y-b)^2 \leqslant a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси OX (рис. 52).

Решение. Имеем:

$$y_1 = b - \sqrt{a^2-x^2} \text{ и } y_2 = b + \sqrt{a^2-x^2}.$$

Поэтому

$$V_X = \pi \int_{-a}^{a} \left[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2})^2 \right] dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = 2\pi^2 a^2 b$$

(последний интеграл берется подстановкой $x = a\sin t$).

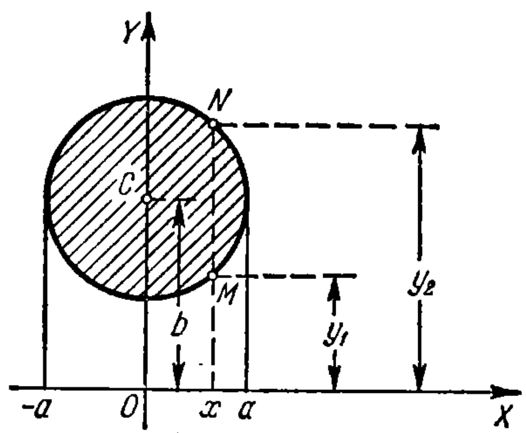


Рис. 52.

Решение задач

1688. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой $y = \sin^2 x$ в промежутке от $x = 0$ до $x = \pi$.

Решение задач

<u>1688</u> Ось OX; $y=\sin^2 x$, $0\le x\le\pi$, V_x - ?

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$$

$$\sin^4 x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{8}=$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

Решение задач

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \right) dx =$$

$$= \frac{3\pi}{8} \int_0^{\pi} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x\, dx + \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} \cos 4x\, dx =$$

$$= \frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \cos 2x\, d2x + \frac{\pi}{32} \int_0^{\pi} \cos 4x\, d4x =$$

$$= \frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\sin 2x \Big|_0^{\pi} \right) + \frac{\pi}{32} \left(\sin 4x \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{3\pi^2}{8} - 0 + 0 = \frac{3\pi^2}{8}$$

Решение задач

1691. Найти объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, вокруг: а) оси OX и б) оси OY.

Решение задач

а). Найдем предел интегрирования e^x. $y=0$ при $x \to -\infty$, тогда

$$V_x = \pi \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \pi \cdot \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} e^{2x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\lim_{b \to -\infty} e^{2x}\Big|_{b}^{0}\right] = \frac{\pi}{2}\left[e^{2\cdot 0} - \lim_{b \to -\infty} e^{2\cdot b}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Решение задач

б) $V_y = 2\pi \int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x dx = 2\pi \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} x \cdot e^x dx$

Найдём $\int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right\} =$

$= e^x \cdot x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x + c$

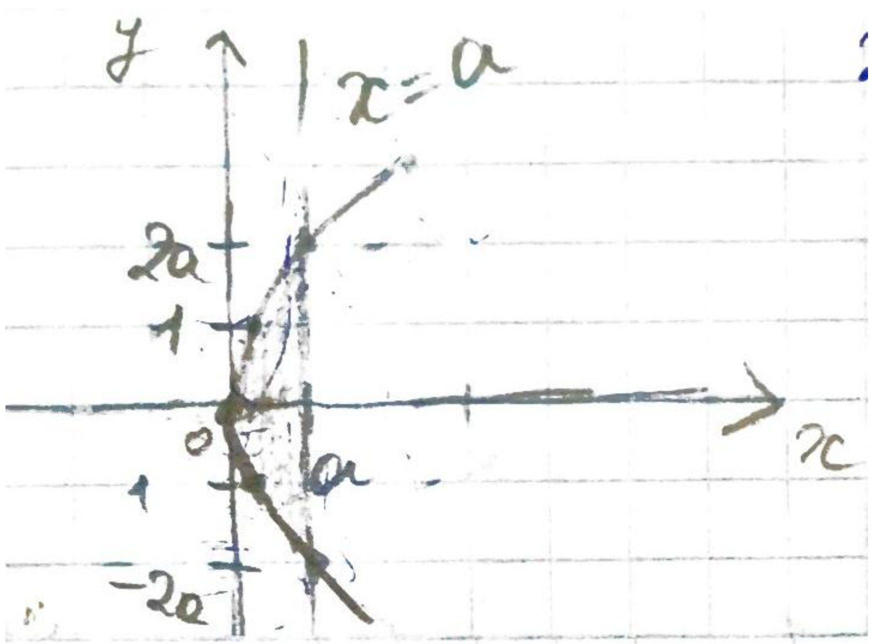
Тогда $V_y = 2\pi \lim_{b \to -\infty} \left(e^x \cdot x - e^x \Big|_{b}^{0} \right) =$

$= 2\pi \left[\lim_{b \to -\infty} e^b \cdot b - \lim_{b \to -\infty} e^b \right] - 2\pi \cdot \left[e^0 \cdot 0 - e^0 \right] =$

$= 2\pi \cdot 0 - 2\pi \cdot (-1) = 2\pi$

Решение задач

1692. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY той части параболы $y^2 = 4ax$, которая отсекается прямой $x = a$.



Решение задач

Найдём пределы интегрирования.

$x = a \Rightarrow y^2 = 4a \cdot a = 4a^2 \Rightarrow y_1 = -2a; y_2 = 2a$

$V = V_1 - V_2$

Будем исп-ть ф-лу $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$

$$V_1 = \pi \int_{-2a}^{2a} x^2 dy = \pi \int_{-2a}^{2a} a^2 dy = \pi a^2 y \Big|_{-2a}^{2a} =$$

$$= \pi a^2 (2a - (-2a)) = \pi a^2 \cdot 4a = 4\pi a^3$$

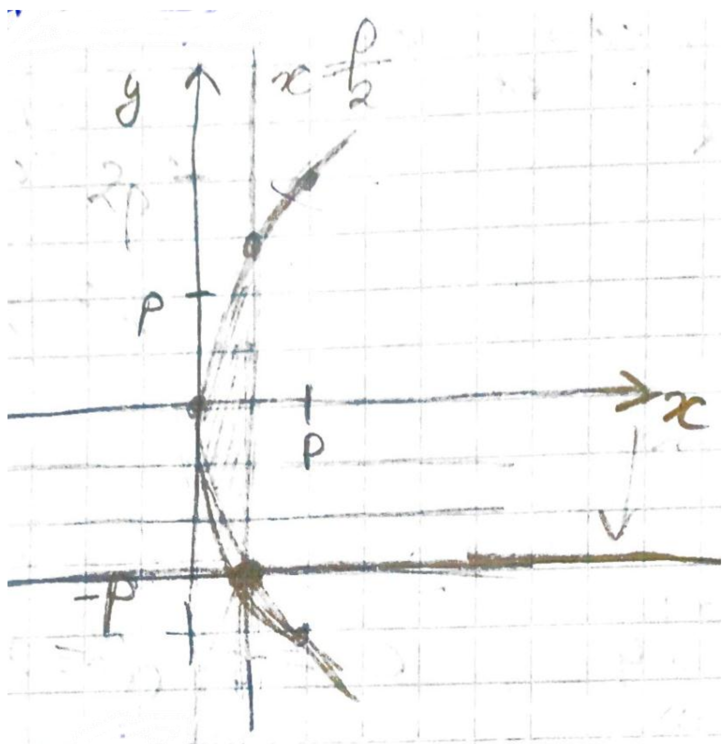
$$V_2 = \pi \int_{-2a}^{2a} \frac{1}{16a^2} y^4 dy = \frac{\pi}{16a^2} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_{-2a}^{2a} =$$

$$= \frac{\pi}{16a^2} \left[\frac{2^5 a^5}{5} - \frac{(-2)^5 \cdot a^5}{5} \right] = \frac{\pi}{16a^2} \cdot \frac{64 \cdot a^5}{5} =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{5} \Rightarrow V = V_1 - V_2 = 4\pi a^3 - \frac{4\pi a^3}{5} = \frac{16\pi a^3}{5}$$

Решение задач

1694. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y = -p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$.



Решение задач

"Перенесем" координатную ось, тогда получим:

$$(y-p)^2 = 2px$$

$$\Rightarrow y_2 - p = \sqrt{2px}\ ; \quad y_1 - p = -\sqrt{2px}$$

$$y_2 = p + \sqrt{2px}\ ; \quad y_1 = p - \sqrt{2px}$$

Используем формулу

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left[(p+\sqrt{2px})^2 - (p-\sqrt{2px})^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{p}{2}} (p+\sqrt{2px} - p + \sqrt{2px})(p+\sqrt{2px} + p - \sqrt{2px})\,dx =$$

Решение задач

$$= \pi \int_0^{p/2} 2\sqrt{2}\sqrt{p}\sqrt{x} \cdot 2p\,dx = 4p\sqrt{p}\sqrt{2}\pi \int_0^{p/2} \sqrt{x}\,dx =$$

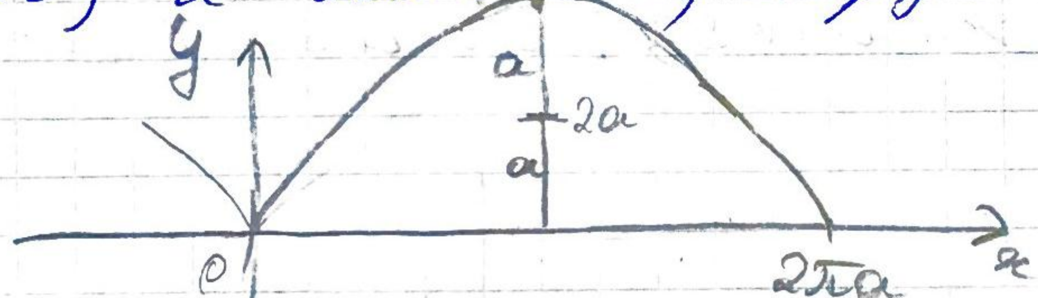
$$= 4p\sqrt{p}\sqrt{2}\pi \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^{\frac{p}{2}} \right) = 4p\sqrt{p}\cancel{\sqrt{2}}\pi \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{p}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\cancel{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{4\pi p^3}{3}$$

Решение задач

1701 Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью OX, вокруг

а) оси OX.



Найдём пределы интегрирования.

$y = 0 \Rightarrow a - a\cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1;$

$\Rightarrow \begin{array}{c} t = 0 \\ x = 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} t = 2\pi \\ x = 2\pi a \end{array} \Bigg\| \quad x'(t) = a - a\cos t$

Решение задач

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^{2\pi} (a - a\cos t)^2 x'(t)\,dt =$$

$$= \pi \int_0^{2t} (a - a\cos t)^3\,dt = \pi \int_0^{2\pi} [a^3 - 3a^3\cos t +$$

$$+ 3a^3\cos^2 t - a^3\cos^3 t]\,dt = \pi\Big[a^3\int_0^{2\pi} dt - 3a^3\int_0^{2\pi} \cos t\,dt +$$

$$+ 3a^3\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)\,dt - a^3\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\,d\sin t\Big] =$$

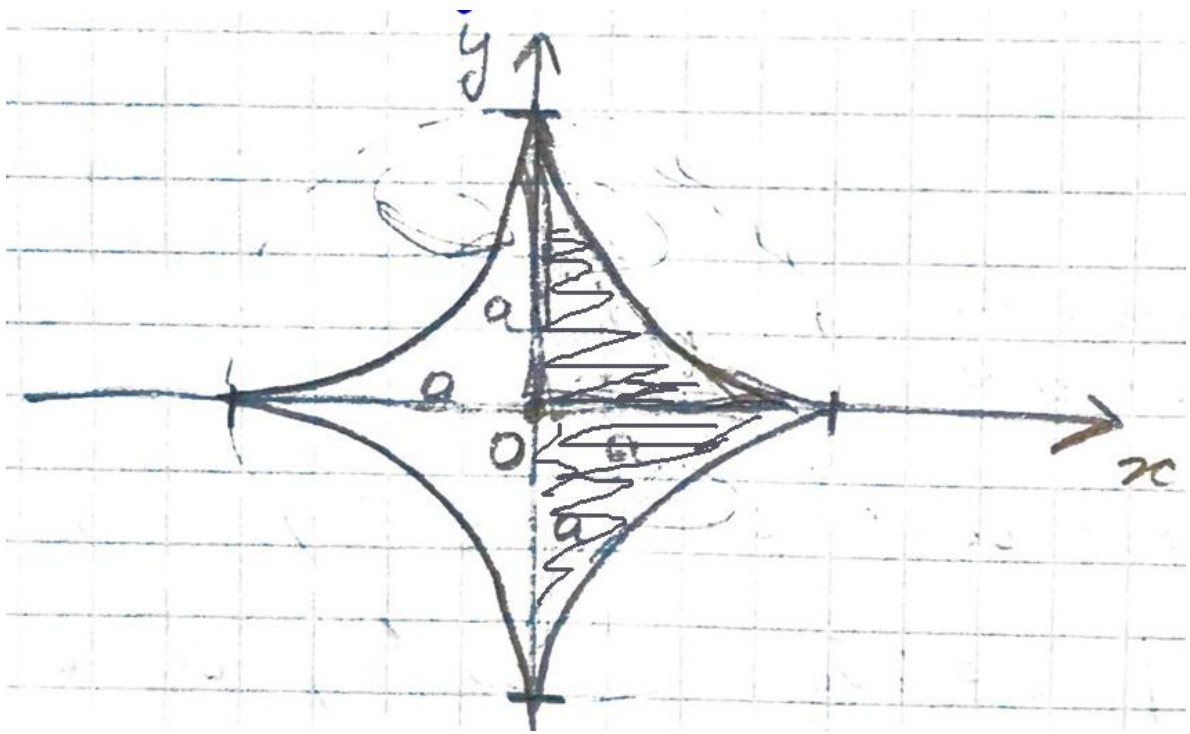
$$= \pi\Big[a^3 2\pi - 3a^3\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{3a^3}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}$$

$$+ \frac{3a^3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi - a^3\sin t\Big|_0^{2\pi} + a^3\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}\Big] =$$

$$= \pi\left[a^3 2\pi + 3a^3\pi\right] = 5\pi^2 a^3$$

Решение задач

1702. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг оси OY.



Решение задач

Достаточно рассмотреть правый кусок. А потом $\times 2$.

Найдём пределы интегрирования.

$x=0;\ y=-a \Rightarrow \frac{\pi}{2}=t_1$

$x=a;\ y=0 \Rightarrow 0=t_2$

$V=2\cdot V_y;\quad V_y=2\pi\int_{t_1}^{t_2} xy\,x'(t)\,dt=$

$=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\cos^3 t\cdot a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\,dt=$

$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,\sin^4 t\,dt=$

$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)^2\sin^4 t\,d\sin t=\begin{cases}\sin t=u\\ \sin 0=0\\ \sin\frac{\pi}{2}=1\end{cases}$

Решение задач

$$= 6\pi a^3 \int_0^1 (1-u^2)^2 u^4\, du = 6\pi a^3 \int_0^1 (1-2u^2+u^4) u^4\, du =$$

$$= 6\pi a^3 \int_0^1 (u^4 - 2u^6 + u^8)\, du = 6\pi a^3 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= 6\pi a^3 \left(\frac{1}{5}^{\lfloor 63} - \frac{2}{7}^{\lfloor 45} + \frac{1}{9}^{\lfloor 35} \right) = \frac{\cancel{6}^{2} \cdot \pi a^3 (63 - 90 + 35)}{5 \cdot 7 \cdot \cancel{9}\, 3} =$$

$$= \frac{16\pi a^3}{105} \Rightarrow V = 2 \cdot V_y = \frac{32\pi a^3}{105}$$

Теоретическое введение

Объем тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой $r = F(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, вокруг полярной оси, может быть вычислен по формуле

$$V_P = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Этой же формулой удобно пользоваться при отыскании объема тела, полученного вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной некоторой замкнутой кривой, заданной в полярных координатах.

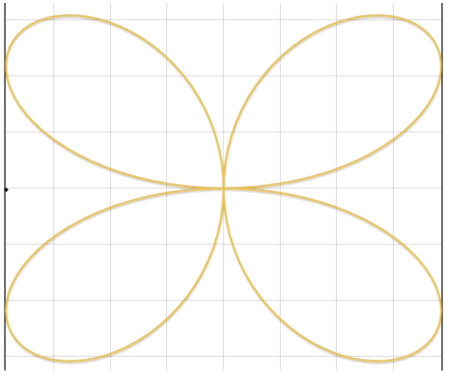
Примеры решения задач

Пример 3. Определить объем тела, образованного вращением кривой $r = a\sin 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.

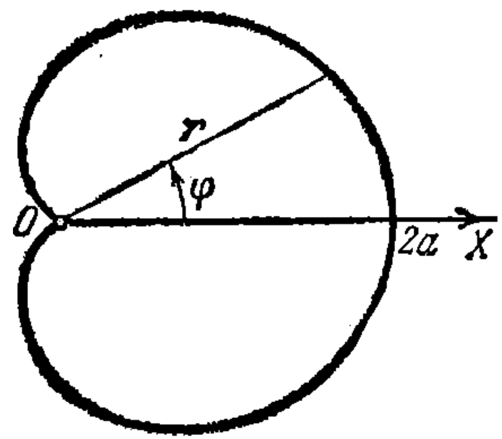
$$V_p = 2\cdot\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{64}{105}\pi a^3.$$



Решение задач

1703. Найти объем тела, которое получается от вращения кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.



Решение задач

$$V_{\text{кал-я осi}} = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi, \text{ где}$$

$0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi.$

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{-2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3 d\cos\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3 d(\cos\varphi+1) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1+\cos\varphi = u \\ 1+\cos 0 = 2 \\ 1+\cos\pi = 0 \end{matrix}\right\} = -\frac{2\pi a^3}{3}\int_2^0 u^3 du =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\,\frac{u^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2\pi a^3}{3}\cdot\frac{\cancel{16}^{\,4}}{\cancel{4}} = \frac{8\pi a^3}{3}$$

Домашнее задание

- 1689, 1695, 1697, 1701(б), 1704 + задача 2 из д/з