Занятие 19. Интегрирование ЛНДУ высшего порядка методом вариации произвольных постоянных

Решение задач

Найти общие решения уравнений:

3064. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$

Решение задач

3064 $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$

1) $y''' + y'' = 0$

$k^3 + k^2 = 0$

$k^2(k+1) = 0$

$k_1 = k_2 = 0, \; k_3 = -1$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$

2) $f(x) = x^2 + 1 + 3x \cdot e^x$

$f_1(x) = x^2 + 1$

$f_1(x) = e^{ax} P_n(x)$

$a = 0$ $\qquad P_n(x) = x^2 + 1$

$(r = 2)$ $\qquad n = 2$

$Y_1 = x^r e^{ax} Q_n(x)$

Решение задач

$$Y_1 = x^2(Ax^2+Bx+C) = Ax^4+Bx^3+Cx^2$$

$$Y_1' = 4Ax^3+3Bx^2+2Cx$$

$$Y_1'' = 12Ax^2+6Bx+2C$$

$$Y_1''' = 24Ax+6B$$

Подставим:

$$24Ax+6B+12Ax^2+6Bx+2C = x^2+1$$

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 24A+6B = 0 \\ 6B+2C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{12} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$Y_1 = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = x^2\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)$$

Решение задач

$$f_2(x) = 3x e^{x}$$

$$f_2(x) = e^{ax} P_n(x)$$

$a = 1$; $P_n(x) = 3x$

не корень $\quad n = 1$

$$Y_2 = (Ax + B)e^{x}$$

$$Y_2' = Ae^{x} + (Ax+B)\cdot e^{x}$$

$$Y_2'' = Ae^{x} + A\cdot e^{x} + (Ax+B)\cdot e^{x} =$$

$$= 2A\cdot e^{x} + (Ax+B)\cdot e^{x}$$

$$Y_2''' = 2A\cdot e^{x} + Ae^{x} + (Ax+B)e^{x} =$$

$$= 3Ae^{x} + (Ax+B)e^{x}$$

$$3Ae^{x} + (Ax+B)e^{x} + 2Ae^{x} + (Ax+B)e^{x} = 3x\cdot e^{x} \Big| : e^{x} \neq 0$$

$$5A + 2Ax + 2B = 3x$$

Решение задач

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 5A + 2B = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

$$Y_2 = \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)e^x$$

$$Y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)e^x$$

3). $Y_{он} = y_{оо} + Y$

$$Y_{он} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 +$$

$$+ \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right) \cdot e^x$$

Решение задач

В следующих задачах примеры подобраны так, чтобы обратить внимание на одну из самых часто встречающихся ошибок.

Задача 1. Для следующих уравнений найти ФСР и выписать общее решение

а) $y''' - 8y = 0$

б) $y''' - 8y' = 0$

в) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

Решение:

а) Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 8 = 0$. Здесь необходимо отметить, что слагаемому $8y = 8y^{(0)}$ в характеристическом уравнении будет соответствовать слагаемое $8k^0 = 8$ (часто студенты по невнимательности вместо него пишут $8k$). При решении этого уравнения необходимо разложить разность кубов на простейшие множители и найти корни. Именно здесь студенты чаще всего допускают ошибку, считая, что $k_{1,2,3} = 2$, тем самым путая его с уравнением $(k-2)^3 = 0$, которое возникает в процессе решения другой задачи.

$$k^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (k-2)(k^2 + 2k + 4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i \end{array}\right.$$

Составим ФСР: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$, $y_3 = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$ и затем выпишем общее решение $y_{oo} = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2\cos\sqrt{3}x + c_3\sin\sqrt{3}x)$.

Решение задач

б) Внешне эта задача очень похожа на предыдущую, однако здесь характеристическое уравнение примет вид $k^3 - 8k = 0$.

$$k^3 - 8k = 0 \Leftrightarrow k(k^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow k\left(k - 2\sqrt{2}\right)\left(k - 2\sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 2\sqrt{2} \\ k_3 = -2\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

В этом случае все корни действительные и простые, следовательно ФСР примет вид: $y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = e^{-2\sqrt{2}x},\ \ y_2 = e^{2\sqrt{2}x}$. Запишем общее решение $y_{oo} = c_1 + c_2 e^{-2\sqrt{2}x} + c_3 e^{2\sqrt{2}x}$.

в) В этом случае характеристическое уравнение имеет вид: $k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \Leftrightarrow (k-2)^3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 2$. Вот здесь мы как раз имеем дело со случаем действительных кратных корней, следовательно ФСР будет выглядеть таким образом: $y_1 = e^{2x},\ y_2 = xe^{2x},\ \ y_3 = x^2 e^{2x}$. Выпишем общее решение $y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x} = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)$.

Теоретическое введение

2°. Неоднородные уравнения. Общее решение *неоднородного линейного* дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+P_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+P_n(x)\,y=f(x) \tag{2}$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ и правой частью $f(x)$ имеет вид

$$y=y_0+Y,$$

где y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения (1) и Y — частное решение данного неоднородного уравнения (2).

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного уравнения (1), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (2) может быть найдено по формуле

$$y=C_1(x)\,y_1+C_2(x)\,y_2+\ldots+C_n(x)\,y_n,$$

где функции $C_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&C_1'(x)\,y_1+C_2'(x)\,y_2+\ldots+C_n'(x)\,y_n=0,\\
&C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'+\ldots+C_n'(x)\,y_n'=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}=0,\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}=f(x)
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*метод вариации произвольных постоянных*).

Теоретическое введение

Пример. Решить уравнение

$$xy'' + y' = x^2, \quad x > 0. \tag{4}$$

Решение. Решая однородное уравнение

$$xy'' + y' = 0,$$

получим:

$$y = C_1 \ln x + C_2. \tag{5}$$

Следовательно, можно принять

$$y_1 = \ln x \quad \text{и} \quad y_2 = 1$$

и решение уравнения (4) искать в виде

$$y = C_1(x) \ln x + C_2(x).$$

Теоретическое введение

Составляя систему (3) и учитывая, что приведенный вид уравнения (4) есть $y'' + \frac{y'}{x} = x$, получим

$$\begin{cases} C_1'(x) \ln x + C_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ C_1'(x) \frac{1}{x} + C_2'(x) \cdot 0 = x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \quad \text{и} \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

и, следовательно,

$$y = \frac{x^3}{9} + A \ln x + B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

Решение задач

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения:

3033. $y'' + y = \operatorname{ctg} x.$

3035. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

Решение задач

3033 $y' + y = ctg\, x$

1). $y'' + y = 0$

$k^2 + 1 = 0$

$k^2 = -1$

$k_{1,2} = \pm i$

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2). $Y_{oн} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \quad (1) \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = ctg\, x \quad (2) \end{cases}$$

Решение задач

Из первого ур-я получаем:

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

подставим во (2)

$$C_2'(x)\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos x} + C_2'(x)\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2'(x)\cdot\left(\frac{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{=1}}{\cos x}\right) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2'(x)\cdot\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$C_1'(x) = -\frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\sin x}}\cdot\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} = -\cos x$$

Решение задач

$$C_1(x) = -\sin x + C_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_2$$

3). $$Y_{он} = (-\sin x + C_1)\cos x + \left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_2\right)\sin x$$

$$Y_{он} = \cancel{-\sin x\cdot\cos x} + C_1\cos x + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\sin x + \cancel{\cos x\cdot\sin x} + C_2\sin x$$

$$Y_{он} = \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{y_{оо}} + \underbrace{\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\cdot\sin x}_{Y_{чн}}$$

Решение задач

3035 $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

1). $y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0$

$(k+1)^2 = 0$

$k_{1,2} = -1$

$y_1 = e^{-x}$

$y_2 = x \cdot e^{-x}$ $\quad y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 x \cdot e^{-x}$

Решение задач

2). $Y_{он} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)x\cdot e^{-x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-x}(1-x) = \frac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0 \\ -C_1'(x) + C_2'(x) - xC_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Bigg| +$$

$C_2'(x) = \frac{1}{x}$; $C_2(x) = \ln|x| + C_2$

$C_1'(x) = -xC_2'(x) = -1$

$C_1(x) = -x + C_1$

Решение задач

3) $Y_{он} = (C_1 - x)e^{-x} + (\ln|x| + C_2)\, x e^{-x}$

$$Y_{он} = C_1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \ln|x| + C_2 x \cdot e^{-x}$$

$$Y_{он} = x \cdot e^{-x} \ln|x| + C_1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \underbrace{(C_2 - 1)}_{C_2}$$

$$Y_{он} = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + x \cdot e^{-x} \ln|x|$$

Решение задач

Найти общие решения уравнений:

3066. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x.$

Решение задач

$\underline{3066}$ $y''' + y' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$

1) $y''' + y' = 0$

$k^3 + k = 0$

$k(k^2 + 1) = 0$

$k_1 = 0$ или $k^2 = -1 \Rightarrow k_{2,3} = \pm i$

$y_{oo} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

$y_1 = 1;$ $y_2 = \cos x;$ $y_3 = \sin x$

Решение задач

2) $Y_{он} = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0 \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3''(x)y_3'' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cdot\cos x + C_3'(x)\sin x = 0 & (1) \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0 & (2) \\ -C_2'(x)\cdot\cos x - C_3'(x)\cdot\sin x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & (3) \end{cases}$$

$(1)+(3) \Rightarrow C_1'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$C_2'(x) = C_3'(x)\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$ из $(2) \Rightarrow$ в (3)

Решение задач

$$-C_3'(x)\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin x}-C_3'(x)\cdot\sin x=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$-C_3'(x)\cdot\left[\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x}\right]=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$C_3'(x)=-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$C_2'(x)=-\frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}}=-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1(x)=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}+C_1$$

$$C_2(x)=-\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\int\frac{d\cos x}{\cos x}=\ln|\cos x|+C_2$$

$$C_3(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}\,dx=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=x-\operatorname{tg}x+C_3$$

Решение задач

3). $Y_{он} = C_1 + \frac{1}{\cos x} + (\ln|\cos x| + C_2)\cos x +$

$+ (x - tg\, x + C_3) \cdot \sin x$

$Y_{он} = \underbrace{C_1 + C_2 \cdot \cos x + C_3 \sin x}_{yoo} + \frac{1}{\cos x} +$

$+ \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \sin x - tg\, x \cdot \sin x$

Теоретическое введение

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{9.1}$$

Если известно частное решение $y_1(x)$ соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0, \tag{9.2}$$

то для отыскания линейно независимого с $y_1(x)$ решения $y_2(x)$ однородного дифференциального уравнения (9.2) используем формулу Остроградского—Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}. \tag{9.3}$$

Из соотношения (9.3) следует, что решение $y_2(x)$ представляется в виде

$$y_2(x) = y_1(x) \int y_1^{-2}(x) e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx. \tag{9.4}$$

Далее находим общее решение однородного уравнения (9.2):

$$y_{oo} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}.$$

Теоретическое введение

Для отыскания общего решения неоднородного дифференциального уравнения используем метод вариации постоянных. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (9.1) ищем в виде

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{9.5}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — неизвестные функции.

Функции $C_1'(x), C_2'(x)$ определяем из системы линейных алгебраических уравнений:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Эта система имеет единственное решение:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\ C_2'(x) = \varphi_2(x). \tag{9.6}$$

Интегрируя равенства (9.6), находим функции

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + C_2,$$

и, подставляя их в соотношение (9.5), находим общее решение неоднородного уравнения.

Решение задач

Найти общее решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего линейного однородного уравнения

$$x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=\frac{(1-\ln x)^2}{x}, \quad y_1=x;$$

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=2; \quad y_1=\frac{1}{x}.$$

Решение задач

$$x^2(1-\ln x)\,y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}, \quad y_1 = x$$

ОДЗ $x>0$ известное частное решение однородного ур-я

Делим на $x^2(1-\ln x)$

$$y'' + \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(1-\ln x)}y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}y = \frac{(1-\ln x)^{\cancel{2}}}{x\cdot x^2\cdot\cancel{(1-\ln x)}}$$

$$y'' + \frac{1}{x(1-\ln x)}y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}y = \frac{1-\ln x}{x^3}$$

1) $y'' + \frac{1}{x(1-\ln x)}y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}y = 0$

$y_1 = x.$

=> По формуле Остроградского — Лиувилля находим y_2:

$$y_2 = y_1\int\frac{1}{y_1^2}\cdot e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx$$

Решение задач

$$a_1(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

$$\Rightarrow y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{dx}{x(1-\ln x)}} = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{d(\ln x-1)}{\ln x-1}} dx =$$

$$= x\int \frac{1}{x^2} e^{\ln(\ln x-1)} dx = x\int \frac{\ln x-1}{x^2} dx =$$

$$= x\int \frac{\ln x}{x^2} dx - x\int \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=\ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dV = \frac{dx}{x^2} \to V = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

Решение задач

$$y_2 = x\int\frac{\ln x}{x^2}dx - x\int\frac{dx}{x^2} =$$

$$= x\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) - x\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\ln x - 1 + 1 = -\ln x$$

$$y_2 = -\ln x$$

$$y_{oo} = C_1 x + C_2 \ln x$$

2). $Y_{OH} = C_1(x)x + C_2(x)\ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1-\ln x}{x^3} \end{cases} \cdot x$$

Решение задач

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x + C_2'(x)\ln x = 0 & (1)\\ C_1'(x)\cdot x + C_2'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} & (2)\end{cases}$$

Вычитаем из (2) (1)-е:

$$C_2'(x)(1-\ln x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$C_2(x) = \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \tilde{C}_2$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot\frac{\ln x}{x} = -\frac{\ln x}{x\cdot x^2} = -\frac{\ln x}{x^3}$$

$$C_1(x) = -\int\frac{\ln x}{x^3}\,dx = \left\{\begin{aligned} & u = \ln x;\ du = \frac{1}{x}dx\\ & dV = \frac{dx}{x^3} \to V = \int\frac{dx}{x^3} =\\ & = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}\end{aligned}\right.$$

$$= -\left(-\frac{\ln x}{2x^2} - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} =$$

$$= \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^{-2}}{(-2)} + \tilde{C}_1 = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1$$

Решение задач

$$C_1(x) = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{x} + \tilde{C}_2$$

3) $$Y_{OH} = \left(\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1\right)x + \left(-\frac{1}{x} + \tilde{C}_2\right)\ln x$$

$$Y_{OH} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \ln x + \frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{4x} - \frac{\ln x}{x}$$

$$Y_{OH} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \ln x + \frac{1}{4x} - \frac{\ln x}{2x}$$

Решение задач

Найти общее решение диф-го уравнения:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 2,$$ если известно частное решение соотв-го однородного ур-я $y_1 = \frac{1}{x}$.

1). По формуле Остроградского-Лиувилля найдём 2-е частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int a_1(x)dx} dx =$$

$$= \frac{1}{x} \int \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\ln x} dx =$$

$$= \frac{1}{x} \int x^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$$

$$y_{oo} = C_1 \frac{1}{x} + \underbrace{C_2 \cdot \frac{x}{2}}_{\to C_2} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot x$$

Решение задач

2). $y_{oн} = C_1(x)\cdot\frac{1}{x} + C_2(x)\cdot x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0 \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\frac{1}{x} + C_2'(x)\cdot x = 0 & \Big|:x \\ C_1'(x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + C_2'(x) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\frac{1}{x^2} + C_2'(x) = 0 & (1) \\ C_1'(x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + C_2'(x) = 2 & (2) \end{cases}$$

Решение задач

К (1) прибавим (2):

$2C_2'(x) = 2$

$C_2'(x) = 1$

$C_1'(x) \cdot \frac{1}{x^2} + C_2'(x) = 0$

$C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot x^2$

$C_1(x) = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + \tilde{C}_1$

$C_2(x) = x + \tilde{C}_2$

3). $Y_{OM} = \left(C_1 - \frac{x^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{x} + (x + C_2)\, x =$

$= C_1 \frac{1}{x} + C_2 x + \frac{2}{3} x^2$

Домашнее задание

- 3032, 3034, 3037
- д/з 2 сдать до 26.05

проинтегрировать уравнения (y_1 - частное решение соответствующего однородного уравнения):

а) $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = 1/x$;

б) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$, $y_1 = x$;

в) $y''' + y' = (x-1)/x^2$