Занятия 16. Интегрирование линейных ОДУ первого порядка и уравнений Бернулли. Подготовка к КР.

Литература

- Белова Т.И., Грешилов А.А., Пелевина А.Ф. Дифференциальные уравнения первого порядка. Метод. указания по курсу «Высшая математика» – М.: Изд-во МГТУ, 1989. – 32 с.
- Белова Т.И., Грешилов А.А., Пелевина А.Ф. Дифференциальные уравнения высших порядков. Метод. указания по курсу «Высшая математика» – М.: Изд-во МГТУ, 1990. – 36 с.
- Богомолов В.Г., Кандаурова И.Е., Шишкина С.И. Дифференциальные уравнения первого порядка. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 37 с.
- Пелевина И.Н., Раров Н.Н., Филиновский А.В. Дифференциальные уравнения высших порядков. Методические указания для выполнения домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 38 с.

Теоретическое введение

1°. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x) \tag{1}$$

1-й степени относительно y и y' называется *линейным*.

Если функция $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$y' + P(x)\,y = 0 \tag{2}$$

и называется *однородным линейным* дифференциальным уравнением. В этом случае переменные разделяются и общее решение уравнения (2) есть

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}. \tag{3}$$

Теоретическое введение

Для решения неоднородного линейного уравнения (1) применяем так называемый метод *вариации произвольной постоянной*; этот метод состоит в том, что сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения, т. е. соотношение (3). Затем, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищем решение неоднородного уравнения (1) в виде (3). Для этого подставляем в уравнение (1) y и y', определяемые из (3), и из полученного дифференциального уравнения определяем функцию $C(x)$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (1) получаем в виде

$$y = C(x)\, e^{-\int P(x)\, dx}.$$

Теоретическое введение

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \cos x. \tag{4}$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение есть

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

Решая его, получим:

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Считая C функцией от x, дифференцируя, находим:

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C.$$

Теоретическое введение

Подставляя y и y' в уравнение (4), получим:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C = \operatorname{tg} x \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x, \text{ или } \frac{dC}{dx} = \cos^2 x,$$

откуда

$$C(x) = \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Теоретическое введение

Для решения линейного уравнения (1) можно также применить подстановку

$$y = uv, \tag{5}$$

где u и v — неизвестные функции от x. Тогда уравнение (1) примет вид

$$[u' + P(x)u]v + v'u = Q(x). \tag{6}$$

Если потребовать, чтобы

$$u' + P(x)u = 0, \tag{7}$$

то из (7) найдем u, затем из (6) найдем v, а следовательно, из (5) найдем y.

Теоретическое введение

2°. Уравнение Бернулли. Уравнение 1-го порядка вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha},$$

где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-\alpha}$. Можно также непосредственно применять подстановку $y = uv$ или метод вариации произвольной постоянной.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{4}{x}\,y + x\sqrt{y}\,.$$

Решение. Это — уравнение Бернулли $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$. Полагая

$$y = uv,$$

получим:

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}\,uv + x\sqrt{uv} \text{ или } v\left(u' - \frac{4}{x}\,u\right) + v'u = x\sqrt{uv}\,. \qquad (8)$$

Теоретическое введение

Для определения функции u потребуем выполнения соотношения

$$u' - \frac{4}{x} u = 0,$$

откуда

$$u = x^4.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим:

$$v' x^4 = x \sqrt{v x^4},$$

отсюда находим v:

$$v = \left(\frac{1}{2} \ln |x| + C \right)^2,$$

и, следовательно, общее решение получим в виде

$$y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln |x| + C \right)^2.$$

Решение задач

Найти общие интегралы уравнений:

2785. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$

2787*. $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)\,dy.$

Решение задач

2785 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x;\ y'-\frac{1}{x}y=x$

1) $y'-\frac{1}{x}y=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$

$\ln|y|=\ln|x|+\ln C$

$y_{oo}=C\cdot x$

2) $y_{oн}=C(x)x$

$y'=C'(x)x+C(x)$

Подставим в $y'-\frac{1}{x}y=x$

$C'(x)x+C(x)-\frac{C(x)\cdot x}{x}=x$

$C'(x)x=x \quad |:x\neq 0$

$C'(x)=1$

$C(x)=\int 1\,dx=x+C$

Подставим

3) $y_{oн}=(x+C)x=x^2+Cx$

Решение задач

2787 $(1+y^2)dx=(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{1+y^2}\cdot\sin y - xy}{1+y^2}$$

1) $$x'+\frac{y}{1+y^2}x=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$$

Метод вариации:

$$x'+\frac{y}{1+y^2}x=0$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{y}{1+y^2}x=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{y\,dy}{1+y^2}=0$$

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln c$$

$$x\sqrt{1+y^2}=c$$

$$\Rightarrow x_{oo}=\frac{c}{\sqrt{1+y^2}}$$

Решение задач

2) $x_{\text{он}} = \dfrac{C(y)}{\sqrt{1+y^2}}$

$$x' = \frac{C'(y)\sqrt{1+y^2} - C(y)\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2} =$$

$$= \frac{C'(y)(1+y^2) - yC(y)}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}$$

Подставляем.

$$\frac{C'(y)}{\sqrt{1+y^2}} - \cancel{\frac{yC(y)}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}} + \cancel{\frac{yC(y)}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$\Rightarrow C'(y) = \sin y$

$C(y) = \int \sin y\, dy$

$C(y) = -\cos y + C$

3) $x_{\text{он}} = \dfrac{C - \cos y}{\sqrt{1+y^2}}$

$x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C$

общий интеграл Д.У

Решение задач

Найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям:

2789. $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ при $x = a$.

2791. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; $y = 0$ при $x = 0$.

Решение задач

2789 $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ при $x = a$.

$y = uv$; $y' = u'v + uv'$

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^x}{x}$

$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{e^x}{x}$

$$\begin{cases} u' + \frac{u}{x} = 0 \\ uv' = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

1) $u' = -\frac{u}{x}$

$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$

$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$

$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|u| = -\ln|x|$

$u = \frac{1}{x}$

2) $\frac{1}{x} v' = \frac{e^x}{x}$

$v' = e^x$

$v = \int e^x dx$

$v = e^x + c$

3) $y = u \cdot v$

$y = \frac{e^x + c}{x}$

общее решение

Решение задач

Найдём частное решение.

$y = b$ при $x = a$

$$b = \frac{e^a + C}{a}$$

$$ab = e^a + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = ab - e^a$$

$$y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$$

частное решение

Решение задач

<u>2791</u> $y' - y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0)=0$

1) $y' - y\,tg\,x = 0$

$\frac{dy}{dx} - y\,tg\,x = 0$

$\frac{dy}{y} - tg\,x\,dx = 0$

$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = C$

$\ln|y| + \ln|\cos x| = \ln C$

$y \cdot \cos x = C$

$y_{oo} = \frac{C}{\cos x}$

2) $y_{oн} = \frac{C(x)}{\cos x}$

$y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$

Решение задач

Подставляем

$$\frac{c'(x)}{\cos x}+\frac{c(x)\sin x}{\cos^2 x}-\frac{c(x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

$$c'(x)=1$$

$$c(x)=\int dx$$

$$c(x)=x+C$$

3). $y_{он}=\dfrac{x+C}{\cos x}$

общее решение

4). $y(0)=0 \Rightarrow$

$$0=\frac{0+C}{\cos 0}$$

$$C=0$$

$$y_{чн}=\frac{x}{\cos x}$$

частное решение

Решение задач

Найти общие решения уравнений:

2793. $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0.$

2794. $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0.$

Решение задач

2793 $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0 \;/ : 2xy\neq 0$

$$y'-\frac{y}{2x}=-\frac{1}{2}y^{-1}.$$

уравнение Бернулли $(n=-1)$

Метод Бернулли: $y=uv$

$$y'=u'v+uv'$$

$$u'v+uv'-\frac{uv}{2x}=-\frac{1}{2uv}$$

$$v\left(u'-\frac{u}{2x}\right)+uv'=-\frac{1}{2uv}$$

$$\begin{cases} u'-\dfrac{u}{2x}=0 \\ uv'=-\dfrac{1}{2uv} \end{cases}$$

Решение задач

1) $\frac{du}{dx} - \frac{u}{2x} = 0$

$\frac{du}{u} - \frac{dx}{2x} = 0$

$\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = C \; (C=0)$

$\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|x| = 0$

$u = \sqrt{x}$

2) $\sqrt{x}\, v' = -\frac{1}{2\sqrt{x}\, v}$

$v' = -\frac{1}{2xv}$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2xv}$

$\int v\,dv + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = C$

$\frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x| = C$

$v^2 = \ln\frac{C}{x}$

3) $y^2 = u^2 v^2$

$y^2 = x \ln\frac{C}{x}$

общий интеграл

Решение задач

2794 $y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0$

$$y\frac{dx}{dy} + x - \frac{1}{2}x^3 y = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}x^3$$

$$x' + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}x^3$$

ур-е Бернулли

$n = 3$

$$\frac{x'}{x^3} + \frac{1}{x^2 y} = \frac{1}{2}$$

Заменим $z = x^{1-3} = \frac{1}{x^2}$

$$z' = -\frac{2}{x^3}\cdot x'$$

$$-\frac{1}{2}z' + \frac{z}{y} = \frac{1}{2}$$

$$z' - \frac{2z}{y} = -1$$

$$z' - \frac{2z}{y} = 0$$

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} = 0$$

Решение задач

$$\int\frac{dz}{z}-2\int\frac{dy}{y}=C$$

$$\ln|z|-2\ln|y|=\ln C$$

$$\frac{z}{y^2}=C\Rightarrow z=Cy^2$$

$$z(y)=C(y)y^2$$

$$z'=C'(y)y^2+2yC(y)$$

$$C'(y)y^2+\cancel{2yC(y)}-\cancel{2yC(y)}=-1$$

$$C'(y)=-\frac{1}{y^2}$$

$$C(y)=\frac{1}{y}+C$$

$$z=\left(\frac{1}{y}+C\right)y^2=y+Cy^2$$

$$x^2=\frac{1}{z}$$

$$x^2=\frac{1}{y+Cy^2}$$

общий интеграл.

Задания для подготовки к КР2

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2020, ИиДУ, КР2 «Дифференциальные уравнения 1-го порядка»

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0;$ *(3 балла)*

2. $(y^4 + 2x)y' = y.$ *(3 балла)*

Классифицировать каждое из уравнений и решить задачу Коши:

3. $2y' \operatorname{ctg} x - 4y = -y^2 \sin 2x, \quad y(0) = 1;$ *(3 балла)*

4. $(3x^2 - y^2)\, dy = 2xy\, dx, \quad y(2) = 1.$ *(3 балла)*

$\min = 7, \max = 12$

Виды дифференциальных уравнений 1-го порядка

- С разделяющимися переменными
- Однородное д.у.
- Линейное д.у.
- Уравнение Бернулли

Решение задач

1. $$\frac{dx}{x(y-1)}+\frac{dy}{y(x+2)}=0$$ $x\neq 0$; $y\neq 1$; $y\neq 0$; $x\neq -2$

$$\frac{dy}{y(x+2)}=-\frac{dx}{x(y-1)}$$

ур-е с разделяющимися переменными

$$dy\cdot\frac{y-1}{y}+\frac{x+2}{x}dx=0$$

$$\int\frac{y-1}{y}dy+\int\frac{x+2}{x}dx=0$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy+\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=C$$

$$y-\ln|y|+x+2\ln|x|=C$$

общий интеграл

Решение задач

② $(y^4+2x)y'=y \,|:y\neq 0$

$$\frac{y^4+2x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dx}{dy}=y^3+\frac{2}{y}x$$

$$x'-\frac{2}{y}x=y^3$$

линейное отн-но x и x'

$$x=u(y)v(y)$$

$$x'=u'v+uv'$$

$$u'v+uv'-\frac{2}{y}uv=y^3$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2}{y}v\right)=y^3$$

$$\begin{cases} v'-\frac{2}{y}v=0 \\ u'v=y^3 \end{cases}$$

1) $v'-\frac{2v}{y}=0$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{2v}{y}$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dy}{y}$$

$$\ln v=\ln y^2$$

$$v=y^2$$

2) $u'v=y^3$

$$\frac{du}{dy}y^2=y^3$$

$$du=y\,dy$$

$$\int du=\int y\,dy$$

$$u=\frac{y^2}{2}+C$$

Решение задач

3) $x = u(y)v(y)$

$$x = \left(\frac{y^2}{2} + c\right) y^2$$

Делили на $y \neq 0$.

Проверим $y = 0$

$$(y^4 + 2x)y' = y$$

$$(0 + 2x)\cdot 0 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

$\Downarrow$

$y = 0$ – решение

Ответ: $x = \left(\frac{y^2}{2} + c\right) y^2$; $y = 0$

Решение задач

③. Решить задачу Коши

$2y'\operatorname{ctg} x - 4y = -y^2 \sin 2x$, $y(0)=1$

делим на $2\operatorname{ctg} x \neq 0$

$$y' - \frac{2}{\operatorname{ctg} x}\cdot y = -\frac{2\sin x\cdot\cos x}{2\frac{\cos x}{\sin x}}\cdot y^2$$

$$y' - \frac{2}{\operatorname{ctg} x}\cdot y = -\sin^2 x\cdot y^2$$

уравнение Бернулли относ-но y и y'; $n=2$

$y = u(x)v(x)$

$y' = u'(x)v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$$u'v + uv' - \frac{2}{\operatorname{ctg} x}uv = -\sin^2 x\, u^2v^2$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{\operatorname{ctg} x}v\right) = -\sin^2 x\cdot u^2v^2$$

Решение задач

$$\begin{cases} V' - \dfrac{2V}{ctg\,x} = 0 \\ u'V = -\sin^2 x \cdot u^2 \cdot V^2 \end{cases}$$

1) $V' - \dfrac{2V}{ctg\,x} = 0$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2V}{ctg\,x}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{2dx}{ctg\,x}$$

$$\int \frac{dV}{V} = 2\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$$

$$\ln V = -2\ln(\cos x)\ (c=0)$$

$$\ln V = \ln(\cos x)^{-2}$$

$$V = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2) $u' \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = -\sin^2 x \cdot u^2 \cdot \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

$$\frac{du}{dx} = -u^2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$-\frac{1}{u} = -\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int dx + C$$

$$-\frac{1}{u} = -tg\,x + x + C$$

$$\frac{1}{u} = tg\,x - x - C$$

$$u = \frac{1}{(tg\,x - x - C)}$$

Решение задач

3) $y = u(x)v(x)$

$$y = \frac{1}{(\operatorname{tg} x - x - c)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

общее решение

Задача Коши:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$1 = \frac{1}{(\operatorname{tg} 0 - 0 - c)\cos^2 0}$$

$$1 = \frac{1}{-c \cdot 1}$$

$$c = -1$$

$$\boxed{y_{част.} = \frac{1}{(\operatorname{tg} x - x + 1)\cos^2 x}}$$

ответ.

Решение задач

4. $(3x^2-y^2)dy = 2xy\,dx;\quad (y(2)=1)$

однородное д. ур-е 1-го порядка

$x^2\left(3-\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 2xy \quad : x^2 \neq 0$

$\left(3-\frac{y^2}{x^2}\right)y' = \frac{2y}{x}$

$u(x) = \frac{y}{x}$

$(x \neq 0)$

$y = u(x)\cdot x$

$y' = u'(x)\cdot x + u(x)$

$(3-u^2)(u'x+u) = 2u$

Решение задач

$(3-u^2)\,x\frac{du}{dx}=u^3-u$

ур-е с раздел-ми перем-ми

делим на $(u^3-u)\neq 0,\ x\neq 0$

$\frac{3-u^2}{u^3-u}\,du=\frac{dx}{x}$

$\int\frac{3-u^2}{u(u^2-1)}\,du=\int\frac{dx}{x}$

По методу неопр. коэф-в:

$\int\frac{-3}{u}\,du+\int\frac{du}{u-1}+\int\frac{du}{u+1}=\int\frac{dx}{x}$

$-3\ln|u|+\ln|u-1|+\ln|u+1|=\ln|x|+\ln|c|$

$\ln\left|\frac{u^2-1}{u^3}\right|=\ln|cx|$

$\left|\frac{u^2-1}{u^3}\right|=|cx|$

$\frac{u^2-1}{u^3}=\pm cx$

Решение задач

$$\frac{u^2-1}{u^3}=c'x,\ c'=\pm c$$

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{\frac{y^3}{x^3}}=c'x$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x^3=c'xy^3$$

$$y^2x-x^3=c'xy^3$$

$$y^2-x^2=c'y^3$$

общий интеграл

Задача Коши:

$y(2)=1$

$x=2,\ y=1$

$1^2-2^2=c'\cdot 1^3$

$c'=-3$

$y^2-x^2=-3y^3$

$$\underbrace{3y^3+y^2-x^2=0}_{\text{ответ}}$$

Домашнее задание

- прорешать вариант 0(2) из подготовки
- 2786, 2790, 2792, 2795