Занятие 9. Вычисление площадей плоских фигур.

Теоретическое введение

1°. **Площадь в прямоугольных координатах.** Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$ $[f(x)\geqslant 0]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями в точках $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a\leqslant x\leqslant b$ (рис. 40), определяется формулой

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=x^2/2$, прямыми $x=1$ и $x=3$ и осью абсцисс*) (рис. 41).

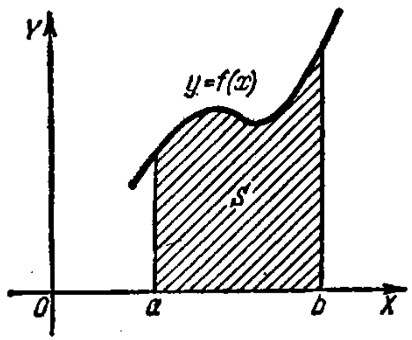


Рис. 40.

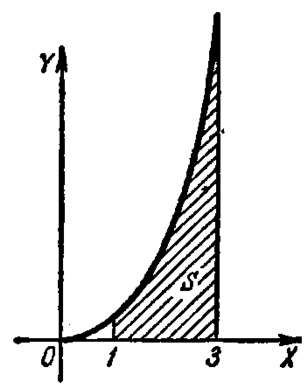


Рис. 41.

Решение. Искомая площадь выражается интегралом

$$S=\int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx=4\frac{1}{3}.$$

Теоретическое введение

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x = 2 - y - y^2$ и осью ординат (рис. 42).

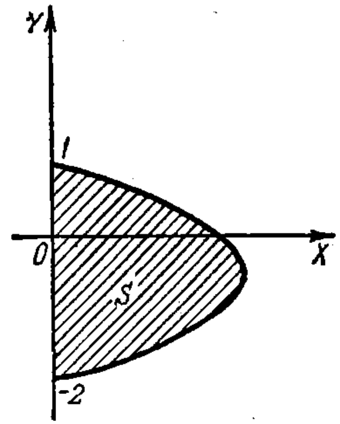


Рис. 42.

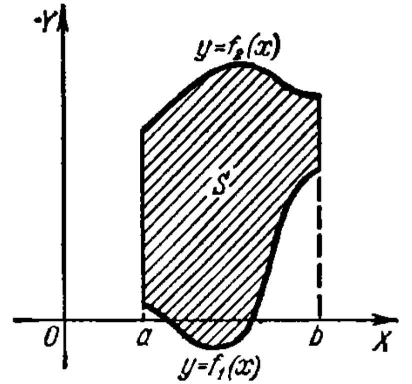


Рис. 43.

Решение. Здесь изменены роли осей координат и поэтому искомая площадь выражается интегралом

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy = 4\frac{1}{2},$$

где пределы интегрирования $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$ найдены как ординаты точек пересечения данной кривой с осью ординат.

В более общем случае, если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 43), то будем иметь:

$$S = \int_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \qquad (2)$$

Решение задач

1623. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

Найдём пределы интегрирования.

$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 4$

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \int_0^4 4x\,dx - \int_0^4 x^2\,dx =$$

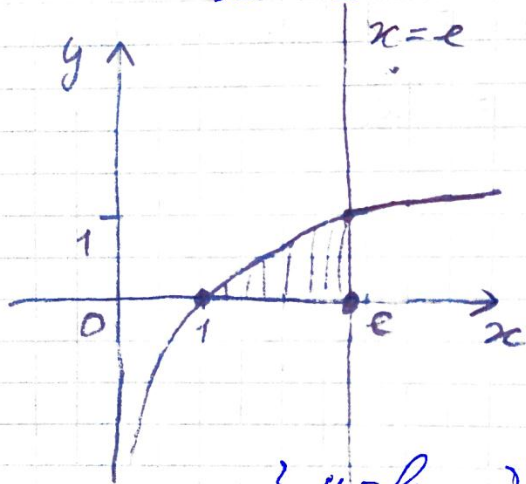
$$= 2x^2\Big|_0^4 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = 2\cdot 16 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

Решение задач

1624. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \ln x$, осью OX и прямой $x = e$.

Решение задач

1624 Вычислить площадь, ограниченную кривой $y=\ln x$, осью $0x$ и прямой $x=e$.



$$S=\int_1^e \ln x\,dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln x \\ dv=dx \\ du=\frac{dx}{x} \\ v=x \end{array}\right\}=\ln x\cdot x\Big|_1^e-$$

$$-\int_1^e \frac{x}{x}\,dx = e-(e-1)=1$$

Пример

Пример 3. Вычислить площадь S, заключенную между кривыми

$$y = 2 - x^2 \quad \text{и} \quad y^3 = x^2 \tag{3}$$

(рис. 44).

Решение. Решая совместно систему уравнений (3), находим пределы интегрирования: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. В силу формулы (2) получим:

$$S = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^{2/3})\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}.$$

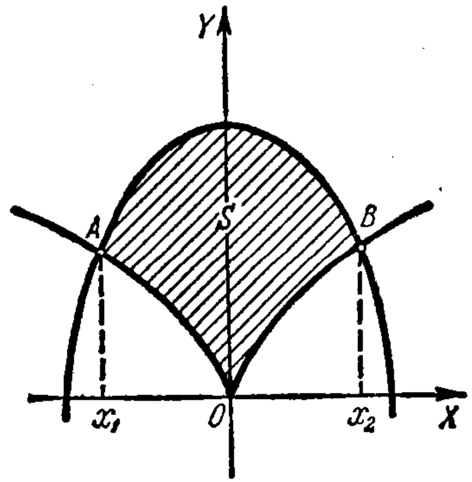


Рис. 44.

Решение задач

1633. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

1638. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

Решение задач

1633 Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$

Найдём пределы интегрирования.

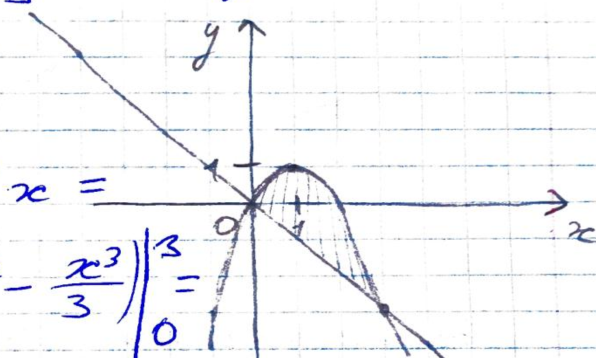
$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -x = 2x - x^2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3$$

Используем следующую формулу:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$ для нахождения площади.



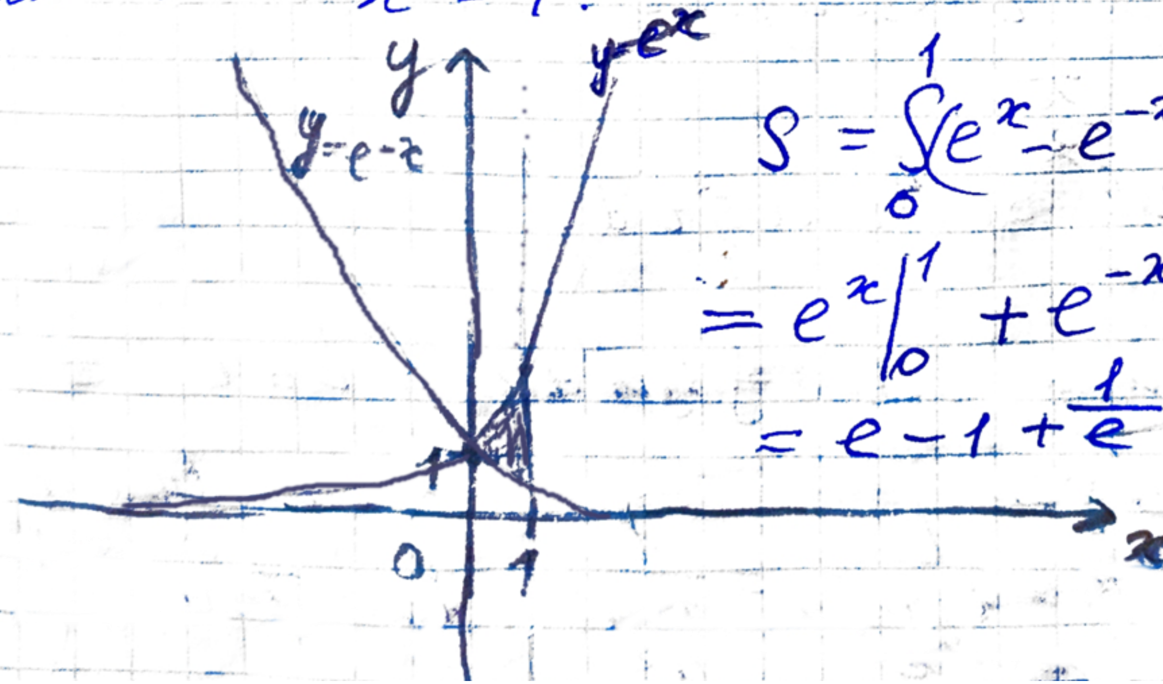
$$S = \int_0^3 [2x - x^2 + x]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 9 - 9 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27-18}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Решение задач

<u>1638</u> Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y = e^{x}$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.



$$S = \int_0^1 (e^{x} - e^{-x})\,dx =$$

$$= e^{x}\Big|_0^1 + e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= e - 1 + \frac{1}{e} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2$$

Параметрическое задание кривых

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями, соответствующими $x=a$ и $x=b$, и отрезком оси OX, выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений

$$a=\varphi(t_1) \text{ и } b=\varphi(t_2) \quad [\psi(t)\geqslant 0 \text{ на отрезке } [t_1,\ t_2]].$$

Параметрическое задание кривых

Пример 4. Найти площадь эллипса S (рис. 45), используя его параметрические уравнения $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение. Ввиду симметрии достаточно вычислить площадь одной четверти, а затем учетверить результат. Полагая в уравнении $x = a\cos t$ сначала $x = 0$, затем $x = a$, получим пределы интегрирования $t_1 = \frac{\pi}{2}$ и $t_2 = 0$. Поэтому

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin a\,(-\sin t)\,dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4}$$

и, следовательно, $S = \pi ab$.

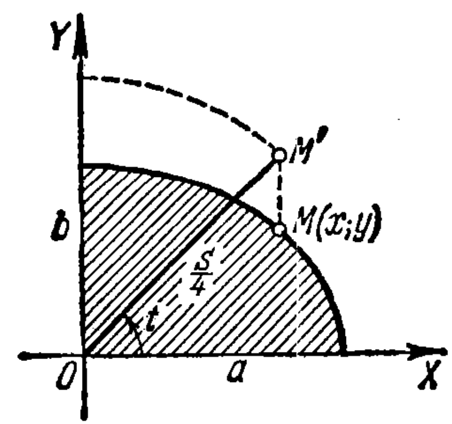
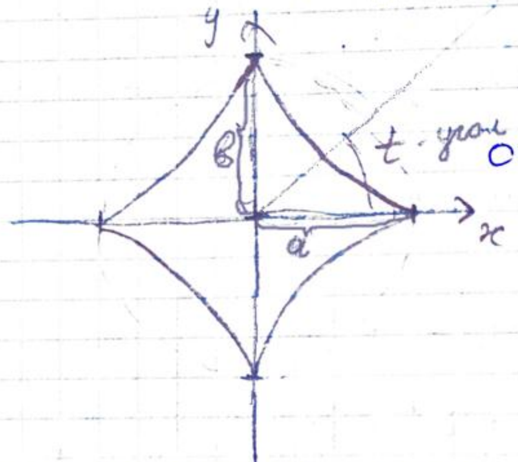


Рис. 45.

Решение задач

1650. Найти площадь, содержащуюся внутри астроиды
$$x = a\cos^3 t;\quad y = b\sin^3 t.$$



В силу симметрии достаточно посчитать для $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ и умножить на 4.

Воспользуемся формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)\,dt, \text{ где } t_1 \text{ и } t_2 \quad (x=0) = \frac{\pi}{2},\ (x=a) = 0$$

$$x=\varphi(t);\ y=\psi(t) \Rightarrow \psi(t) = b\sin^3 t,\ \varphi(t) = a\cos^3 t,$$

$$\varphi'(t) = 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)$$

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin^3 t\cdot(-3a)\cos^2 t\sin t\,dt =$$

$$= -12ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

Вычислим $I = \int \sin^4 t\cos^2 t\,dt$

Решение задач

$$I=\int \sin^4 t\cos^2 t\,dt=\int\frac{1}{4}(1-\cos 2t)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{4}\int(1-\cos^2 2t)(1-\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2t\,(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2t\,dt-\frac{1}{8}\int \sin^2 2t\cos 2t\,dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt-\frac{1}{16}\int \sin^2 2t\,d\sin 2t=$$

$$=\frac{1}{16}\int dt-\frac{1}{16}\int \cos 4t\,dt-\frac{1}{48}\cdot\sin^3 2t=$$

$$=\frac{1}{16}t-\frac{1}{64}\cdot\sin 4t-\frac{\sin^3 2t}{48}+C$$

Тогда
$$S=-12ab\left[\frac{1}{16}t-\frac{\sin 4t}{64}-\frac{\sin^3 2t}{48}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\right]=$$

$$=-12ab\left[-\frac{\pi}{16\cdot 2}\right]=\frac{3\pi ab}{8}$$

Ответ: $S=\frac{3\pi ab}{8}$

Полярные координаты

2°. **Площадь в полярных координатах.** Если непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $r=f(\varphi)$, то площадь

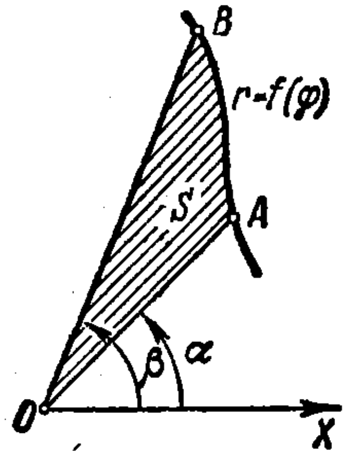


Рис. 46.

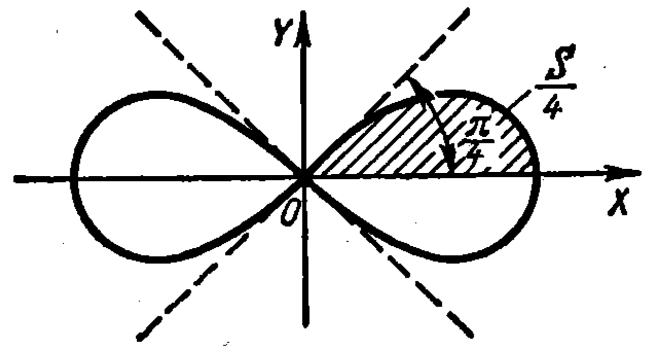


Рис. 47.

сектора AOB (рис. 46), ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OA и OB, соответствующими значениям $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выразится интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

Полярные координаты

Пример 5. Найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (рис. 47).

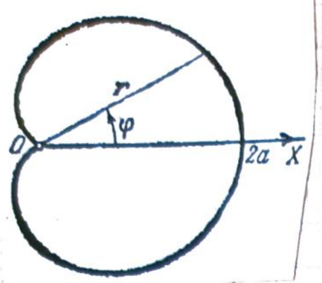
Решение. В силу симметрии кривой определяем сначала одну четверть искомой площади

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Отсюда $S = a^2$.

Решение задач

1655*. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$.



Используем формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2\,d\varphi$$

В силу симметрии можем посчитать сначала 1/2 искомой площади.

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\pi} a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} a^2\,d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi + a^2\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= a^2(\pi-0) + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \pi a^2 + 0 + \frac{a^2}{2}(\pi-0) + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Решение задач

1658. Найти площадь, ограниченную кривой $r^2 = a^2 \sin 4\varphi$.

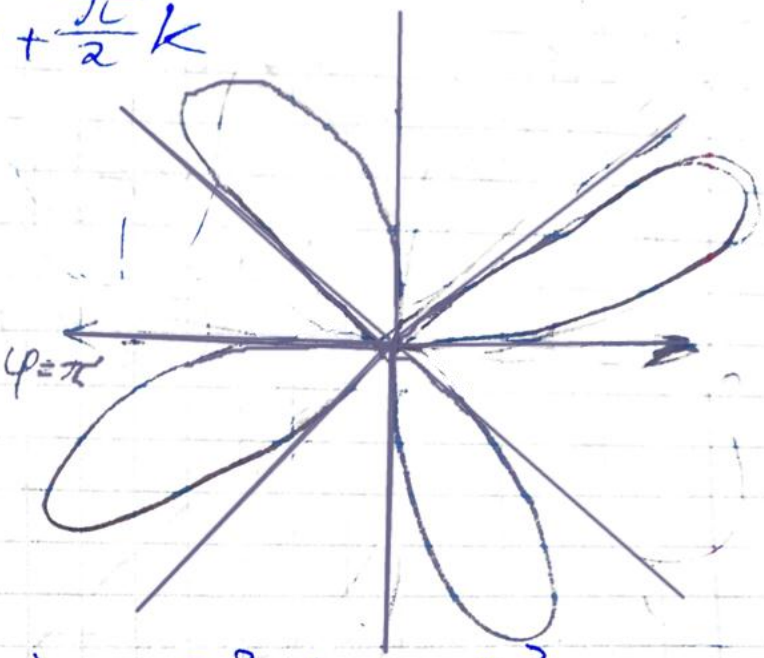
ОДЗ функции находим из условия $r(\varphi) \geq 0, \forall \varphi$

$$\sin 4\varphi \geq 0 \Rightarrow$$

$$2\pi k \leq 4\varphi \leq \pi + 2\pi k \Rightarrow$$

Решение задач

$$\frac{\pi}{2}k \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$



$$S = 4S_1$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 4\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{8}\left(-\cos 4\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{8}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{a^2}{8} \cdot 2 = \frac{a^2}{4}$$

$$S = 4S_1 = a^2.$$

Решение задач

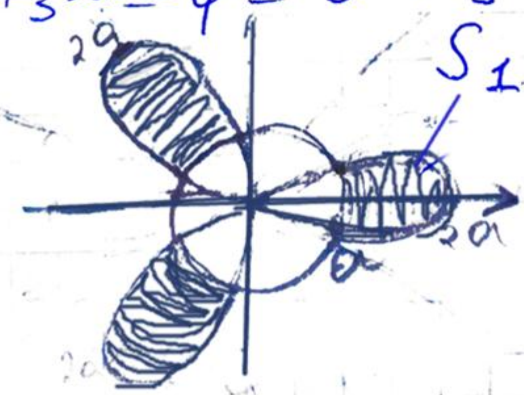
1663. Найти площадь, ограниченную кривой $r = 2a\cos 3\varphi$ и лежащую вне круга $r = a$.

ОДЗ ф-и находим из условия $r(\varphi) \geq 0\ \forall \varphi$

$\cos 3\varphi \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k$



$S = 3S_1$

Решение задач

Найдём точку пересечения кривых из условия

$$r_1(\varphi) = r_2(\varphi).$$

Точка пересечения:

$$2a\cos 3\varphi = a$$

$$\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$$

$$3\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad 3\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{9} \qquad \varphi = -\frac{\pi}{9}$$

Т.к. пределы: $-\frac{\pi}{9}$ и $\frac{\pi}{9}$

Решение задач

$$S = 3S_1$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \left(4a^2\cos^2 3\varphi - a^2\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 4a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}(\cos 6\varphi + 1)\right) d\varphi - a^2 \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} d\varphi\right] =$$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \cos 6\varphi \, d\varphi + a^2 \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} d\varphi - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{9} =$$

$$= \frac{a^2}{6} \sin 6\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} + a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{9} - \left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) - \frac{a^2\pi}{9} =$$

$$= \frac{a^2}{6}\left(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{a^2\pi}{9} = \frac{a^2}{6} \cdot \sqrt{3} + \frac{a^2\pi}{9}$$

Отсюда: $S = 3S_1 = a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Домашнее задание

1626, 1634, 1636, 1645, 1653, 1656, 1657, 1661

+ сделать первую задачу из д/з № 1