Занятие 20. Решение систем дифференциальных уравнений

Теоретическое введение

1. Основные понятия. Связь с дифференциальными уравнениями n-го порядка. Если система k дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную x и k функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, разрешена относительно старших производных этих функций $y_1^{(p_1)}(x), \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, т. е. имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_1^{(p_1)}(x) &= f_1\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),\\
y_2^{(p_2)}(x) &= f_2\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(p_k)}(x) &= f_k\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

то она называется *канонической*, причем число $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ называется *порядком* системы. Каноническая система (1) при $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 1$, т. е. система дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\
y_2'(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n'(x) &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

называется *нормальной* системой.

Теоретическое введение

Решением системы (2) на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ называется совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x), \ \ldots, \ y_n = \varphi_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на $(a, \ b)$ и обращающих уравнения системы (2) в тождества относительно $x \in (a, \ b)$.

Интегралом нормальной системы (2) называется функция $\Psi(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \ \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a, \ b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.

Равенство

$$\Psi(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n) = C,$$

где $\Psi(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n)$ — интеграл нормальной системы, а C — произвольная постоянная, называется *первым интегралом* системы (2).

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, \ y, \ y', \ \ldots, \ y^{(n-1)})$$

можно свести к нормальной системе (2). Обратно, системы (1) или (2) в большинстве случаев сводятся к дифференциальному уравнению n-го порядка, решая которое можно найти и решение исходной системы.

Теоретическое введение

Задача Коши для системы (2) ставится следующим образом: найти решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = \overset{0}{y_1}, \quad y_2(x_0) = \overset{0}{y_2}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = \overset{0}{y_n}, \tag{5}$$

где $\overset{0}{y_1}, \ldots, \overset{0}{y_n}$ — заданные числа.

Теоретическое введение

Метод исключения. Для нахождения решения, например, нормальной системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка, т. е. системы вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx}=g(x, y, z), \tag{1}$$

разрешенной относительно производных от искомых функций y и z, дифференцируем по x одно из них. Имеем, например:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f+\frac{\partial f}{\partial z}g. \tag{2}$$

Определяя z из первого уравнения системы (1) и подставляя найденное выражение

$$z=\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{3}$$

в уравнение (2), получим уравнение 2-го порядка с одной неизвестной функцией y. Решая его, находим:

$$y=\psi(x, C_1, C_2), \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя функцию (4) в формулу (3), определяем функцию z без новых интеграций. Совокупность формул (3) и (4), где y заменено на ψ, дает *общее решение системы* (1).

Решение задач

3079 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z & (1) \\ \dfrac{dz}{dx} + y + 3z = 0 & (2) \end{cases}$

Продиф-м (1) по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 5\frac{dz}{dx} \quad (3)$$

Из (1) выразим z:

$$z = \frac{1}{5}\left(\frac{dy}{dx} - y\right)$$

в (2): $\dfrac{dz}{dx} = -3z - y = -y - 3\cdot\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{dy}{dx} - y\right) =$

$$= -\frac{2}{5}y - \frac{3}{5}\frac{dy}{dx}$$

подставим в (3):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 5\cdot\left(-\frac{2}{5}y - \frac{3}{5}\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 2y - 3\frac{dy}{dx}$$

Решение задач

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

– однородное 2-го порядка

$$y''+2y'+2y=0$$

$$k^2+2k+2=0$$

$$k_{1;2}=-1\pm i$$

Общее решение:

$$y=e^{ax}\cdot(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$$

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

Решение задач

$$z=\frac{1}{5}\left(\frac{dy}{dx}-y\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+$$
$$+e^{-x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)$$

$$z=\frac{1}{5}\Big(-e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(-C_1\sin x+$$
$$+C_2\cos x)-e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)\Big)=$$
$$=\frac{1}{5}\Big(-2e^{-x}(C_1\cdot\cos x+C_2\sin x)+$$
$$+e^{-x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)\Big)=$$
$$=\frac{1}{5}e^{-x}\big(\cos x(-2C_1+C_2)+\sin x(-2C_2-C_1)\big)$$

Ответ: $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$,

$$z=\frac{1}{5}e^{-x}\big(\cos x(-2C_1+C_2)+\sin x(-2C_2-C_1)\big)$$

Решение задач

Решить системы:

3080. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z, \end{cases}$$

3087. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2} y. \end{cases}$$

Решение задач

3080 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z & (1) \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z & (2) \end{cases}$

(1) диф-м по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}$$

подставляем $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dy}{dx} - (y - z)$$

Из (1) $z: = -3y - \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dy}{dx} - y - 3y - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\frac{dy}{dx} - 4y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$(k+2)^2 = 0$$

$$k_1 = k_2 = -2$$

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$$

Решение задач

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{-2x}$$

$$z = -3y - \frac{dy}{dx} = -3e^{-2x}(C_1 + C_2 x) -$$

$$-\left(-2e^{-2x}(C_1 + C_2 x)\right) - C_2 e^{-2x} =$$

$$= -C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-2x} \cdot x - C_2 e^{-2x} =$$

$$= -e^{-2x}(C_1 + C_2 + C_2 x)$$

Ответ: $\begin{cases} y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) \\ z = -e^{-2x}(C_1 + C_2 + C_2 x) \end{cases}$

Решение задач

3087 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z} & (1) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2} y & (2) \end{cases}$

(2) по x : $\dfrac{d^2 z}{dx^2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{z}$$

из (2) $y = 2 \dfrac{dz}{dx} \Rightarrow \dfrac{d^2 z}{dx^2} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{1}{z} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \left(\dfrac{dz}{dx} \right)^2$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{2}{z} \cdot \left(\frac{dz}{dx} \right)^2$$

Решение задач

$$z'' = \frac{2}{z}(z')^2$$

Нет независимой перем-й

$$z' = \varphi(z);\ z'' = \varphi\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\varphi\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2}{z}\varphi^2,\ \varphi \neq 0$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2}{z}\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = 2\frac{dz}{z}$$

$$\ln|\varphi| = 2\ln|C_1 z|$$

$$\varphi = C_1 z^2$$

$$z' = C_1 z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = C_1 z^2$$

$$\frac{dz}{z^2} = C_1 dx$$

$$-\frac{1}{z} = C_1 x + C_2$$

$$z = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C_1}{(C_1 x + C_2)^2}$$

$$y = \frac{2C_1}{(C_1 x + C_2)^2}$$

Ответ: $\begin{cases} y = \dfrac{2C_1}{(C_1 x + C_2)^2} \\ z = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2} \end{cases}$

Решение задач

Решить следующие системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Там, где даны начальные условия, кроме общего решения, найти соответствующее частное решение:

9.431. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x + 3y.$

9.432. $\dot{x} = x + 3y, \quad \dot{y} = -x + 5y, \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

9.433. $\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 4x + 7y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

9.434. $\dot{x} = 2x - 5y, \quad \dot{y} = 5x - 6y.$

9.435. $\dot{x} = x - 4y, \quad \dot{y} = x - 3y.$

9.436. $\dot{x} = -x + 2y, \quad \dot{y} = -2x - 5y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Решение задач

9.431 $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \quad (1) \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \quad (2) \end{cases}$$

Дифф. (1) по t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

Из (2) $\frac{dy}{dt} = -2x + 3\frac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + 3\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$x'' - 3x' + 2x = 0$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k_1 = 2;\ k_2 = 1$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

$$y = \frac{dx}{dt} = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

Решение задач

$$9.433 \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x + 7y \end{cases} \qquad x(0) = 1;\ y(0) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \quad (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt}$$

$$\text{Из } (1): \quad y = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + \frac{7}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 8x - 7\left(3x - \frac{dx}{dt}\right)$$

Решение задач

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 29x + 7\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 10\frac{dx}{dt} - 29x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 29x = 0$$

$$x'' - 10x' + 29x = 0$$

$$k^2 - 10k + 29 = 0$$

$$k_{1,2} = 5 \pm 2i$$

$$x = e^{5t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

Решение задач

$$\frac{dx}{dt}=5e^{5t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)+e^{5t}(-2c_1\sin 2t+$$
$$+2c_2\cos 2t)$$

$$y=\frac{1}{2}\left(3x-\frac{dx}{dt}\right)$$

$$y=\frac{1}{2}e^{5t}(3c_1\cos 2t+3c_2\sin 2t-5c_1\cos 2t$$
$$-5c_2\sin 2t+2c_1\sin 2t-2c_2\cos 2t)=$$
$$=e^{5t}(-c_1\cos 2t-c_2\cos 2t-c_2\sin 2t+$$
$$+c_1\sin 2t)=e^{5t}((c_1-c_2)\sin 2t-(c_1+c_2)\cos 2t)$$

$x(0)=1$; $y(0)=0$

Решение задач

$$1 = e^{5\cdot 0}(c_1\cos 2\cdot 0 + c_2 \sin 2\cdot 0)$$

$$1 = c_1$$

$$0 = e^{5\cdot 0}((c_1 - c_2)\sin 2\cdot 0 - (c_1 + c_2)\cos 2\cdot 0)$$

$$-c_1 - c_2 = 0$$

$$c_2 = -1$$

$$x = e^{5t}(\cos 2t - \sin 2t)$$

$$y = e^{5t}\, 2\sin 2t$$

<u>Ответ:</u> $\begin{cases} x = e^{5t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) \\ y = e^{5t}((c_1 - c_2)\sin 2t - (c_1 + c_2)\cos 2t); \end{cases}$

$$\begin{cases} x = e^{5t}(\cos 2t - \sin 2t) \\ y = 2e^{5t}\sin 2t \end{cases}$$

Решение задач

9.435 $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y \quad (1) \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \quad (2) \end{cases}$$

Из (2): $x = \frac{dy}{dt} + 3y$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} \overset{\text{из (1)}}{=} \frac{dy}{dt} + 3y - 4y$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - y - 3\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y - 2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$(k+1)^2 = 0$$

$$k_{1,2} = -1$$

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$$

Решение задач

$$\frac{dy}{dt} = (-c_1 - c_2 t)e^{-t} + c_2 e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = (-c_1 + c_2 - c_2 t) \cdot e^{-t}$$

$$x = \frac{dy}{dt} + 3y$$

$$x = (-c_1 + c_2 - c_2 t + 3c_1 + 3c_2 t) \cdot e^{-t} =$$

$$= (2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^{-t}$$

Ответ: $\begin{cases} x = (2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^{-t} \\ y = (c_1 + c_2 t)e^{-t} \end{cases}$

Решение задач

Найти решения следующих систем уравнений:

9.441. $\dot{x} = 3x - 2y + t, \quad \dot{y} = 3x - 4y.$

9.442. $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y + e^t.$

9.443. $\dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}, \quad \dot{y} = 3x - y + e^{3t}.$

9.444. $\dot{x} = x + y - \cos t, \quad \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t.$

Решение задач

9.441

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y + t \quad (1) \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y \quad (2) \end{cases}$$

Из (1): $2y = 3x + t - \frac{dx}{dt}$

в (2) $\frac{dy}{dt} = 3x - 6x - 2t + 2\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = -3x - 2t + 2\frac{dx}{dt}$$

Продиф.м (1) по t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 2\left(-3x - 2t + 2\frac{dx}{dt}\right) + 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 6x + 4t - 4\frac{dx}{dt} + 1$$

Решение задач

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=4t+1$$

$$x''+x'-6x=4t+1$$

$$x''+x-6x=0$$

$$k^2+k-6=0$$

$$k_1=-3;\ k_2=2$$

$$x=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t};\ x=C_1(t)e^{-3t}+C_2(t)e^{2t}$$

$$x_1=e^{-3t};\ x_1'=-3e^{-3t}$$

$$x_2=e^{2t};\ x_2'=2e^{2t}$$

Решение задач

$$\begin{cases} c_1' e^{-3t} + c_2' e^{2t} = 0 \quad (1) \\ -3c_1' e^{-3t} + 2c_2' e^{2t} = 4t + 1 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \times (-2)$

$$\begin{cases} -2c_1' e^{-3t} - 2c_2' e^{2t} = 0 \\ -3c_1' e^{-3t} + 2c_2' e^{2t} = 4t + 1 \end{cases} +$$

$$-5c_1' e^{-3t} = 4t + 1$$

$$c_1' = \frac{-4t-1}{5e^{-3t}} = -\frac{1}{5} e^{3t}(4t+1)$$

$$c_1 = -\frac{1}{5} \int (4t+1) e^{3t} dt = -\frac{1}{5}\left[4\int t e^{3t} dt + \int e^{3t} dt\right]$$

$$\int e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t}$$

Решение задач

$$\int t e^{3t} dt = \left\{ \begin{matrix} dv = e^{3t} dt & v = \frac{1}{3} e^{3t} \\ u = t & du = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} t e^{3t} - \frac{1}{3} \int e^{3t} dt = \frac{1}{3} t e^{3t} - \frac{1}{9} e^{3t}$$

$$C_1 = -\frac{1}{5}\left[\frac{4}{3} t e^{3t} - \frac{4}{9} e^{3t} + \frac{1}{3} e^{3t}\right] + \tilde{C}_1 =$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{4}{3} t e^{3t} - \frac{1}{9} e^{3t}\right] + \tilde{C}_1$$

$$C_2' = -C_1' e^{-5t}$$

$$C_2' = \frac{1}{5} e^{3t} \cdot e^{-5t}(4t+1) = \frac{1}{5}(4t+1) e^{-2t}$$

$$C_2 = \int \frac{1}{5}(4t+1) e^{-2t} dt = \frac{1}{5}\left[4 \int t e^{-2t} dt + \int e^{-2t} dt\right]$$

$$\int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t}$$

Решение задач

$$\int te^{-2t}dt = \left\{ \begin{matrix} dv = e^{-2t}dt & v = -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ u = t; & du = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

$$C_2 = \frac{1}{5}\left[-2te^{-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right] + \tilde{C}_2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left[-2te^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-2t}\right] + \tilde{C}_2$$

Решение задач

$$x = C_1(t)\cdot e^{-3t} + C_2(t)\cdot e^{2t}$$

$$x = -\frac{1}{5}e^{3t}\left[\frac{4}{3}t - \frac{1}{9}\right]\cdot e^{-3t} + \tilde{C}_1\cdot e^{-3t} +$$

$$+\frac{1}{5}e^{-2t}\left[-2t - \frac{3}{2}\right]e^{2t} + \tilde{C}_2 e^{2t} =$$

$$= \frac{1}{5}\left[-\frac{4}{3}t + \frac{1}{9} - 2t - \frac{3}{2}\right] + \tilde{C}_1\cdot e^{-3t} + \tilde{C}_2\cdot e^{2t} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{-\cancel{10}^{\,2}}{3}\cdot t + \frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{-\cancel{25}^{\,-5}}{18} + \tilde{C}_1 e^{-3t} + \tilde{C}_2\cdot e^{2t} =$$

$$= -\frac{2}{3}t - \frac{5}{18} + \tilde{C}_1 e^{-3t} + \tilde{C}_2\cdot e^{2t}$$

Решение задач

$$y=\frac{1}{2}\left[3x+t-\frac{dx}{dt}\right]$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{3}-3\tilde{c}_1 e^{-3t}+2\tilde{c}_2\cdot e^{2t}$$

$$y=\frac{1}{2}\left[-2t-\frac{5}{6}+3\tilde{c}_1 e^{-3t}+3\tilde{c}_2\cdot e^{2t}+t+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}+3\tilde{c}_1 e^{-3t}-2\tilde{c}_2 e^{2t}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-t-\frac{1}{6}+6\tilde{c}_1 e^{-3t}+\tilde{c}_2 e^{2t}\right]=$$

$$=-\frac{t}{2}-\frac{1}{12}+3\tilde{c}_1 e^{-3t}+\frac{\tilde{c}_2}{2}e^{2t}$$

Ответ: $\begin{cases} x=-\frac{2}{3}t-\frac{5}{18}+c_1 e^{-3t}+c_2\cdot e^{2t} \\ y=-\frac{t}{2}-\frac{1}{12}+3c_1\cdot e^{-3t}+\frac{c_2}{2}e^{2t} \end{cases}$

Решение задач

9.443

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + t\cdot e^{2t} \quad (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y + e^{3t} \quad (2) \end{cases}$$

Из (2): $x = \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt} + y - e^{3t}\right)$

Продиф-м (2):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3e^{3t}$$

Из (1): $\frac{dx}{dt} = 5x - 3y + t\cdot e^{2t} = \frac{5}{3}\left[\frac{dy}{dt} + y - e^{3t}\right] -$

$- 3y + t\,e^{2t} = \frac{5}{3}\frac{dy}{dt} - \frac{4}{3}y - \frac{5}{3}e^{3t} + t\cdot e^{2t}$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 5\frac{dy}{dt} - 4y - 5e^{3t} + 3t\cdot e^{2t} - \frac{dy}{dt} + 3\cdot e^{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = -2e^{3t} + 3t\cdot e^{2t}$$

Решение задач

Гасамонерим однородное ур-е.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k-2)^2 = 0$$

$$k_{1,2} = 2$$

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$$

$$y = (C_1(t) + C_2(t)\cdot t)e^{2t}$$

$y_1 = e^{2t}$ $\quad$ $y_2 = te^{2t}$

$y_1' = 2e^{2t}$ $\quad$ $y_2' = e^{2t} + 2te^{2t}$

Решение задач

$$\begin{cases} C_1' e^{2t} + C_2' t e^{2t} = 0 \\ 2C_1' e^{2t} + C_2' e^{2t} + 2C_2' t e^{2t} = -2e^{3t} + 3t \cdot e^{2t} \end{cases}$$

$$C_1' = -C_2' t$$

$$\cancel{-2C_2' t e^{2t}} + C_2' e^{2t} \cancel{+2C_2' t e^{2t}} = -2e^{3t} + 3t \cdot e^{2t}$$

$$C_2' e^{2t} = -2e^{3t} + 3t \cdot e^{2t}$$

$$C_2' = -2e^{t} + 3t$$

$$C_2 = -2e^{t} + 3\frac{t^2}{2} + \tilde{C}_2$$

$$C_1' = -C_2' t = 2te^{t} - 3t^2$$

$$C_1 = 2\int te^{t} dt - 3\int t^2 dt$$

$$\int te^{t} dt = \left\{ \begin{matrix} dV = e^{t} dt & V = e^{t} \\ U = t; & dU = dt \end{matrix} \right\} = t \cdot e^{t} - \int e^{t} dt =$$

$$= te^{t} - e^{t}$$

Решение задач

$$c_1 = 2te^t - 2e^t - 3\cdot\frac{t^3}{3} + \tilde{c}_1 = 2te^t - 2e^t - t^3 + \tilde{c}_1$$

$$y = (2te^t - 2e^t - t^3 + \tilde{c}_1)e^{2t} + \left(-2te^t + \frac{3}{2}t^3 + \tilde{c}_2 t\right)e^{2t} =$$

$$= \left(2te^t - 2te^t - 2e^t - t^3 + \frac{3}{2}t^3 + \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 t\right)e^{2t} =$$

$$= \left(-2e^t + \frac{t^3}{2} + (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 t)\right)e^{2t} =$$

$$= -2e^{3t} + \frac{t^3}{2}e^{2t} + \tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 t e^{2t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -6e^{3t} + \frac{3t^2}{2}e^{2t} + t^3 e^{2t} + 2\tilde{c}_1 e^{2t} +$$

$$+ \tilde{c}_2 e^{2t} + 2\tilde{c}_2 t e^{2t}$$

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt} + y - e^{3t}\right)$$

Решение задач

$$x=\frac{1}{3}\Big[-6e^{3t}+\frac{3t^2}{2}e^{2t}+t^3e^{2t}+2\tilde{C}_1e^{2t}+$$

$$+\tilde{C}_2e^{2t}+2\tilde{C}_2te^{2t}-2e^{3t}+\frac{t^3}{2}e^{2t}+\tilde{C}_1e^{2t}+$$

$$+\tilde{C}_2te^{2t}-e^{3t}\Big]=\frac{1}{3}\Big[-9e^{3t}+\frac{3}{2}t^3\cdot e^{2t}+$$

$$+3\tilde{C}_1e^{2t}+\tilde{C}_2e^{2t}+3\tilde{C}_2te^{2t}+\frac{3t^2}{2}e^{2t}\Big]=$$

$$=-3e^{3t}+\frac{t^3}{2}e^{2t}+\frac{t^2}{2}e^{2t}+\tilde{C}_1e^{2t}+\frac{\tilde{C}_2}{3}e^{2t}+$$

$$+\tilde{C}_2te^{2t}=\Big(-3e^{t}+\frac{t^3}{2}+\frac{t^2}{2}+\tilde{C}_1+\frac{\tilde{C}_2}{3}+\tilde{C}_2t\Big)e^{2t}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x=\left(-3e^{t}+\dfrac{t^3}{2}+\dfrac{t^2}{2}+C_1+\dfrac{C_2}{3}+C_2t\right)e^{2t}\\ y=\left(-2e^{t}+\dfrac{t^3}{2}+C_1+C_2t\right)e^{2t}\end{cases}$$

Домашнее задание

- 3078, 3083, 3085, 9.432, 9.434, 9.436, 9.442, 9.444