Занятие 8.
Вычисление определенного интеграла.
Его свойства и геометрическая интерпретация

Теоретическое введение

1°. Интегральная сумма. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей (рис. 37). Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{1}$$

где

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}; \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i;$$
$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1),$$

называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a, b]$. Геометрически S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих прямоугольников (см. рис. 37).

2°. Определенный интеграл. Предел суммы S_n при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а наибольшая из разностей Δx_i — к нулю, называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$, т. е.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

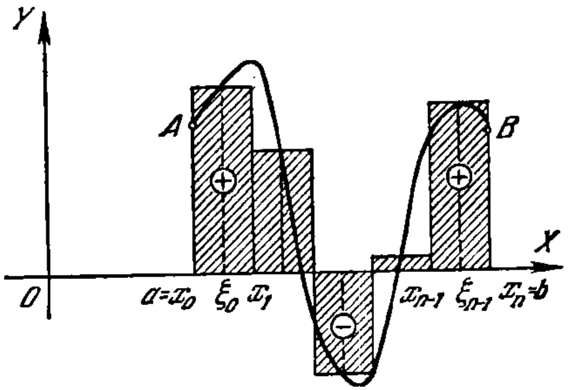


Рис. 37.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$, т. е. предел (2) существует и не зависит от способа разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек ξ_i на этих отрезках. Геометрически определенный интеграл (2) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, составляющих криволинейную трапецию $aABb$, в которой площади частей, расположенных выше оси OX, берутся со знаком плюс, а площади частей, расположенных ниже оси OX, — со знаком минус (см. рис. 37).

Определения интегральной суммы и определенного интеграла естественно обобщаются на случай отрезка $[a, b]$, где $a > b$.

Теоретическое введение

1°. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

есть первообразная для функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

2°. Формула Ньютона—Лейбница. Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Первообразная $F(x)$ вычисляется путем нахождения неопределенного интеграла

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int_{-1}^{3} x^4\,dx$.

Решение. $\int_{-1}^{3} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}$.

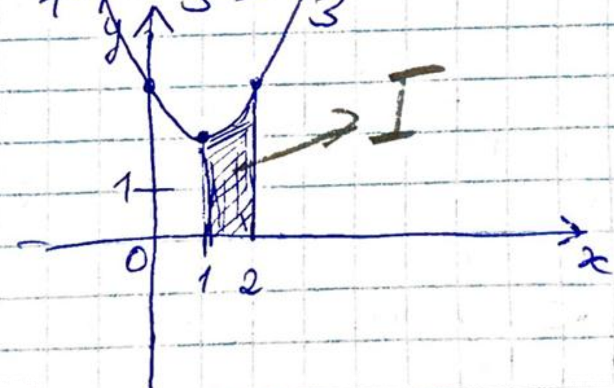
Решение задач

Вычислить интеграл

1521. $\int\limits_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx.$

$\underline{1521}$ $\int\limits_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big|_1^2 =$

$= \frac{8}{3} - 4 + 6 - \frac{1}{3} + 1 - 3 = \frac{7}{3}$



Решение задач

Вычислить интеграл

1529. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

1534. $$\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

Решение задач

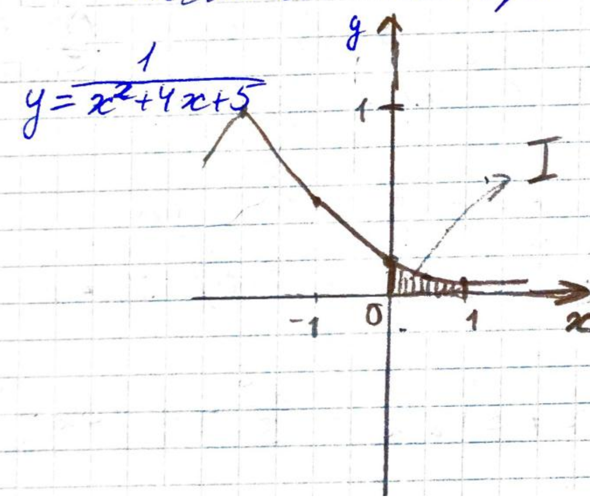
15.29 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int_0^1 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} =$

$\displaystyle = \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 =$

$\displaystyle \left\{ = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \quad (x\cdot y > -1) \right\} =$

$\displaystyle = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$

Геом-я интерп-я:



Решение задач

1534 $\int_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}=\int_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{1+4+4x-x^2}}=$

$=\int_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{9-(4-4x+x^2)}}=\int_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{3^2-(x-2)^2}}=$

$=\int_{2}^{3,5}\frac{d(x-2)}{\sqrt{3^2-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{3}\Big|_{2}^{3,5}=$

$=\arcsin\frac{\frac{3}{2}}{3}-\arcsin\frac{2-2}{3}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

Решение задач

Вычислить интегралы:

1536. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \alpha \, d\alpha.$

1538. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$

Решение задач

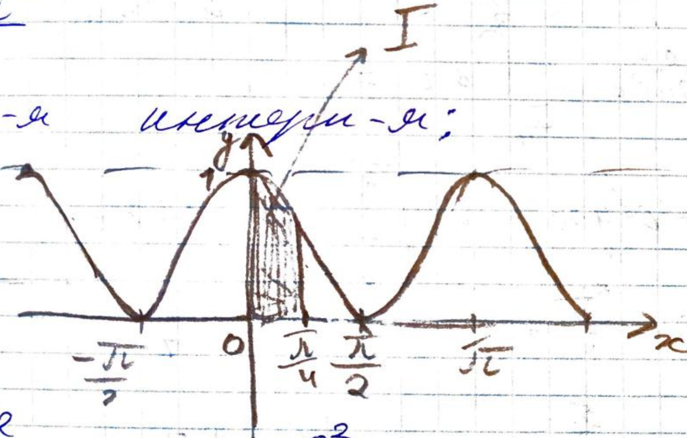
1536. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)\, d\alpha =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha) + 1\right) d\alpha = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\alpha)\, d(2\alpha) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\alpha =$

$= \frac{1}{4} \sin 2\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{4} \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} =$

$= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

Геом-я интерп-я:



1538. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} =$

$= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $x = \varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, причем $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Пример 1. Найти

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (a > 0).$$

Решение. Положим

$$x = a \sin t;$$
$$dx = a \cos t\, dt.$$

Тогда $t = \arcsin \frac{x}{a}$ и, следовательно, можно принять $\alpha = \arcsin 0 = 0$, $\beta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому будем иметь:

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a \cos t\, dt =$$

$$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt =$$

$$= \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Решение задач

1576 Можно ли интеграл

$\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ вычислить с помощью

подстановки $x = \cos t$?

Нет, т.к. для $x = \cos t$ не м.б. $x = 2$!!

Решение задач

С помощью подходящей подстановки вычислить интеграл:

1587. $$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$$

Решение задач

1587. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t \\ t = \arcsin x \\ dx = \cos t\,dt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \\ = \cos t \\ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \cdot \cos t\,dt}{\sin^2 t} =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= \left(-\mathrm{ctg}\,t - t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} =$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Решение задач

Вычислить интеграл:

$$\textbf{1592.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Решение задач

1592 $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int_{-1}^{1}\frac{(1+x^2-x^2)dx}{(1+x^2)(1+x^2)}=$

$=\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx}_{I_1}-\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}}_{I_2}$

$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=$

$=\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)$

$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

$I_2=\int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x\,(x^2+1)'dx}{(1+x^2)^2}=$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x\,d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=$ $\left\{\begin{array}{l} dv=\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ u=x;\ du=dx \\ v=-\frac{1}{1+x^2}\end{array}\right.$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{1+x^2}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[-1+\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)\right]=$

$=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

$I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

Решение задач

1598. Показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

Решение задач

Показать, что:

1598 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\sin x & x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=\arcsin u & x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \\ dx=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du & \end{array}\right\}$$

$$=\int_0^1 f(u)\,du\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\left\{\begin{array}{ll} v=\cos x & x=0 \Rightarrow v=1 \\ x=\arccos v & x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow v=0 \\ dx=-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv & \end{array}\right\}=$$

$$=\int_1^0 f(v)-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

Воспользуемся св-вом определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

Тогда получим справа

$$\int_0^1 f(v)\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv,$$ а слева

$$\int_0^1 f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

Следовательно левые и правые части равны.

Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx. \qquad (1)$$

Решение задач

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1599. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx.$

1600. $\int\limits_1^{e} \ln x \, dx.$

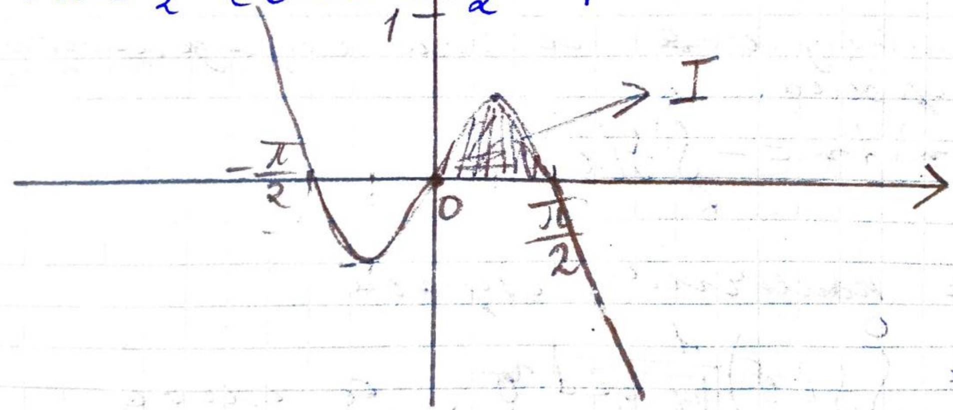
Решение задач

<u>1599</u>. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x)=x \\ v'(x)\,dx = dv = \\ = \cos x\,dx \\ v=\sin x \\ du = dx \end{array} \right.$

$= \sin x\cdot x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$

$= \sin x\cdot x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 0\cdot 0 +$

$+\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1$

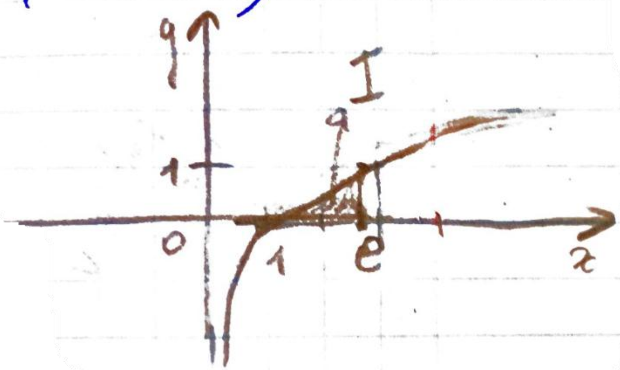


Решение задач

1600 $\int_1^e \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \\ v = x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array} \right\} = \ln x \cdot x \Big|_1^e -$

$- \int_1^e \frac{1}{x} x\,dx = \ln e \cdot e - \ln 1 \cdot 1 - (e - 1) =$

$= e - e + 1 = 1$



Теорема о среднем значении

1°. Оценки интегралов. Если $f(x) \leqslant F(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b F(x)\,dx. \tag{1}$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$ и, кроме того, $\varphi(x) \geqslant 0$, то

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В частности, если $\varphi(x) \equiv 1$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{3}$$

Неравенства (2) и (3) можно соответственно заменить эквивалентными им равенствами:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$

где c и ξ — некоторые числа, лежащие между a и b.

Теорема о среднем значении

Пример 1. Оценить интеграл

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx.$$

Решение. Так как $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, то имеем:

$$\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

т. е.

$$1{,}57 < I < 1{,}91.$$

2°. Среднее значение функции. Число

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Решение задач

1610*. Не вычисляя интегралов, определить их знак:

а) $\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx$;

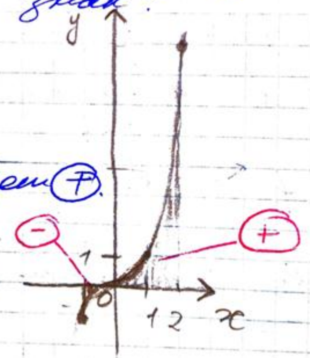
б) $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos x\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение задач

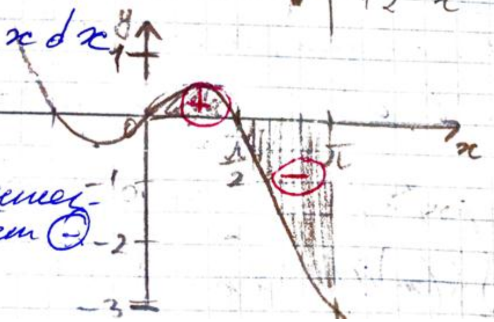
1610*. а) Не вычисляя интегралов, определить их знак:

а) $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$



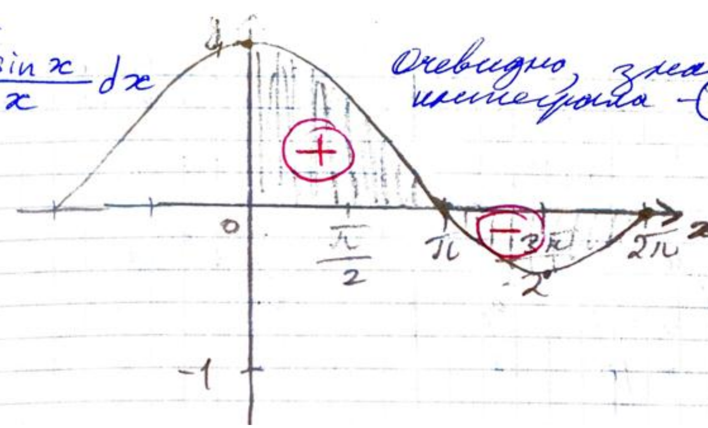
Очевидно, знак интеграла будет (+).

б) $\int_{0}^{\pi} x\cos x\,dx$



Очевидно знак интеграла будет (−).

в) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$



Очевидно, знак интеграла — (+).

Решение задач

1611. Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ или $\int\limits_0^1 x\,dx$;

в) $\int\limits_1^2 e^{x^2}\,dx$ или $\int\limits_1^2 e^x\,dx$.

Решение задач

1611(а,в) Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

а) $I_1=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$; $I_2=\int_0^1 x\,dx$

$$1\le\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx\le\sqrt{2}$$

$$0\le\int_0^1 x\,dx\le 1$$

$\Rightarrow$ Первый больше

в) $I_1=\int_1^2 e^{x^2}dx$; $I_2=\int_1^2 e^{2}dx$

$$e\le\int_1^2 e^{x^2}dx\le e^4$$

$$e\le\int_1^2 e^{2}dx\le e^2$$

$$I_1>I_2$$

Решение задач

Найти средние значения функций на указанных промежутках:

1612. $f(x) = x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

1614. $f(x) = \sin^2 x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

Решение задач

1612 $f(x)=x^2;\ 0\le x\le 1$

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

1614 $f(x)=\sin^2 x;\ 0\le x\le \pi$

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi dx-\int_0^\pi \cos 2x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\pi-0)-\frac{1}{2\pi\cdot 2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\underset{u}{2x}\,d\underset{u}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\pi}\sin 2x\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\pi}(0-0)=\frac{1}{2}$$

Решение задач

Оценить интегралы:

1619. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

1621. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение задач

1619 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} = I$

$m = \frac{1}{10+3} = \frac{1}{13}$, $M = \frac{1}{7}$

$$\frac{2}{13}\pi \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \le \frac{2}{7}\pi$$

Решение задач

1621 $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx = I$

$$M\left(\text{в т. } \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot \cancel{4}^{\,2}}{2\cdot\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$m\left(\text{в т. } \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1\cdot 2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} \le I \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} \le I \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Домашнее задание

1522, 1527, 1537, 1539, 1541, 1589, 1591, 1593, 1601, 1602, 1611 (б), 1613, 1618, 1620

(в задачах 1527, 1534, 1541, 1601 дать геометрическую интерпретацию)