Занятие 17. ОДУ высших порядков. Фундаментальная система решений.

Теоретическое введение

Дифференциальные уравнения высших порядков

1°. Случай непосредственного интегрирования. Если

$$y^{(n)} = f(x),$$

то

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int}_{n \text{ раз}} f(x)\, dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

2°. Случаи понижения порядка. 1) Если дифференциальное уравнение явно не содержит y, например,

$$F(x, y', y'') = 0,$$

то, полагая $y' = p$, получим уравнение порядка на единицу ниже

$$F(x, p, p') = 0.$$

Теоретическое введение

Пример 1. Найти частное решение уравнения

$$xy'' + y' + x = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$y = 0, \ y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

Решение. Полагая $y' = p$, имеем $y'' = p'$, откуда

$$xp' + p + x = 0.$$

Решая последнее уравнение как линейное относительно функции p, получим:

$$px = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

Теоретическое введение

Из условия $y' = p = 0$ при $x = 0$ имеем $0 = C_1 - 0$, т. е. $C_1 = 0$. Следовательно,

$$p = -\frac{x}{2}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

откуда, интегрируя еще раз, получим:

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

Полагая $y = 0$ при $x = 0$, находим $C_2 = 0$. Следовательно, искомое частное решение есть

$$y = -\frac{1}{4}x^2.$$

Теоретическое введение

2) Если дифференциальное уравнение явно не содержит x, например,

$$F(y,\ y',\ y'')=0,$$

то, полагая $y'=p$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение порядка на единицу ниже

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$yy''-y'^2=y^4$$

при условии $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

Решение. Полагаем $y'=p$, тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ и наше уравнение преобразуется в следующее:

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^4.$$

Теоретическое введение

Мы получили уравнение типа Бернулли относительно p (y считаем аргументом). Решая его, найдем:

$$p = \pm y\sqrt{C_1 + y^2}.$$

Из условия $y' = p = 0$ при $y = 1$ имеем $C_1 = -1$. Следовательно,

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2.$$

Полагая $y = 1$ и $x = 0$, получим $C_2 = 0$, откуда $\frac{1}{y} = \cos x$ или $y = \sec x$.

Решение задач

Непосредственное интегрирование

$$y''' = \sin x + \cos x$$

$$y'' = \int(\sin x + \cos x)\,dx$$

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1$$

$$y' = \int(-\cos x + \sin x + C_1)\,dx$$

$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$y = \cos x - \sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Решение задач

Решить уравнения:

2921. $yy'' - y'(1 + y') = 0.$

не содержит x

$y' = p(y), \quad y'' = p \cdot p'$

$y \cdot p \cdot p' - p(1+p) = 0$

$ypp' - p - p^2 = 0 \quad | : yp \neq 0$

$p' - \frac{p}{y} = \frac{1}{y}$

лин-е д.у. 1-го порядка

$p = uv$

$p' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = \frac{1}{y}$

$v\left(u' - \frac{u}{y}\right) + uv' = \frac{1}{y}$

$$\begin{cases} u' - \frac{u}{y} = 0 \\ uv' = \frac{1}{y} \end{cases}$$

Решение задач

1). $u' - \frac{u}{y} = 0$

$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y}$

$\ln|u| = \ln|y|$

$u = y$

2) $uv' = \frac{1}{y}$

$yv' = \frac{1}{y}$

$v' = \frac{1}{y^2}$

$v = -\frac{1}{y} + C_1$

$p = uv = y\left(C_1 - \frac{1}{y}\right) = C_1 y - 1$

$y' = C_1 y - 1$

$\frac{dy}{dx} = C_1 y - 1$

$\int \frac{dy}{C_1 y - 1} = \int dx$

$\frac{1}{C_1} \ln|C_1 y - 1| = x + C_2$

Решение задач

$$\ln|C_1 y - 1| = C_1 x + \overset{= C_2}{C_1 \cdot C_2}$$

$$C_1 y - 1 = e^{C_1 x + C_2}$$

$$C_1 y = C_2 e^{C_1 x} + 1$$

$$y = \overset{= C_2}{\frac{C_2}{C_1}} e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1} = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}$$

Решение задач

Решить уравнения:

2922. $y'' = -\frac{x}{y'}$.

2926. $xy''' + y'' = 1 + x$.

Решение задач

2922

$$y'' = -\frac{x}{y'}$$

не содержит y

$y' = p(x)$; $y'' = p'$,

$$p' = -\frac{x}{p}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{x}{p}$$

$$\int dp \cdot p = -\int x\,dx$$

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \,\Big|\cdot 2$$

$$p^2 + x^2 = C_1^2$$

$$p = \pm\sqrt{C_1^2 - x^2}$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - x^2}$$

Решение задач

$$I=\int\sqrt{c_1^2-x^2}\,dx = x\sqrt{c_1^2-x^2}+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c_1^2-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{c_1^2-x^2}-\int\frac{c_1^2-x^2-c_1^2}{\sqrt{c_1^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{c_1^2-x^2}-I+c_1^2\arcsin\frac{x}{c_1}$$

$$2I = x\sqrt{c_1^2-x^2}+c_1^2\arcsin\frac{x}{c_1}+c_2$$

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{c_1^2-x^2}+c_1^2\arcsin\frac{x}{c_1}\right)+c_2$$

$$y=\pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{c_1^2-x^2}+c_1^2\arcsin\frac{x}{c_1}\right)+c_2$$

Решение задач

2926. $xy''' + y'' = 1 + x$

$y'' = p(x)$; $y''' = p'$;

$xp' + p = 1 + x \mid : x \neq 0$

$$p' + \frac{p}{x} = \frac{1+x}{x}$$

лин. д.-у. 1-го порядка

$p = uv$; $p' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1+x}{x}$$

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = \frac{1+x}{x}$$

$$\begin{cases} u' + \dfrac{u}{x} = 0 \\ uv' = \dfrac{1+x}{x} \end{cases}$$

1). $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{u}{x}$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

$$u = \frac{1}{x}$$

2). $uv' = \dfrac{1+x}{x}$

$$\frac{1}{x} v' = \frac{1+x}{x}$$

$$v' = 1 + x$$

$$v = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$p = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)$$

$$p = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}$$

$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}$$

Решение задач

$$y' = \int\left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right)dx$$

$$y' = \frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln|x| + C_2$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x\ln x + x) + C_2 x + C_3 =$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x \ln x + \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_2''} x + C_3 =$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x \ln x + C_2 x + C_3$$

Решение задач

Найти общие интегралы уравнений:

2935. $yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0.$

Найти решения, удовлетворяющие указанным условиям:

2943. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0;$ $y = 1,$ $y' = 1$ при $x = 0.$

Решение задач

2935 $yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$

не содержит x

$y' = p(y)$; $y'' = p \cdot p'$

$y \cdot p \cdot p' + p^2 - p^3 \ln y = 0 \,/ : py \neq$

$$p' + \frac{p}{y} = \frac{p^2}{y} \ln y$$

ур-е Бернулли

$$\frac{p'}{p^2} + \frac{1}{py} = \frac{\ln y}{y}$$

$$z = p^{1-2} = \frac{1}{p},$$

$$z' = -\frac{1}{p^2} \cdot p'$$

$$-z' + \frac{z}{y} = \frac{\ln y}{y}$$

$$z' - \frac{z}{y} = -\frac{\ln y}{y}$$

лин. д.у. 1-го пор-ка

$$z' - \frac{z}{y} = 0$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|z| = \ln|y| + \ln C$$

$$z_{o.o} = Cy$$

Решение задач

$$z_{он} = c(y)\cdot y$$

$$z'_{он} = c'(y)y + c(y)$$

$$c'(y)y + \cancel{c(y)} - \cancel{c(y)} = -\frac{\ln y}{y}$$

$$c'(y)y = -\frac{\ln y}{y}$$

$$c'(y) = -\frac{\ln y}{y^2}$$

$$c(y) = -\int \frac{\ln y}{y^2}\,dy$$

$$-\int \frac{\ln y}{y^2}\,dy = \int \ln y\, d\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}\ln y - \int \frac{1}{y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{y}\ln y + \frac{1}{y} + C_1$$

$$\Rightarrow c(y) = \frac{1}{y}\ln y + \frac{1}{y} + C_1$$

$$z_{он} = y\left(\frac{1}{y}\ln y + \frac{1}{y} + C_1\right)$$

$$z_{о.н} = \ln y + 1 + C_1 y$$

$$\frac{1}{p} = \ln y + 1 + C_1 y$$

$$p = \frac{1}{\ln y + 1 + C_1 y}$$

Решение задач

$$y' = \frac{1}{1+\ln y + C_1 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\ln y + C_1 y}$$

$$dx = (1+\ln y + C_1 y)\,dy$$

$$\int dx = \int (1+\ln y + C_1 y)\,dy$$

$$x = y + y\ln y - \int y \cdot \frac{1}{y}\,dy + C_1\frac{y^2}{2} + C_2 =$$

$$= \cancel{y} + y\ln y - \cancel{y} + C_1 y^2 + C_2 = y\ln y + C_1 y^2 + C_2$$

Решение задач

2943 $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$

$y(0) = 1;\ y'(0) = 1$

не содержит x

$y' = p(y);\ y'' = p \cdot p'$

$y^2 + p^2 - 2y \cdot p \cdot p' = 0 \ \Big| : (-2yp \neq 0)$

$p' - \frac{p}{2y} = \frac{y}{2p}$

ур-е Бернулли $(n = -1)$

$pp' - \frac{p^2}{2y} = \frac{y}{2} \ \Big| \cdot 2$

$2pp' - \frac{p^2}{y} = y$

$z = p^{1+1} = p^2;\ z' = 2pp'$

$z' - \frac{z}{y} = y$

лин-е д. у. 1-го пор-ка

$z' - \frac{z}{y} = 0$

$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y}$

$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y}$

$\ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1|$

$z_{oo} = C_1 y$

Решение задач

$z_{он} = C_1(y)\, y$

$z'_{он} = C_1'(y)\, y + C_1(y)$

$C_1'(y)\, y + C_1(y) - C_1(y) = y$

$C_1'(y) = 1$

$C_1(y) = y + C_1$

$z_{он} = y(y + C_1) = y^2 + C_1 y$

$p^2 = y^2 + C_1 y$

$p = y'$

$1^2 = 1^2 + C_1$

$C_1 = 0 \Rightarrow p^2 = y^2$

$p = y$, т.к. $y(0) = 1$ и $y'(0) = 1$

$y' = y$

$\int \frac{dy}{dx} = y$

$\int \frac{dy}{y} = \int dx$

$\ln(y) = x + C_2$

$y = e^{x + C_2}$

$y = C_2 \cdot e^x$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_2 e^0$

$C_2 = 1$

$y = e^x$

частное решение

Теоретическое введение

1°. **Однородные уравнения.** Функции $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на (a, b), если существуют постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не все равные нулю, такие, что

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \equiv 0 \text{ при } a < x < b;$$

в противном случае данные функции называются *линейно независимыми.*

Общее решение *однородного линейного* дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения (1) (*фундаментальная система решений*).

Теоретическое введение

Если система функций $y_1, \ldots, y_n$, заданных на промежутке I, состоит из $n-1$ раз дифференцируемых функций, то определителем Вронского (вронскианом) этой системы функций называют определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} .$$

Теорема (об определителе Вронского линейно зависимой системы функций). Если система $n-1$ раз дифференцируемых на промежутке I функций $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю.

Теорема (об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка). Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимая система решений уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 , \tag{3}$$

где $a_1 = a_1(x), \ldots, a_n = a_n(x)$ – функции, непрерывные на промежутке I. Тогда определитель Вронского этой системы решений не равен нулю ни в одной точке промежутка I.

Теоретическое введение

1°. Однородное уравнение. Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами p и q без правой части имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Если k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0, \tag{2}$$

то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если k_1 и k_2 вещественны и $k_1 \neq k_2$;
2) $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, если $k_1 = k_2$;
3) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, если $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

Теоретическое введение

1°. Однородное уравнение. Фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{1}$$

строится на основе характера корней *характеристического уравнения*

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \tag{2}$$

А именно: 1) если k есть вещественный корень уравнения (2) кратности m, то ему соответствует m линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_1=e^{kx},\ y_2=xe^{kx},\ \ldots,\ y_m=x^{m-1}e^{kx};$$

2) если $\alpha\pm\beta i$ — пара комплексных корней уравнения (2) кратности m, то ей соответствует $2m$ линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots$$
$$\ldots,\ y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Решение задач

2968. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

а) $x, \ x+1$;

в) $0, \ 1, \ x$;

е) $e^x, \ e^{2x}, \ e^{3x}$;

з) $\sin^2 x, \ \cos^2 x, \ 1$.

Решение задач

2968 а) $\{x;\ x+1\}$

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - x - 1 = -1 \neq 0$$ – линейно независ-а

в) $\{0;\ 1;\ x\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ – линейно завис-я

Решение задач

е) $\{e^{x}\ \ e^{2x}\ \ e^{3x}\}$

$$\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{x}\cdot e^{2x}\cdot e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{6x}\cdot(18+4+3-2-12-9) = 2\cdot e^{6x} \neq 0$$

линейно нез-я

з) $\{\sin^2 x\ \ \cos^2 x\ \ 1\}$

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ 2\sin x\cos x & -2\cos x\sin x & 0 \\ 2\cos^2 x-2\sin^2 x & 2\sin^2 x-2\cos^2 x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\sin x\cdot\cos x(2\sin^2 x-2\cos^2 x)+$$

$$+2\sin x\cos x(2\cos^2 x-2\sin^2 x) = 0$$

линейно зав-я

Решение задач

2969. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его фундаментальную систему решений:

а) $y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x;$

в) $y_1 = x, \quad y_2 = x^2;$

Решение задач

а). $y_1=\sin x;\quad y_2=\cos x.$

$y_1'=\cos x;\quad y_2'=-\sin x$

$y_1''=-\sin x;\quad y_2''=-\cos x$

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y \\ \cos x & -\sin x & y' \\ -\sin x & -\cos x & y'' \end{vmatrix} =$$

$$= \sin x \begin{vmatrix} -\sin x & y' \\ -\cos x & y'' \end{vmatrix} - \cos x \begin{vmatrix} \cos x & y \\ -\cos x & y'' \end{vmatrix} -$$

$$- \sin x \begin{vmatrix} \cos x & y \\ -\sin x & y' \end{vmatrix} = -\sin^2 x\, y'' + \cancel{\sin x \cos x\, y'}$$

$$-\cos^2 x\, y'' - \cos^2 x\, y - \cancel{\sin x \cos x\, y'} - \sin^2 x\, y =$$

Решение задач

$$= -(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1})y'' - (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1})y =$$

$$= -y'' - y$$

$$-y'' - y = 0$$

$$\boxed{y'' + y = 0}$$

ответ

Решение задач

в). $y_1 = x;\ y_2 = x^2$

$y_1' = 1 \quad y_2' = 2x;$

$y_1'' = 0 \quad y_2'' = 2$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2x & y' \\ 2 & y'' \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & y \\ 2 & y'' \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} x^2 & y \\ 2x & y' \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot 2x \cdot y'' - 2xy' - x^2y'' + 2y =$$

$$= 2x^2y'' - x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2y'' - 2xy' + 2y$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Решение задач

Найти общие решения уравнений.

<u>2976</u> $y'' - 5y' + 6y = 0$

$\varphi(k) \equiv k^2 - 5k + 6 = 0$

$k_1 = 2;\ k_2 = 3$

$\Downarrow$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

<u>2983</u> $y'' - 4y' + 2y = 0$

$k^2 - 4k + 2 = 0$

$k_1 = 2 + \sqrt{2};\ k_2 = 2 - \sqrt{2}$

$y = C_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})x}$

$y = e^{2x} \cdot \left(C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}\right)$

Решение задач

Найти частные решения, удовл-е указанным условиям:

2987 $y''-5y'+4y=0$; $y=5$; $y'=8$ при $x=0$

$k^2-5k+4=0$

$k_1=1$; $k_2=4$

$y=C_1e^x+C_2e^{4x}$

$y'=C_1e^x+4C_2e^{4x}$

$y(0)=C_1+C_2=5$

$y'(0)=C_1+4C_2=8$

$$\begin{cases} C_1+C_2=5 \\ C_1+4C_2=8 \end{cases}$$

$3C_2=3$

$C_2=1 \Rightarrow y_ч=4e^x+e^{4x}$

$C_1=4$

Домашнее задание

- 2918,2919, 2923, 2940
- 2968(б,г,д,ж), 2969(б,г), 2981, 2982