Занятие 15

ОДУ первого порядка, его решение

Теоретическое введение

1°. Основные понятия. Уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $y = y(x)$ — искомая функция, называется *дифференциальным уравнением n-го порядка*. Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется *решением* этого уравнения, а график этой функции — *интегральной кривой*. Если решение задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно обычно называется *интегралом* уравнения (1).

Пример 1. Проверить, что функция $y = \sin x$ является решением уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Решение. Имеем:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x$$

и, следовательно,

$$y'' + y = -\sin x + \sin x \equiv 0.$$

Теоретическое введение

Интеграл

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \qquad (2)$$

дифференциального уравнения (1), содержащий n независимых произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$ и эквивалентный (в данной области) уравнению (1), называется *общим интегралом* этого уравнения (в соответствующей области). Придавая в соотношении (2) постоянным $C_1, \ldots, C_n$ определенные значения, получаем *частный интеграл* уравнения (1).

Обратно, имея семейство кривых (2) и исключая параметры $C_1, \ldots, C_n$ из системы уравнений

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \ \ldots, \ \frac{d^n\Phi}{dx^n} = 0,$$

получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение вида (1), общим интегралом которого в соответствующей области является соотношение (2).

Теоретическое введение

Пример 2. Найти дифференциальное уравнение семейства парабол

$$y = C_1 (x - C_2)^2. \tag{3}$$

Решение. Дифференцируя два раза уравнение (3), будем иметь:

$$y' = 2C_1 (x - C_2) \quad \text{и} \quad y'' = 2C_1. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (3) и (4) параметры C_1 и C_2, получим искомое дифференциальное уравнение

$$2yy'' = y'^2.$$

Легко проверить, что функция (3) обращает это уравнение в тождество.

Теоретическое введение

2°. Начальные условия. Если для искомого частного решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

где функция f определена в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, заданы *начальные условия* (*задача Коши*)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

и известно *общее решение* уравнения (5)

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

то произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ определяются, если это возможно, из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\}$$

Решение задач

Выяснить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

2706. $(x+y)\,dx + x\,dy = 0, \quad y = \dfrac{C^2 - x^2}{2x}$.

Составить дифференциальные уравнения заданных семейств кривых (C, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные):

2719. $x^3 = C(x^2 - y^2)$.

Решение задач

$\underline{2706}$ $(x+y)\,dx + x\,dy = 0$

$$y = \frac{c^2 - x^2}{2x} = \frac{c^2}{2x} - \frac{x}{2}$$

$$y' = \frac{-c^2}{2x^2} - \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{c^2 - x^2}{2x}\right)dx + x \cdot \left(\frac{-c^2}{2x^2} - \frac{1}{2}\right)dx = 0$$

$$\frac{2x^2 + c^2 - x^2}{2x}\,dx - \left(\frac{c^2 \cancel{x}}{2x^{\cancel{2}}} + \frac{x}{2}\right)dx = 0$$

$$\frac{x^2 + c^2}{2x}\,dx - \left(\frac{c^2 + x^2}{2x}\right)dx = 0 \Rightarrow \text{является}$$

Решение задач

2719 $x^3 = C(x^2 - y^2)$

$$C = \frac{x^3}{x^2 - y^2}$$

$$3x^2 = 2Cx - 2Cyy'$$

$$3x^2 = (2x - 2yy') \cdot C$$

$$3\cancel{x^2} = \frac{x^{\cancel{3}}}{x^2 - y^2}(2x - 2yy')$$

$$3x^2 - 3y^2 = 2x^2 - 2xyy'$$

$$2xyy' = 3y^2 - x^2$$

Теоретическое введение

1°. Виды дифференциальных уравнений 1-го порядка. Дифференциальное уравнение 1-го порядка с неизвестной функцией y, разрешенное относительно производной y', имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — данная функция. В некоторых случаях выгодно за искомую функцию считать переменную x и записывать уравнение (1) в виде

$$x' = g(x, y), \tag{1'}$$

где $g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$.

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ и $x' = \frac{dx}{dy}$, дифференциальные уравнения (1) и (1′) можно записать в симметрической форме

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dx = 0, \tag{2}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — известные функции.

Под решениями уравнения (2) понимаются функции вида $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, удовлетворяющие этому уравнению. Общий интеграл уравнений (1) и (1′), или уравнения (2), имеет вид $\Phi(x, y, C) = 0$, где C — произвольная постоянная.

Теоретическое введение

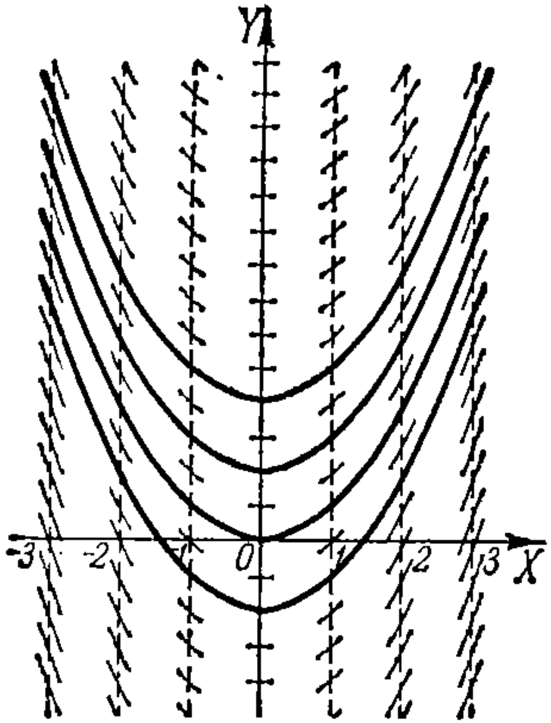


Рис. 105.

2°. Поле направлений. Совокупность направлений

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$$

называется *полем направлений* дифференциального уравнения (1) и обычно изображается при помощи системы черточек или стрелок с углом наклона α.

Кривые $f(x, y) = k$, в точках которых наклон поля имеет постоянное значение, равное k, называются *изоклинами*. Построив изоклины и поле направлений, в простейших случаях можно приближенно нарисовать поле интегральных кривых, рассматривая последние как кривые, которые в каждой своей точке имеют заданное направление поля.

Пример 1. Методом изоклин построить поле интегральных кривых уравнения

$$y' = x.$$

Решение. Построив изоклины $x = k$ (прямые линии) и поле направлений, приближенно получаем поле интегральных кривых (рис. 105). Общим решением является семейство парабол

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Решение задач

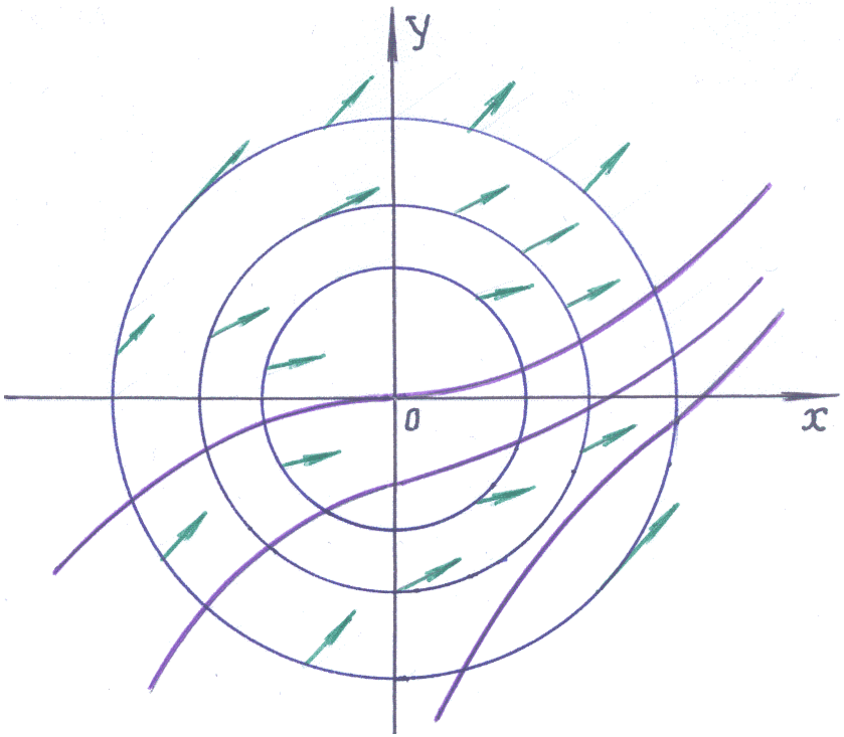
Методом изоклин построить приближенно поле интегральных кривых для указанных ниже дифференциальных уравнений:

2737. $y' = x^2 + y^2$.

$$y' = \left(y - x/4\right)^2$$

Решение задач

2737 $y' = x^2 + y^2$



При $k > 0$ ур-е изоклин для данного уравнения имеет вид

$$x^2 + y^2 = k,$$

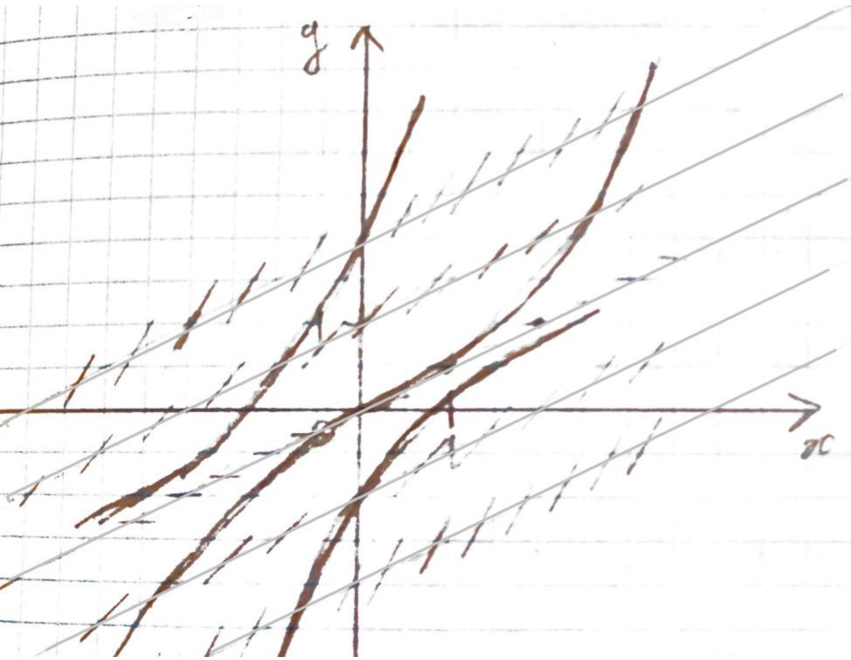
окр-ть с рад-м $\sqrt{k}$

$k_1 = \frac{1}{4}$; $R_1 = \frac{1}{2}$; $\alpha = 14$

$k_2 = \frac{1}{2}$; $R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\alpha = 26^\circ$

$k_3 = 1$; $R_3 = 1$; $\alpha = 45^\circ$

Решение задач



$$y' = \left(y - \frac{x}{2}\right)^2$$

$$\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 = k$$

$k = 0$ $\quad y = \frac{x}{2}$ $\quad \alpha = 0^\circ$

$k = 1$ $\quad y = \frac{x}{2} + 1$ $\quad \alpha = 45^\circ$

$y = \frac{x}{2} - 1$

$k = 2$ $\quad y = \frac{x}{2} + 2$ $\quad \alpha = 63^\circ$

$y = \frac{x}{2} - 2$

Теоретическое введение

1°. **Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.** Уравнением с *разделяющимися переменными* называется уравнение 1-го порядка вида

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{1}$$

или

$$X(x)\, Y(y)\, dx + X_1(x)\, Y_1(y)\, dy = 0. \tag{1'}$$

Разделив обе части уравнения (1) на $g(y)$ и умножив на dx, будем иметь

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx.$$

Отсюда, интегрируя, получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C. \tag{2}$$

Аналогично, разделив обе части уравнения (1′) на $X_1(x)\, Y(y)$ и проинтегрировав, получим общий интеграл уравнения (1′) в виде

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\, dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\, dy = C. \tag{2'}$$

Теоретическое введение

Если для некоторого значения $y=y_0$ мы имеем $g(y_0)=0$, то функция $y=y_0$ является также, как непосредственно легко убедиться, решением уравнения (1). Аналогично прямые $x=a$ и $y=b$ будут интегральными кривыми уравнения (1′), если a и b является соответственно корнями уравнений $X_1(x)=0$ и $Y(y)=0$, на левые части которых приходилось делить исходное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{3}$$

В частности, найти решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y(1)=2.$$

Решение. Уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Отсюда, разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теоретическое введение

и, следовательно,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

где произвольная постоянная $\ln C_1$ взята в логарифмическом виде. После потенцирования получим общее решение

$$y = \frac{C}{x}, \qquad (4)$$

где $C = \pm C_1$.

При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но последнее содержится в формуле (4) при $C = 0$.

Используя заданное начальное условие, получим $C = 2$, и, следовательно, искомое частное решение есть

$$y = \frac{2}{x}.$$

Решение задач

Решить дифференциальные уравнения:

2742. $\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0.$

2744. $xyy' = 1 - x^2.$

Решение задач

2742 $\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0 \Big| : \sin^2 y \cdot \cos^2 x \ne 0$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx + \frac{\operatorname{ctg} y}{\sin^2 y} dy = 0$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\operatorname{ctg} y}{\sin^2 y} dy = C$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{ctg}^2 y}{2} = C$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = C$$

$$\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$$

Решение задач

2744 $xyy' = 1 - x^2$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \quad \Big| \cdot dx$$

$$xy \cdot dy = (1 - x^2)\,dx \quad \Big| : x \neq 0$$

$$y \cdot dy = \frac{1 - x^2}{x}\,dx$$

$$y\,dy = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

$$\int y\,dy = \int\left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = 2\ln|x| + \ln C$$

$$x^2 + y^2 = \ln Cx^2$$

Решение задач

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

2748. $(1+e^x)\cdot y\cdot y'=e^x;\ y=1$ при $x=0$.

2750. $y'\sin x=y\ln y;\ y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение задач

2748

$$(1+e^x)\,y\frac{dy}{dx}=e^x$$

$$(1+e^x)\,y\,dy=e^x\,dx$$

$$y\,dy=\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\int y\,dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+\ln C$$

$$y^2=\ln(1+e^x)^2+\ln C$$

$$y^2=\ln\left(C(1+e^x)^2\right)$$

общее решение

$$y(0)=1$$

$$1^2=\ln\left(C(1+e^0)^2\right)$$

$$1=\ln 4C$$

$$4C=e$$

$$C=\frac{e}{4}\Rightarrow y^2=\ln\left(\frac{e}{4}(1+e^x)^2\right)$$

частное решение

Решение задач

<u>2750</u> $y' \sin x = y \ln y, \quad y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y$$

$$\sin x \, dy = y \ln y \, dx$$

$$\frac{dy}{y \cdot \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

$$\int \frac{d \ln y}{\ln y} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int \frac{-d\left(\cos \frac{x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{d\left(\sin \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

Решение задач

$$\ln|\ln y| = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + \ln C$$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + \ln C$$

$\ln y = C\cdot\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ – общее решение (общий интеграл)

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\ln 1 = C\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$$

$0 = C \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = 1$

частное решение (частный интеграл)

Решение задач

2°. **Некоторые дифференциальные уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.** Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c) \quad (b \neq 0)$$

приводятся к уравнениям вида (1) при помощи замены $u = ax + by + c$, где u — новая искомая функция.

Решить дифференциальные уравнения, использовав замену переменных:

2752. $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

Решение задач

<u>2752</u> $y' = (8x + 2y + 1)^2$

$u = 8x + 2y + 1$

$u' = 8 + 2y'$

$y' = \frac{u' - 8}{2}$

$\frac{u' - 8}{2} = u^2$

$u' - 8 = 2u^2$

$u' = 2(u^2 + 4)$

$\frac{du}{dx} = 2(u^2 + 4)$

$\frac{du}{u^2 + 4} = 2dx$

$\int \frac{du}{u^2 + 4} = 2\int dx$

$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} = 2x + C$

$\operatorname{arctg} \frac{u}{2} = 4x + C$

$\frac{u}{2} = \operatorname{tg}(4x + C)$

$u = 2\operatorname{tg}(4x + C)$

$8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}(4x + C)$

общее решение. (общий интеграл)

Теоретическое введение

1°. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового измерения. Уравнение (1) может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

и при помощи подстановки $y = xu$, где u — новая неизвестная функция, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Можно также применять подстановку $x = yu$.

Теоретическое введение

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Решение. Полагаем $y = ux$; тогда $u + xu' = e^u + u$ или

$$e^{-u}du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $u = -\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|$, откуда

$$y = -x\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Теоретическое введение

2°. **Уравнения, приводящиеся к однородным.** Если

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (2)$$

и $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, полагая в уравнении (2) $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где постоянные α и β определяются из системы уравнений

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \; a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0,$$

получим однородное дифференциальное уравнение относительно переменных u и v. Если $\delta = 0$, то, полагая в уравнении (2) $a_1x + b_1y = u$, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Решение задач

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

2770. $(x-y)\,y\,dx - x^2\,dy = 0.$

2772. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0.$

2775. Найти частное решение уравнения $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ из условия, что $y = 1$ при $x = 2$.

Решение задач

$\underline{2770}$ $(x-y)y\,dx - x^2 dy = 0 \;/ : x^2 \neq 0$

$$\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}dx - dy = 0$$

$$dy = \left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$

$$y' = \left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$

Подстановка: $y = xu$

$$y' = u + xu'$$

$$u + xu' = (1-u)u$$

$$u + xu' = u - u^2$$

$$xu' = -u^2$$

Решение задач

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$$

$$\frac{1}{u} = \ln Cx$$

$$\frac{x}{y} = \ln Cx$$

$$Cx = e^{\frac{x}{y}}$$

$$x = C e^{\frac{x}{y}}$$

общее решение.

Решение задач

2772 $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0 \;|\, : x \neq 0$

$$\frac{y}{x}dx + \left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right)dy = 0$$

$$\frac{y}{x} + \left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right)y' = 0$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$y = xu, \quad u = \frac{y}{x}$$

$$y' = u + xu'$$

$$u + xu' = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}}$$

$$xu' = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}} - u$$

$$xu' = \frac{2u\sqrt{u}}{1 - 2\sqrt{u}}$$

$$\frac{1 - 2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}du = \frac{dx}{x}$$

Решение задач

$$\int \frac{1-2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u}} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$C - \frac{1}{\sqrt{u}} - \ln|u| = \ln|x|$$

$$\ln|ux| = C - \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$\ln|y| = C - \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$$

общее решение.

Решение задач

$\underline{2775}$ $(x^2-3y^2)dx+2xy\,dy=0$

$y=1$ при $x=2$ $\quad (y(2)=1$

$$\left(1-3\cdot\frac{y^2}{x^2}\right)dx+2\frac{y}{x}dy=0$$

$$2\frac{y}{x}\cdot y'=3\frac{y^2}{x^2}-1$$

$y=xu$; $u=\dfrac{y}{x}$

$y'=u+xu'$

$$2u(u+xu')=3u^2-1$$

$$2uxu'=u^2-1$$

$$2ux\frac{du}{dx}=u^2-1$$

Решение задач

$$\frac{2u}{u^2-1}du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(u^2-1) = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln(u^2-1) = \ln Cx$$

$$u^2-1 = Cx$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = Cx$$

$$y^2 - x^2 = Cx^3$$

$$y^2 = Cx^3 + x^2$$

общее решение

$$y(2) = 1$$

$$1 = 8C + 4$$

$$C = -\frac{8}{3}$$

$$y^2 = x^2 - \frac{3}{8}x^3$$

$$y^2 = x^2\left(1 - \frac{3}{8}x\right)$$

частное решение

Домашнее задание

- 2709, 2720, 2736,
- $y' = -\sqrt{y - 2x}$ (решить методом изоклин),
- 2743,2745, 2747, 2769, 2771, 2773