Занятие 13

Подготовка к РК. Решение задач.

Вычисление площадей плоских фигур

1. Задачи на вычисление площадей плоских фигур *(3 балла)*

1.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x+4}$, $y = -\sqrt{x} + 2$ и осью Ox. Сделать чертёж.

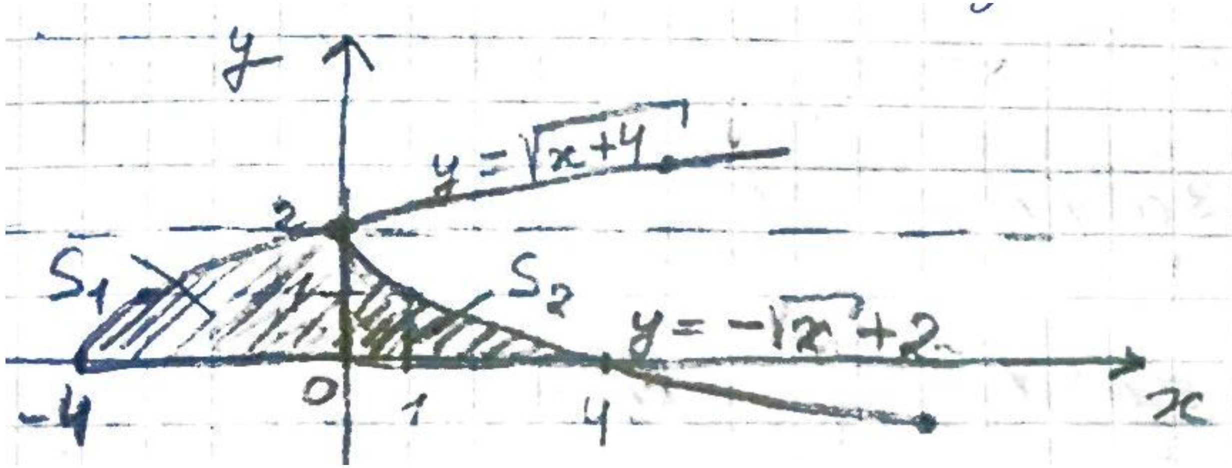
1.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Сделать чертёж.

1.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сделать чертёж.

Также см. презентацию к занятию 9, доп. задачи: 1628, 1629, 1635,1652, 1659, 1660, 1662.

Решение задач

1.1



$$S = S_1 + S_2 = \int_{-4}^{0}\sqrt{x+4}\,dx + \int_{0}^{4}(-\sqrt{x}+2)\,dx =$$

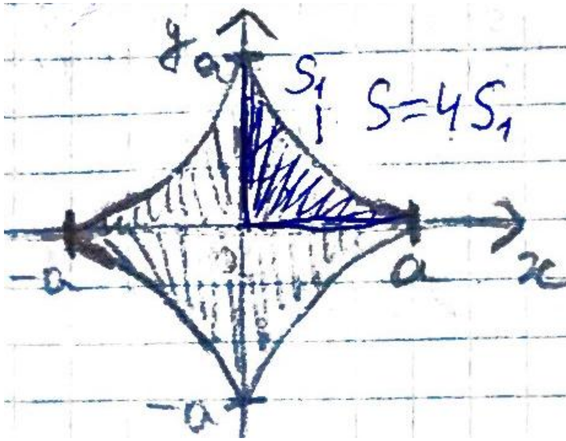
$$= \int_{-4}^{0}(x+4)^{1/2}d(x+4) - \int_{0}^{4}x^{1/2}dx + \int_{0}^{4}2\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}(x+4)^{3/2}\Big|_{-4}^{0} - \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_{0}^{4} + 2\cdot(4-0) =$$

$$= \frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{2}{3}4^{3/2} + 2\cdot 4 = 8$$

Решение задач

1.2



$S=4S_1$

$x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$x=a \Rightarrow t=0$

$$S_1=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)\,dt; \quad x=\varphi(t)=a\cos^3 t;$$

$$\varphi'(t)=3a\cos^2 t(-\sin t); \quad y=\psi(t)=a\sin^3 t$$

$$\psi(t)\cdot\varphi'(t)=-3a\cos^2 t\cdot\sin t\cdot(a\sin^3 t)=$$

$$=-3a^2\cos^2 t\sin^4 t=-3a^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\cdot\frac{1}{4}(1-\cos 2t)^2=$$

$$=-\frac{3a^2}{8}(1+\cos 2t)(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)=$$

Решение задач

$$= -\frac{3a^2}{8}\left(1+\cos 2t - 2\cos 2t - 2\cos^2 2t + \right.$$

$$\left. + \cos^2 2t + \cos^3 2t\right) = -\frac{3a^2}{8}\left(1 - \cos 2t - \right.$$

$$\left. - \cos^2 2t + \cos^3 2t\right) = -\frac{3a^2}{8}\left(1 - \cos 2t - \right.$$

$$\left. - (1+\cos 4t)\cdot\frac{1}{2} + (1-\sin^2 2t)\cos 2t\right) =$$

$$= -\frac{3a^2}{8}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\cos 2t} - \frac{\cos 4t}{2} + \cancel{\cos 2t} - \right.$$

$$\left. - \sin^2 2t \cos 2t\right) = -\frac{3a^2}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \sin^2 2t \cos 2t\right)$$

$$S = 4S_1 = 4\cdot\left(-\frac{3a^2}{8}\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \sin^2 2t\cos 2t\right)dt =$$

$$= -\frac{3}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}dt + \frac{3}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos 4t}{2}\cdot\frac{1}{4}\,d4t +$$

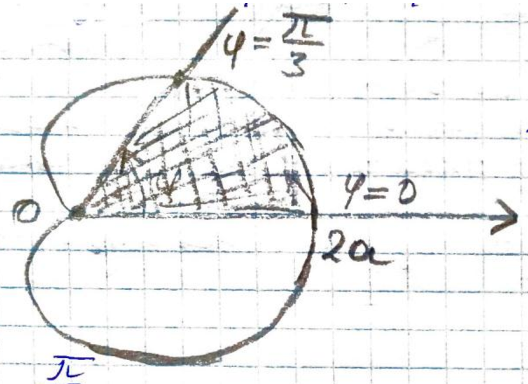
$$+ \frac{3}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 2t\cdot\frac{1}{2}\,d\sin 2t = 3a^2\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{3}{16}a^2\sin 4t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin^3 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{3\pi a^2}{8}$$

Решение задач

1.3



$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2d\varphi$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}4(1+\cos\varphi)^2d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\varphi)^2d\varphi$$

$$(1+\cos\varphi)^2=1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi=$$

$$=1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)=$$

$$=\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos2\varphi$$

$$\Rightarrow\quad S=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

Решение задач

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2\varphi\, d2\varphi =$$

$$= \pi + 4\cdot \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \pi + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi + \sqrt{3}\left(2 + \frac{1}{4}\right)$$

Вычисление объемов тел

2. Задачи на вычисление объёмов тел (*3 балла*)

2.1. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$. Сделать чертёж.

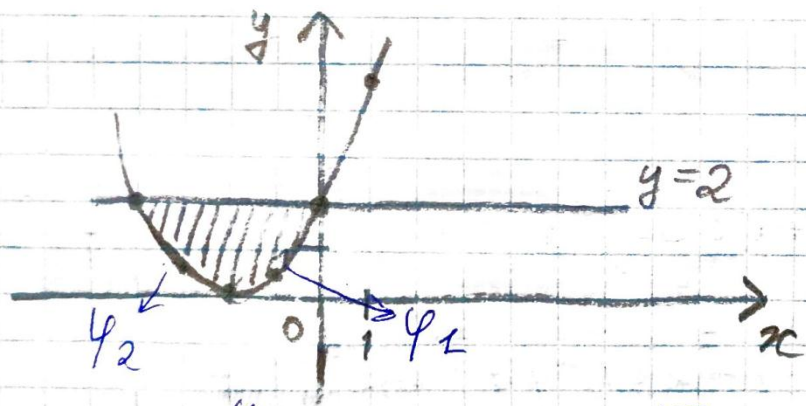
2.2. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a \ln t$ $(a > 0)$ и осями координат, вокруг оси Ox. Сделать чертёж.

2.3. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r = a \sin^2 \varphi$ вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

Также см. презентацию к занятию 11, доп. задачи: 1685, 1686, 1690, 1701(в)

Решение задач

2.1



$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} \left[\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y) \right] dy$$

Найдём $\varphi_2(y)$ и $\varphi_1(y)$

$$\frac{x^2}{2} + 2x + 2 = y$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2y$$

$$(x+2)^2 = 2y$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{2y}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{2y}$$

$$\varphi_2(y) = -2 - \sqrt{2y}$$

$$\varphi_1(y) = -2 + \sqrt{2y}$$

Решение задач

$$\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y)=\left(-2-\sqrt{2y}\right)^2-\left(-2+\sqrt{2y}\right)^2=$$

$$=\left(-2-\sqrt{2y}-2+\sqrt{2y}\right)\left(-2-\sqrt{2y}+2-\sqrt{2y}\right)=$$

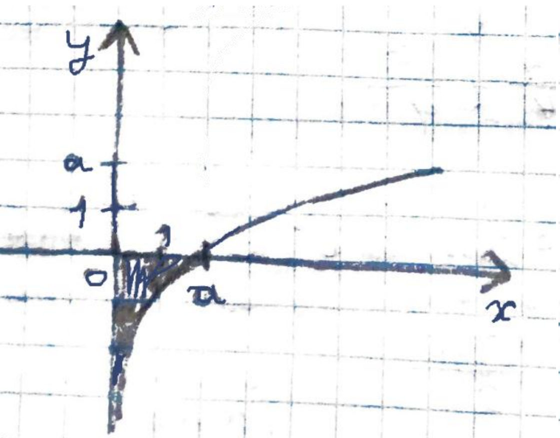
$$=-4\cdot\left(-2\sqrt{2y}\right)=8\sqrt{2y}$$

$$V_{0y}=\pi\int_0^2 8\sqrt{2}\sqrt{y}\,dy=8\pi\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^2=$$

$$=8\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\frac{64}{3}\pi$$

Решение задач

2.2



$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx \qquad \begin{array}{c|c} x=0 & x=a \\ t=0 & t=1 \end{array}$$

$$dx = x'(t)\,dt = 2at\,dt$$

$$V_x = \pi \int_0^1 a^2 \ln^2 t \, 2at\,dt = 2\pi a^3 \int_0^1 \ln^2 t \cdot t\,dt =$$

$$= 2\pi a^3 \lim_{b \to 0} \int_b^1 \ln^2 t \, t\,dt = \left\{ \begin{array}{l} dv = t\,dt; \quad v = \dfrac{t^2}{2} \\ u = \ln^2 t; \quad du = 2\ln t \cdot \dfrac{1}{t}\,dt \end{array} \right.$$

$$= 2\pi a^3 \lim_{b \to 0} \Big[\ln^2 t \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_b^1 -$$

$$- \int_b^1 \frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \ln t \, \frac{1}{\cancel{t}}\,dt \Big] = 2\pi a^3 \lim_{b \to 0} \Big[\ln^2 b \cdot \frac{b^2}{2} -$$

$$- \int_b^1 t \ln t\,dt \Big]$$

Решение задач

$$\int_b^1 t\ln t\,dt = \left\{\begin{array}{ll} dv = t\,dt & v = \frac{t^2}{2} \\ u = \ln t; & du = \frac{1}{t}\,dt \end{array}\right. =$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln t\Big|_b^1 - \int_b^1 \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot dt = -\frac{b^2}{2}\ln b - \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_b^1 =$$

$$= -\frac{b^2}{2}\ln b - \frac{1}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_x = 2\pi a^3 \lim_{b\to 0}\left[\ln^2 b\cdot\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2}\ln b + \frac{1}{4} - \frac{b^2}{4}\right] =$$

$$= 2\pi a^3\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi a^3}{2}$$

по правилу
лопиталя
считается
каждый

Решение задач

2.3

$$T_{пол.} = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3\sin^6\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3}a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)^3(-d\cos\varphi) = -\frac{2\pi}{3}a^3\int_0^{\pi}(1-3\cos^2\varphi+$$

$$+3\cos^4\varphi-\cos^6\varphi)\,d\cos\varphi = \left\{\begin{matrix}\cos\varphi = u\\ \cos\pi = -1\\ \cos 0 = 1\end{matrix}\right\} =$$

Кривая симметрична, $0 \le \varphi \le \pi$

$$= -\frac{2\pi}{3}a^3\int_1^{-1}(1-3u^2+3u^4-u^6)\,du =$$

$$= \frac{2\pi}{3}a^3\left[u\Big|_{-1}^{1} - 3\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{3}{5}u^5\Big|_{-1}^{1} - \frac{u^7}{7}\Big|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{3}a^3\left[2-2+\frac{6}{5}-\frac{2}{7}\right] = \frac{2\pi}{3}a^3\cdot\frac{42-10}{35} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}a^3\cdot\frac{32}{35} = \frac{64\pi a^3}{105}$$

Вычисление длин дуг и площадей поверхностей вращения

3. Задачи на вычисление длин дуг и площадей поверхностей вращения (*2 балла*)

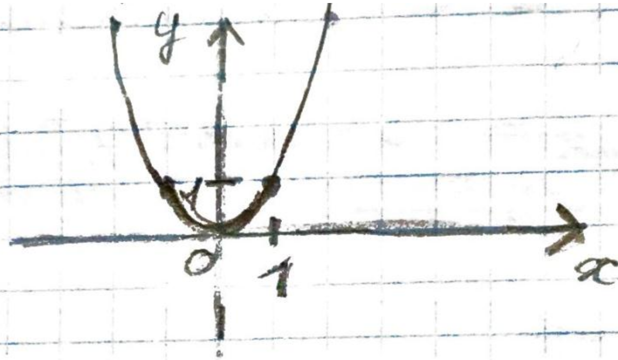
3.1. Найти длину дуги кривой $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$. Сделать чертёж.

3.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = 2\cos t$, $y = 4\sin t$. Сделать чертёж.

Также см. презентацию к занятию 12, доп. задачи: 1668, 1672, 1682, 1683, 1716, 1723(a), 1724

Решение задач

3.1.



$$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad y'=2x;\ a=-1;\ b=1$$

$$S=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx=$$

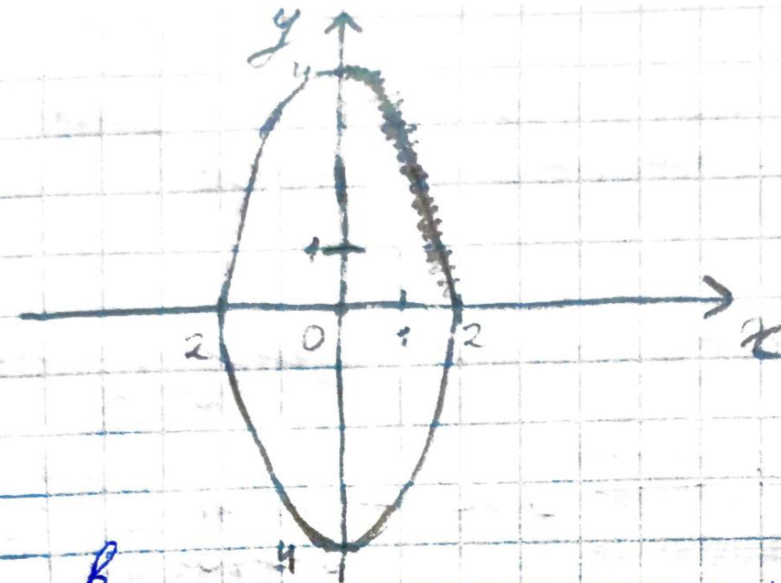
$$=2\cdot\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{4\cdot 2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{-1}^{1}\right]=$$

$$=2\cdot\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{8}\ln\left|1+\frac{\sqrt{5}}{4}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\ln\left|-1+\frac{\sqrt{5}}{4}\right|\right]=\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{5}-4}$$

Решение задач

3.2.



Фигура симметричная; $S = 2S_1$

$$S_1 = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$x'(t) = -2\sin t; \quad y'(t) = 4\cos t;$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4\sin^2 t + 16\cos^2 t =$$

$$= 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 12\cos^2 t = 4 + 12\cos^2 t$$

Решение задач

$$S_1 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |4\sin t| \sqrt{4+12\cos^2 t}\, dt =$$

$$= -8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+12\cos^2 t}\, d\cos t = \left\{ \begin{array}{l} \cos t = u \\ \cos 0 = 1 \\ \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -8\pi \int_1^0 2\cdot\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{1}{3} + u^2}\,du = 16\pi\sqrt{3} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{3}+u^2}\,du =$$

$$= 16\pi\sqrt{3} \left[\frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2+\frac{1}{3}}\,\Big|_0^1 + \frac{1}{6} \ln\left|u+\sqrt{u^2+\frac{1}{3}}\right|\,\Big|_0^1 \right] =$$

$$= 16\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{1}{6} \ln \frac{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} =$$

$$= 16\pi + \frac{1}{6}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов

4. Задачи исследования на сходимость несобственных интегралов *(2 балла)*

4.1. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}{x+3}\,dx$.

4.2. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+\cos x}\,dx$.

4.3. Исследовать на сходимость $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}}\,dx$.

4.4. Исследовать на сходимость $\int_0^{1} \frac{(x-1)}{x^3-3x+2}\,dx$.

4.5. При каких α интеграл сходится $\int_1^{2} \frac{x^{\frac{1}{5}}-1}{(e^{x^2}-e)^{\alpha}}\,dx$.

Также см. презентацию к занятию 10, доп. задачи: 1561,1565, 1564, 1568

Решение задач

4.1 $$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}{x+3}\,dx$$

При $x \to +\infty$ имеем:

$$\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}{x+3} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{\pi}{2}\int_1^{b}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{\pi}{2}\ln x\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{\pi}{2}\ln b - \frac{\pi}{2}\ln 1 = \frac{\pi}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\,dx$ – расходится $\Rightarrow$ исходный интеграл также расходится.

Решение задач

4.2

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+\cos x}\,dx$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+\cos x} \le \frac{x^2+x+1}{x^4+1}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+1} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} \sim \frac{1}{x^2}$$

при $x \to +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^{b} =$$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) + 1 = 1 \Rightarrow$ сходится

$\Rightarrow$ исходный интеграл сходится

Решение задач

4.3 Исследовать на сходимость

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{4/3}}dx$$

$$\frac{\sin x}{x^{4/3}} = \frac{1}{x^{1/3}} \cdot \frac{\sin x}{x} \sim \frac{1}{x^{1/3}}$$

при $x \to 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{1/3}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{1/3}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{0+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{2}(0+\varepsilon)^{2/3} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$$ – сходится

$\Rightarrow$ исходный интеграл сходится

Решение задач

(4.4) Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^3-3x+2}dx = \int_0^1 \frac{x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx = \left\{\begin{matrix}\text{по методу}\\ \text{неопр. к-}\\ \text{коэф-в}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(x-1)\Big|_0^{1-\varepsilon} - \frac{1}{3}\ln|x+2|\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(1-\varepsilon-1)}_{=-\infty} - \frac{1}{3}\underbrace{\ln(-1)}_{\text{не }\exists} - \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 2$$

$\Rightarrow$ интеграл расходится

Решение задач

4.5 При каких α интеграл сходится

$$\int_1^2 \frac{x^{1/5}-1}{(e^{x^2}-e)^\alpha}\,dx$$

на $[1;2]$

$$\frac{x^{1/5}-1}{(e^{x^2}-e)^\alpha} \le \frac{x}{(e^{x^2}-e)^\alpha} \le \frac{2x\cdot e^{x^2}}{(e^{x^2}-e)^\alpha}.$$

$$\int_1^2 \frac{2x\cdot e^{x^2}}{(e^{x^2}-e)^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{2x\cdot e^{x^2}}{(e^{x^2}-e)^\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(e^{x^2}-e)}{(e^{x^2}-e)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(e^{x^2}-e)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \frac{(e^4-e)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(e^{(1+\varepsilon)^2}-e)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

при $\alpha < 1$ интеграл сходится

$\Rightarrow$ при $\alpha < 1$ исходный интеграл сходится

Удачи в подготовке!