Занятие 12
Вычисление длины дуги и площади поверхности вращения

Теоретическое введение

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина s дуги гладкой кривой $y = f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти длину астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (рис. 49).

Решение. Дифференцируя уравнение астроиды, получим:

$$y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Поэтому для длины дуги одной четверти астроиды имеем:

$$\frac{1}{4}s=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=\frac{3}{2}a.$$

Отсюда $s=6a$.

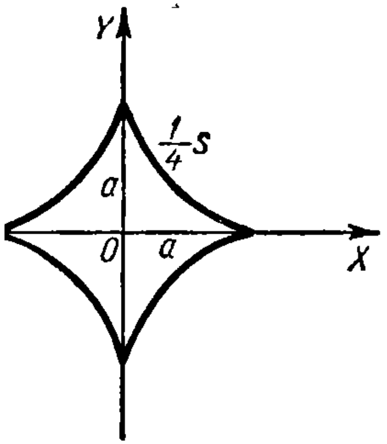


Рис. 49.

Теоретическое введение

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ ($\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции), то длина дуги s кривой равна

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

Примеры решения задач

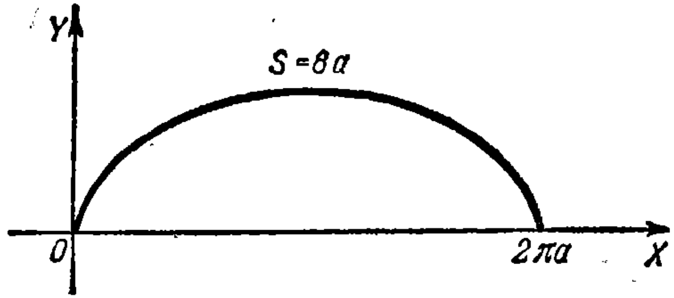


Рис. 50.

Пример 2. Найти длину одной арки циклоиды (рис. 50)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решение. Имеем $x' = \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ и $y' = \frac{dy}{dt} = a \sin t$. Поэтому

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

Пределы интегрирования $t_1 = 0$ и $t_2 = 2\pi$ соответствуют крайним точкам арки циклоиды.

Теоретическое введение

Если гладкая кривая задана уравнением $r = f(\varphi)$ в полярных координатах r и φ, то длина дуги s равна

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi,$$

где α и β — значения полярного угла в крайних точках дуги ($\alpha < \beta$).

Примеры решения задач

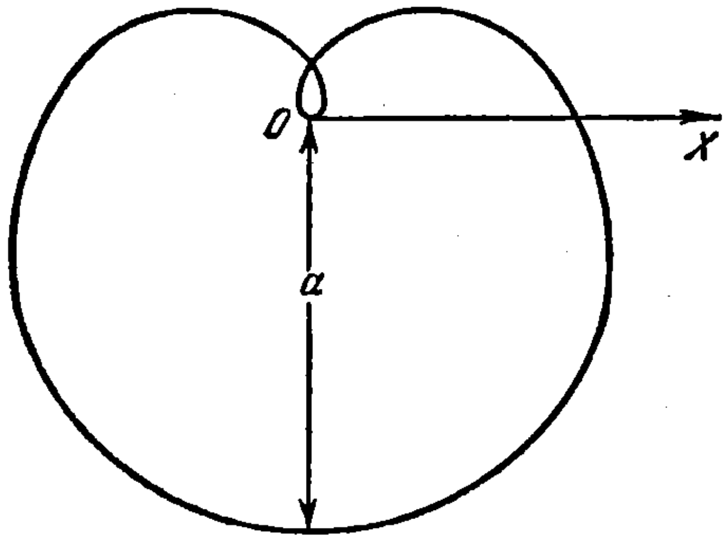


Рис. 51.

Пример 3. Найти длину всей кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (рис. 51). Вся кривая описывается точкой (r, φ) при изменении φ от 0 до 3π.

Решение. Имеем $r' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, поэтому длина всей кривой

$$s = \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

Решение задач

1665. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки с координатами $x = 4$, $y = 8$.

1667. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Решение задач

1665

$$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$2yy'=3x^2$$

$$y'=\frac{3x^2}{2y}$$

$$S=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9x^4}{4y^2}}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9x^4}{4x^3}}\,dx=$$

$$=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{3}{2}\int_0^4\sqrt{\frac{4}{9}+x}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^4\sqrt{\frac{4}{9}+x}\,d\left(x+\frac{4}{9}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}+x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4=$$

$$=\left(\frac{4}{9}+4\right)^{3/2}-\left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}=\sqrt{\frac{40^3}{9^3}}-\sqrt{\frac{4^3}{9^3}}=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

Решение задач

1667

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$s=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=\left\{\begin{array}{l} x=u^2 \quad dx=2u\,du \\ \sqrt{x}=u \\ x+1=u^2+1 \end{array}\right.$$

$$=\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx=$$

$$=\int_0^1 \frac{\sqrt{u^2+1}}{\cancel{u}}\,2\cancel{u}\,du=2\int_0^1 \sqrt{u^2+1}\,du=$$

$$=2\cdot\frac{u}{2}\sqrt{u^2+1}\Big|_0^1+2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|\Big|_0^1=$$

$$=\sqrt{2}+\ln\left|1+\sqrt{2}\right|-\ln 1=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$$

Решение задач

1669. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

Решение задач

1669 Найти дугу кривой

$y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + 1 = u^2 & u = \sqrt{x^2+1} \\ x^2 = u^2 - 1 & u_1 = \sqrt{3+1} = 2 \\ x = \sqrt{u^2 - 1} & u_2 = \sqrt{9} = 3 \\ dx = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} u\, du}{\sqrt{u^2-1}} & \end{array} \right.$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx =$$

Решение задач

$$= \int_2^3 \frac{u \cdot u \cdot du}{\sqrt{u^2-1}\cdot\sqrt{u^2-1}} = \int_2^3 \frac{\overset{= u^2-1+1}{u^2}\, du}{u^2-1} =$$

$$= \int_2^3 \frac{(u^2-1+1)\,du}{u^2-1} = \int_2^3 du + \int_2^3 \frac{du}{u^2-1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Решение задач

1676*. Найти длину дуги развертки окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t), \\ y &= a(\sin t - t\cos t) \end{aligned}\right\} \text{ от } t = 0 \text{ до } t = T.$$

1680. Найти всю длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение задач

1676 Найти длину дуги развертки окружности:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\cdot\sin t) \\ y &= a(\sin t - t\cdot\cos t) \end{aligned}\right\} \text{ от } t=0 \text{ до } t=T$$

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

$$x' = \cancel{-a\sin t} + \cancel{a\sin t} + at\cos t = at\cos t$$

$$y' = \cancel{a\cos t} - \cancel{a\cos t} + at\sin t = at\sin t$$

$$S=\int_0^T\sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^T\sqrt{a^2t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt =$$

$$=\int_0^T\sqrt{a^2t^2}\,dt = \int_0^T at\,dt = a\frac{t^2}{2}\Big|_0^T = a\frac{T^2}{2}$$

Решение задач

1680 Найти всю длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$$

$$r' = -a\sin\varphi$$

$$S = 2S_1 = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

Решение задач

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi =$$

$$= 8a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\frac{\varphi}{2} = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\sin\frac{\pi}{2} -$$

$$- 8a\sin 0 = 8a$$

Теоретическое введение

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги гладкой кривой $y=f(x)$ между точками $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, выражается формулой

$$S_X = 2\pi \int_a^b |y| \frac{ds}{dx} dx = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (1)$$

(ds — дифференциал дуги кривой).

В случае иного задания уравнения кривой площадь поверхности S_X получается из формулы (1) путем соответствующей замены переменных.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX петли кривой $9y^2 = x(3-x)^2$ (рис. 54).

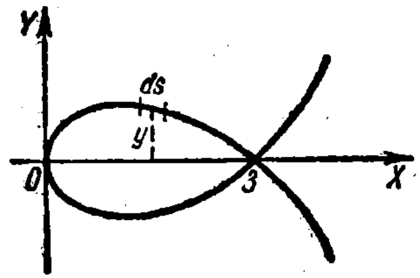


Рис. 54.

Решение. Для верхней части кривой при $0 \leqslant x \leqslant 3$ имеем: $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. Отсюда дифференциал дуги $ds = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$. На основании формулы (1) площадь поверхности

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\pi.$$

Примеры решения задач

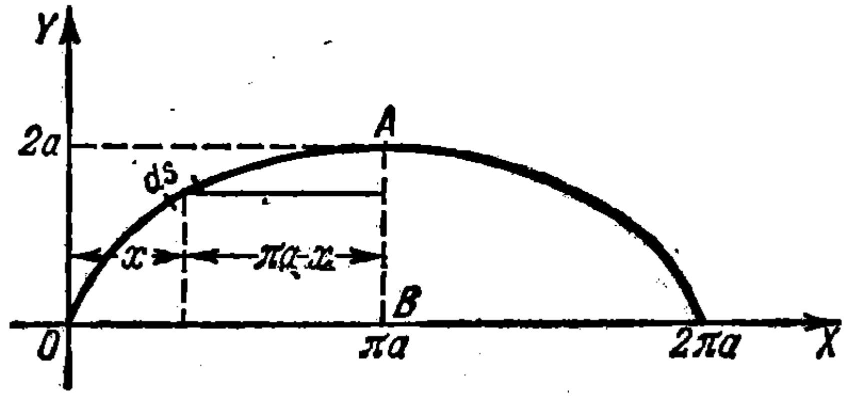


Рис. 55.

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ вокруг ее оси симметрии (рис. 55).

Решение. Искомая поверхность образуется вращением дуги OA вокруг прямой AB, уравнение которой $x=\pi a$. Принимая y за независимую переменную и учитывая, что ось вращения AB сдвинута относительно координатной оси OY на расстояние πa, будем иметь:

$$S=2\pi\int_0^{2a}(\pi a-x)\frac{ds}{dy}\cdot dy.$$

Примеры решения задач

Переходя к переменной t, получим:

$$S=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\sin t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\pi}\left(\pi\sin\frac{t}{2}-t\sin\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=4\pi a^2\left[-2\pi\cos\frac{t}{2}+2t\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2.$$

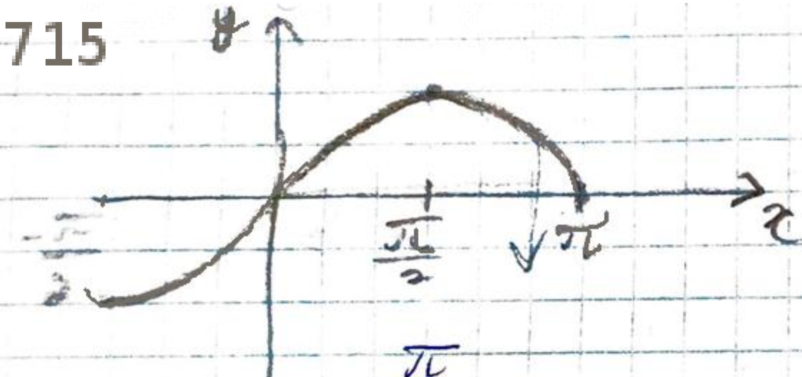
Решение задач

1715. Найти площадь поверхности «веретена», которое получается в результате вращения одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси OX.

1722. Найти площадь поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг: 1) оси OX; 2) оси OY $(a > b)$.

Решение задач

1715



$$S_x = 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |y|\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx =$$

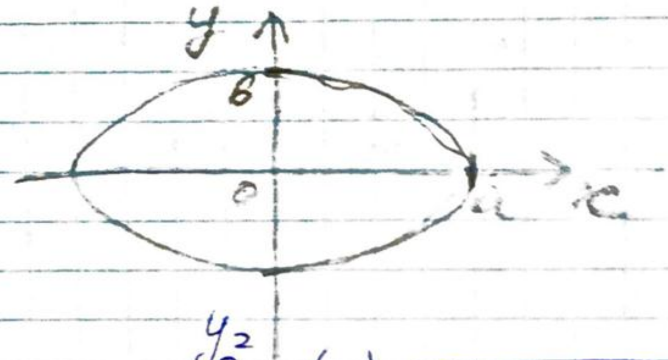
$$= -4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,d\cos x =$$

$$= -4\pi\left(\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right) = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right)$$

Решение задач

1722(2)



$$S_{Oy} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy, \quad y_1 < y_2$$

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$$

$$2xx' = -2y\frac{a^2}{b^2}$$

$$xx' = -\frac{a^2}{b^2}y$$

$$x\sqrt{1+(x')^2} = \sqrt{x^2+(xx')^2} = \sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{a^4}{b^4}y^2} =$$

$$= \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2+\frac{a^2}{b^2}y^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2}$$

Решение задач

$$S_{oy} = 2\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2}\,dy =$$

$$= 2\pi\frac{a}{b}\left[\frac{1}{2}\cdot y\cdot\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2}+\frac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2}\right)\right]_{-b}^{b} = 2\pi\frac{a}{b}\left[\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}b^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(-b)\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}b^2}\right]+\frac{2\pi a}{\cancel{b}}\cdot\frac{b^{\cancel{2}}}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\cdot b+\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cdot b^2}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}(-b)+\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cdot b^2}\right)\right]=$$

$$= 2\pi\frac{a}{\cancel{b}}\cdot\cancel{b}\sqrt{b^2+a^2-b^2}+\frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\left[\ln\left(\sqrt{a^2-b^2}+a\right)-\right.$$

$$\left.-\ln\left(-\sqrt{a^2-b^2}+a\right)\right] = 2\pi a^2+\frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$

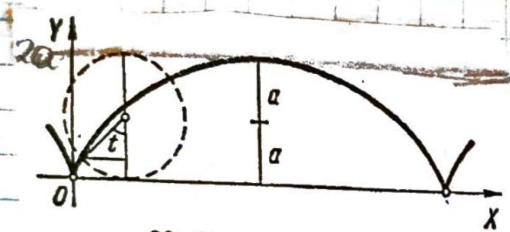
Решение задач

1723. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг: а) оси OX; б) оси OY; в) касательной к циклоиде в ее высшей точке.

1725. Определить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение задач

1723 в



26. Циклоида
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды

$x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$ вокруг касательной к циклоиде в её высшей точке.

Перейдём к новым координатам

$x_1 = x$; $y_1 = y - 2a$

$y_1 \le 0$ в новой системе координат.

$$\Rightarrow (S_{Ox_1}) = 2\pi \int_0^{2\pi} |y_1(t)| \sqrt{(x_1'(t))^2 + (y_1'(t))^2}\, dt =$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi} |a(1-\cos t) - 2a| \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a \sin t)^2}\, dt =$$

Решение задач

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

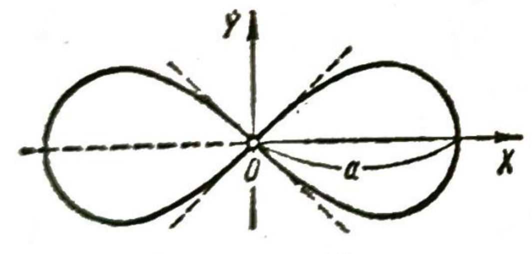
$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -32\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^2\frac{t}{2}\,d\cos\frac{t}{2} = \frac{32}{3}\pi a^2$$

Решение задач

1725

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi$$



25. Лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ или $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

$$r = \sqrt{2}\, a \sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$r' = \frac{a\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\cdot(-\sin 2\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{-a\sqrt{2}\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$r^2 + (r')^2 = 2a^2\cos 2\varphi + \frac{2a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{2a^2}{\cos 2\varphi}\left(\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi\right) = \frac{2a^2}{\cos 2\varphi}$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

Решение задач

В силу симметрии:

$$S = 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot \sin\varphi \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi = 8\pi a^2\left(-\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= 8\pi a^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = 4\pi a^2(2-\sqrt{2})$$

Домашнее задание

1666, 1670, 1678, 1679, 1722(а), 1723(б), 1726
+ задание 3 из ДЗ